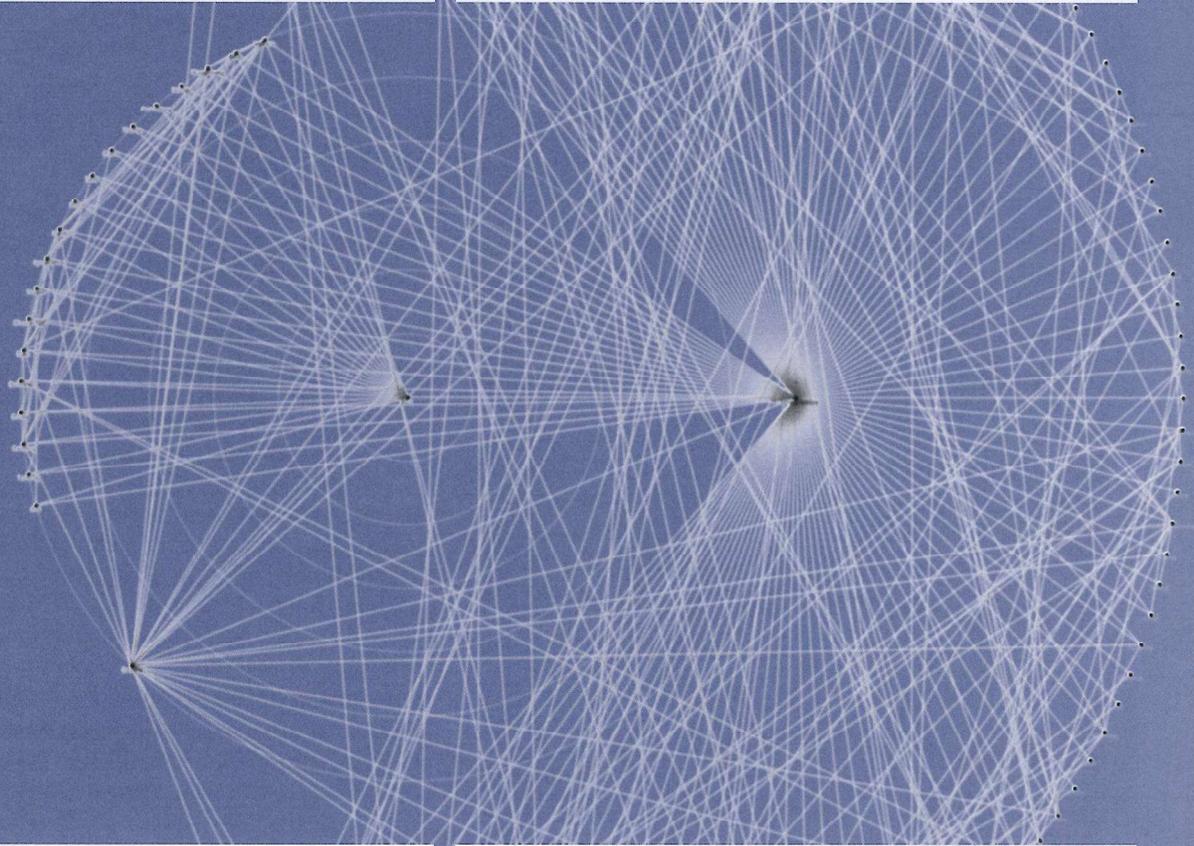


O Ensino da Teoria de Grafos em Portugal

Rui Feiteira e Marília Pires



Considerações iniciais

No complexo mundo da Matemática muitas são as áreas em que se faz uma intensa investigação motivada pelas inúmeras aplicações que esses temas têm noutras ciências e na vida quotidiana. Destas áreas, pode-se destacar a teoria de grafos, quer pela sua enorme e imediata aplicabilidade, quer pelas suas interacções com outras ciências, nomeadamente economia, gestão e ciências sociais. Grande parte da investigação que se faz actualmente neste domínio prende-se com a busca de algoritmos mais eficientes e eficazes para a resolução dos problemas da vida real. O grande atractivo da teoria de grafos prende-se com o facto de, apesar de ser um tema de enorme complexidade e tratar problemas de muito difícil solução, ser possível uma abordagem informal e lúdica, compreensível por alunos do ensino básico.

Desde o início da década de 90, do século passado, que na comunidade educativa portuguesa, tendo como principal veículo a revista *Educação e Matemática* (sem querer menosprezar o papel decisivo de vários grupos de trabalho no âmbito dos últimos ProfMats), a discussão sobre a inclusão de temas de

Matemática Discreta nos programas curriculares tem vindo a ser realizada com maior ou menor acuidade. Corolário desta discussão foi a inclusão de vários conteúdos, considerados inovadores, na recém-criada disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS). De todos os conteúdos aí incluídos, tais como modelos de crescimento populacional, teoria das eleições ou inferência estatística, é sem dúvida o capítulo dedicado aos modelos de Grafos o que mais interesse tem suscitado. Podem-se apontar várias causas para este interesse, sendo talvez a principal o facto de se tratar de um tema que capta a atenção dos alunos, quer porque se conseguem abordar problemas da vida real bem conhecidos dos alunos quer porque não é necessário qualquer *background* matemático, para além de saber somar e subtrair (normalmente números pequenos).

O facto de grande parte dos docentes não ter tido contacto com qualquer conteúdo relacionado com grafos na sua formação inicial deve, certamente, tê-los levado a obter informação sobre o tema e daí a profusão de artigos, palestras, cursos e seminários que se têm produzido nos últimos tempos sobre este tema.

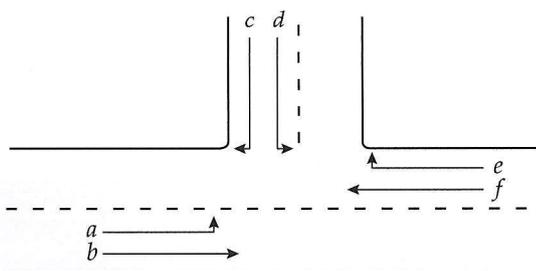


Figura 1

Imagina que o avião te leva até à ilha Terceira e, aí, consultas uma tabela com as ligações de barco [ida e volta] disponíveis naquela época entre as ilhas do grupo central dos Açores.

Terceira - Faial
Terceira - Graciosa
Faial - Pico
Faial - S. Jorge
S. Jorge - Graciosa



Figura 2

Os Grafos e a revista Educação e Matemática

Em 1994, numa série de artigos publicados na revista *Educação e Matemática*, discutia-se algumas das potencialidades do uso de redes e matrizes em actividades de modelação matemática (Febles, 1994), ou as vantagens de se considerarem alguns tópicos de teoria de grafos no ensino secundário, devido à simplicidade de conceitos e ao potencial de resolução de problemas em contextos reais (Perdigão, 1994). Esta última autora apresenta ainda uma lista de problemas que se podem resolver recorrendo à teoria de grafos, de onde se pode destacar o problema de como pôr a funcionar os semáforos de um cruzamento de modo a que cada condutor não tenha um tempo de espera superior a um minuto (figura 1).^[1]

Ainda em 1994, Paulo Abrantes, deu a conhecer o projecto Mat789, em *Contagens, Grafos e Matrizes nos nossos programas? Talvez um dia...* Este projecto decorreu entre 1988 e 1992, e nele participaram inicialmente quatro turmas do 3.º ciclo do ensino básico. O projecto consistiu, de uma forma muito sucinta, na concepção, experimentação e avaliação de um currículo inovador, especialmente desenhado para o terceiro ciclo. Em relação aos programas ainda em vigor é de notar a inclusão no 9.º ano de escolaridade de uma unidade didáctica sobre grafos e matrizes. A propósito do desenvolvimento desta unidade, Abrantes (1994) afirmou que «A experiência revelou-se muito encorajadora quanto «às potencialidades curriculares» no 9.º ano — ou até mais cedo (...) [é] um tema que é muito pouco exigente do ponto de vista de pré-requisitos necessários e que, ao mesmo tempo, é susceptível de proporcionar aos alunos muitas actividades interessantes de investigação e modelação no contexto de situações de realidade.»

Mais recentemente, Pires e Kravchenko (2007) em *Reflexões sobre o ensino de grafos*, apresentam bastantes exemplos que podem servir para introduzir, de uma forma quase natural, alguns dos conceitos básicos de grafos. Defendem ainda que «... haveria todo o interesse de introduzir este tema nos currículos de Matemática dos outros cursos do secundário.»

Grafos no ProfMat

Desde de 1992 até aos nossos dias muitos professores, de diversos níveis, contribuíram para a discussão e reflexão sobre a introdução de tópicos de teoria de grafos no nosso ensino.

Mais recentemente, a tónica das intervenções centrou-se sobre actividades a desenvolver na sala de aula.

Paixão (1992), numa sessão temática, apresentou duas aplicações reais da teoria de grafos e da optimização combinatória, colocando em evidência a importância que estes modelos e técnicas matemáticas podem ter no apoio à tomada de decisões das empresas. Os casos tratados referiam-se a duas empresas portuguesas: a Carris de Lisboa e a Portucel de Viana do Castelo.

Em 1998, no ProfMat de Guimarães, reuniu-se o primeiro grupo de discussão dedicado a este tema, mediado por Veloso e Loureiro, sob o tema «Matemática discreta e competências matemáticas» onde se discutiu a importância da inclusão do tema no currículo a sua relação com as competências da Matemática. Os anos que se seguiram foram férteis na discussão, tendo este tópico sido frequentemente abordado em comunicações, cursos ou sessões práticas dos ProfMats. Em 2001, Atalaia, destacou a capacidade que a teoria de grafos tem para resolver problemas bem como a interligação entre esta e outras áreas da Matemática como, a topologia, a geometria e a álgebra.

Na realidade, a implementação da disciplina de MACS em 2004/05 despoletou o aparecimento de alguns cursos de índole mais prática (Borrallho & Espadeiro, 2003, Ribeiro 2005, Nascimento & Cruz, 2006, Ribeiro & Feiteira, 2006 e 2007). Num âmbito de desenvolvimento curricular, podemos encontrar ainda outros contributos. Assim, Colaço et al, numa comunicação do ProfMat em 2005, defendem que são inúmeros os problemas reais que podem ser abordados utilizando conceitos da teoria de grafos e modelos de optimização (Caminho Mais Curto, Fluxo Máximo, Localização e Afectação, entre outros). Estas autoras propõem ainda o estudo, na disciplina de MACS, de alguns problemas de redes sociais e tecnológicas, discutindo nomeadamente três problemas concretos: identificação de subgrupos coesos numa rede social, problemas de optimização numa rede com fluxos de informação e o problema de localização numa rede computacional. Enquanto que, no nosso entender, os dois últimos problemas, não oferecem grandes problemas na implementação dentro da sala de aula e são de grande pertinência, mostrando outro tipo de aplicações que não são estudados na disciplina MACS, já no que diz respeito ao primeiro problema pensamos que a questão é demasiado ambiciosa para este nível, uma vez que envolve uma grande quantidade de conceitos novos e não triviais. Estas autoras

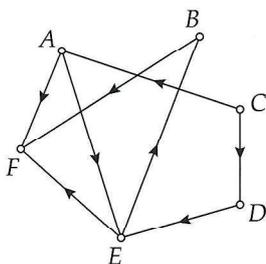


Figura 3. Grafo orientado que modela um torneio escolar

destacam a grande importância destas actividades, do ponto de vista da aquisição de competências por parte do aluno, «... este tipo de actividade (...) [permite] a compreensão do valor da matemática na resolução de problemas em situações reais.» (Colaço *et al.*, 2005)

No ProfMat, de 2006, além dos cursos já anteriormente referidos, foram feitas duas outras contribuições neste campo. Numa comunicação Silva, Bernardino e Feiteira deram a conhecer uma experiência realizada com uma turma do segundo bloco de MACS, sobre problemas de afectação. Os exemplos trabalhados com os alunos exigiam a utilização do algoritmo húngaro para a determinação das soluções óptimas. Um dos pontos críticos nesta questão era a representação de grafos ponderados pelas respectivas matrizes de custo, conceito completamente exógeno aos currículos escolares. Os alunos não mostraram quaisquer dificuldades na representação matricial. Além disso, revelaram facilidade na aplicação dos passos do algoritmo húngaro, tendo alguns deles encarado este algoritmo como o jogo do Sudoku (Silva, Bernardino e Feiteira, 2006). Pires (2006) em *Grafos para todos: a importância dos exemplos na construção dos conceitos*, conferência realizada no ProfMat de Setúbal, defende que é relativamente fácil encontrar situações que possam ser modeladas através de grafos, mas que se torna necessário escolher e explorar bons exemplos dentro da sala de aula. Por esta razão torna-se fundamental que o professor esteja muito atento para explorar completamente os exemplos escolhidos, de modo a que a introdução de conceitos ou a formalização de resultados possa ser feita ao mesmo tempo de forma informal e cientificamente correcta. De uma forma simples, mas rigorosa, Pires mostrou uma forma de abordar o teorema de Euler, sobre a existência de circuitos de Euler, onde os alunos são guiados para o resultado do teorema observando grafos muito simples onde é ou não é possível encontrar um tal circuito usando o velho método da tentativa e erro. Esta autora mostra ainda como se podem abordar vários conceitos básicos como por exemplo, o lema dos apertados de mão, usando para o efeito torneios de futebol.

Sobre o projecto Mat 789

Nos finais da década de 80 anunciava-se para breve a substituição dos velhos programas do terceiro ciclo. Na realidade os programas que estavam então em vigor não passavam dos programas

do final da década de 60 com algumas modificações pontuais de índole quase cosmético. Nesta conjuntura surge o projecto inovador Mat789. Certamente que a autorização necessária por parte do Ministério da Educação para implementar no terreno um tal projecto só foi possível devido ao anunciado abandono dos programas em vigor.

Este projecto, desenvolvido no 3.º ciclo do ensino básico, foi certamente influenciado pela onda de renovação internacional do ensino da Matemática dos anos 80, tanto nos objectivos e métodos, como na organização do currículo. Sofreu ainda influências fortes na integração das aplicações e da modelação no ensino da Matemática. As turmas que participaram no projecto, receberam um programa de Matemática diferente do vigente, diferenças que não se limitavam aos diferentes conteúdos, mas que fundamentalmente se focavam na forma como se trabalhava dentro da sala de aula e na forma como se avaliava. Estas últimas características eram realmente inovadoras para a época. O trabalho de grupo dentro e fora da sala de aula foi uma das estratégias mais usadas para a exploração das fichas de trabalho. Com efeito, no primeiro ano mais de dois terços das aulas previstas foi ocupado com este tipo de trabalho. O trabalho individual não foi de todo posto de lado tendo-se materializado nomeadamente na elaboração de relatórios, estudo de textos e realização de testes. Neste projecto apareceram, pela primeira vez em Portugal, os testes de duas fases. O trabalho de projecto foi também umas das bandeiras do Mat789. Em cada ano deveriam ser realizados dois projectos, um de índole mais matemático, enquanto que o outro seria de intervenção na realidade social dos alunos.

Para o nosso propósito interessa-nos o facto de terem sido trabalhados, no contexto da sala de aula, tópicos sobre teoria dos grafos. Um denominador comum a todas as actividades é a introdução de conceitos através de fichas de trabalho, sendo que os alunos aprendiam fazendo, rompendo desta forma com o modelo tradicional vigente.

Apresentamos de seguida as duas actividades iniciais^[2] dos tópicos de grafos incluídos nesse projecto.

A noção intuitiva de grafo foi introduzida através de uma proposta de trabalho, onde os alunos deveriam organizar um passeio de barco pelas ilhas dos Açores, atendendo às ligações existentes (restrições do problema), conduzindo-os à criação de

	A	B	C	D	E
A					
B			7	15	8
C				8	5
D					11
E					

Tabela 1

um modelo gráfico ao suprimir as ilhas, transformando-as em pontos, e ao representar as ligações possíveis por setas entre os pontos. A figura 2 mostra o início da actividade.

A segunda actividade, retomava os problemas combinatórios de anos anteriores. Os alunos deveriam observar um grafo orientado — ainda sem terem a noção do que era um grafo — e responder a algumas questões sobre um torneio de voleibol de uma escola. Gradualmente, os alunos eram encaminhados para as noções básicas dos grafos.

Apesar de reconhecermos que a integração da unidade sobre grafos ter sido inovadora, assim como quase toda a organização do currículo deste projecto, parece-nos pouco ambicioso, no que toca à teoria dos grafos, pois os autores do projecto exploraram apenas dois ou três conceitos, dando alguma importância aos caminhos e circuitos de Euler (Feiteira, 2007). Os autores abordaram ainda a ligação entre grafos e as suas representações matriciais.

A unidade Modelo de Grafos de MACS

Os autores do programa reconhecem que ao incluírem este tópico, nos conteúdos desta nova disciplina, estão a incluir um tipo de matemática bem diferente da usualmente trabalhada na sala de aula. Apesar de algo vago, o programa de MACS, na essência, define apenas dois temas a trabalhar: o problema do caixeiro-viajante e os raciocínios subjacentes aos grafos eulorianos. Para ajudar o estudo do primeiro problema também se estudam árvores. Ainda segundo os autores está fora de questão uma abordagem teórica sistematizada à teoria de grafos, pois as noções básicas devem surgir naturalmente a partir de situações específicas.

Segundo a nossa experiência, tanto com alunos como com professores com que trabalhamos em diferentes cursos e sessões práticas, quando os alunos começam a trabalhar estes conceitos, toda a dinâmica da aula se altera. Os bons alunos vêem estas questões como um bom desafio enquanto os alunos que revelam mais dificuldades noutras unidades, aparecem agora na sala de aula bastante motivados.

Apesar de esta disciplina ser muito recente já se levantam algumas vozes discordantes. O denominador comum destas vozes refere a falta de ambição que os autores do programa tiveram quando escolheram os temas a trabalhar na unidade Modelos de

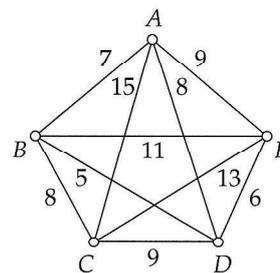


Figura 4

Grafos. Ao seleccionarem apenas dois tópicos, a equipa, deixou de fora temas como os problemas de afectação (ver Silva, A., Bernardino, L., Feiteira, R., 2006), os problemas de coloração (ver Feiteira, a publicar) e os problemas de cobertura (Pires, 2006; Colaço et al, 2005). Esta falta de ambição fica ainda mais patente se notarmos que os alunos do *middle school* do estado de New Jersey recebem, na essência, os mesmos conteúdos que os nossos alunos de MACS^{bl}.

E o futuro?

Será de estranhar uma tão grande afluência de professores aos cursos e sessões práticas? Pensamos que não. Num passado recente, poucos cursos universitários portugueses, em Matemática, ofereciam nos seus currículos uma disciplina onde se abordasse tópicos sobre teoria de grafos ou sobre análise de redes. Podemos ainda acrescentar que existe pouca literatura em português sobre este assunto, o que torna mais difícil o acesso à informação, isto apesar de reconhecermos a oferta importante de informação que existe *on-line*, quer em português do Brasil, quer em inglês. A utilização de informação *on-line* deve ser feita cuidadosamente, adoptando uma postura crítica e desconfiada sobre o que estamos a ler, para não cairmos em falsas verdades. Na realidade temos encontrado algumas incorrecções e até erros bastante grosseiros nalgumas páginas sobre grafos acessíveis na *internet*.

Com o propósito de ajudar a colmatar os problemas anteriormente identificados, o Grupo de Trabalho sobre a Formação Matemática do Futuro Professor (GTFMFP), da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, secção de Matemática, apresentou um relatório, em 2005, que tinha como objectivo principal produzir um conjunto de recomendações sobre a formação em Matemática dos futuros professores dos diversos níveis de ensino. Neste relatório reconhece-se que uma das áreas onde se deve investir é na Matemática relacionada com as ciências da computação, nomeadamente teoria de grafos e redes.

Partindo de exemplos do quotidiano podem-se trabalhar e desenvolver muitas questões sobre Teoria de Grafos. De seguida deixamos um pequeno exemplo que poderia ser aplicado numa turma do 3.º Ciclo do Ensino Básico.

Suponha que, num determinado dia, uma rede de hipermercados, deseja distribuir, a partir de A, pelas suas outras quatro lojas, um certo número de produtos. A seguinte tabela apresenta a distância entre cada uma das 5 lojas (tabela 1).

Esta situação pode ser modelada por um grafo ponderado (figura 4). Assim, cada vértice do grafo representará uma loja e, dois vértices estão ligados, caso seja possível viajar entre as duas cidades. Associada a cada aresta está a distância entre as lojas respectivas.

Partindo deste exemplo podem-se explorar inicialmente os conceitos de: grafo, grau de um vértice, arestas, vértices, vértices adjacentes, circuitos e caminhos hamiltonianos, árvores e, finalmente poder-se-á introduzir o algoritmo do vizinho mais próximo (mesmo sem o enunciar explicitamente), como uma estratégia mais rápida para encontrar uma solução (que pode não ser necessariamente a solução ótima). De facto, nesta situação, o algoritmo referido não nos fornece a melhor solução.

Vemos assim como, a partir de uma situação simples e muito concreta, se conseguem abordar alguns conceitos de teoria de grafos e, simultaneamente, apresentar uma das faces da Matemática que os alunos desconhecem totalmente, mas que resolve muitas das situações do dia-a-dia.

Considerações finais

A teoria de grafos, hoje em dia, é de facto uma área incontornável e bastante presente na vida real. A NCTM (2000) reconhece que estes tópicos, devido à sua riqueza de aplicações, deveriam ter um espaço reservado nos conteúdos a leccionar desde a mais tenra idade.

Será que algum dia, no nosso país tal será reconhecido de modo a que a teoria de grafos venha a ter reservado um espaço, de algum destaque, entre os conteúdos leccionados na nossa escola? Temos esperança que sim.

A teoria de grafos permite a realização de experiências matemáticas realmente significativas, pois poderá permitir a ligação entre conteúdos matemáticos e trazer para a sala de aula a experiência pessoal de cada aluno. As situações problemáticas que se podem explorar são inúmeras, podendo ir desde determinar o caminho mais curto entre duas cidades, a simples actividades de lazer como, por exemplo, os labirintos ou problemas com dominós, podem ajudar a estimular de uma forma inequívoca a criatividade dos nossos alunos (Feiteira, 2007). Devido à simplicidade dos conceitos, a um nível elementar, a teoria de grafos, pode permitir experiências realmente significativas a todos os alunos. E talvez mais importante: pode permitir uma reaproximação entre a Matemática e a generalidade dos alunos que frequentam as escolas, podendo de alguma forma fornecer uma 2.ª oportunidade aos alunos.

Notas

- [1] A propósito deixamos a referência do livro de Wilson e Watkins, *Graphs An Introductory Approach*, editado pela Wiley em 1990, que contém uma excelente recolha de exemplos e aplicações da Teoria de Grafos.
- [2] As figuras 2 e 3 foram retiradas de Abrantes, P., Leal, C., Silva, M., Teixeira, P., Veloso, E., (1997).
- [3] Consultar New Jersey Education Department em <http://www.state.nj.us/njded/frameworks/math/>.

Referências Bibliográficas

- Abrantes, P. (1994a), Contagens, Grafos e Matrizes nos nossos programas? Talvez um dia..., *Educação e Matemática*, 30, p.17-20, Lisboa: APM.
- Abrantes, P., Leal, C., Silva, M., Teixeira, P., Veloso, E., (1997), *MAT789 Inovação Curricular em Matemática — propostas de actividades para os alunos*, Lisboa: APM.
- Abrantes, P., Leal, C., Silva, M., Teixeira, P., Veloso, E., (1997a), *MAT789 Inovação Curricular em Matemática*, Lisboa: Gulbenkian.
- Atalaia, M. (2001), Teoria de grafos e problemas. In *Actas do ProfMat 2001*, Vila Real: APM.
- Colaço, S., Rebelo, C., Pato, M. (2005), Problemas de Optimização em Redes Sociais e Tecnológicas. Algumas actividades para a aula de Matemática. In *Actas do ProfMat 2005*, Évora: APM [Suporte: CD-Rom].
- Febles, C. (1994), Matrizes por detrás das redes, *Educação e Matemática*, 29, 3-5, Lisboa: APM
- Feiteira, R. (2007), *Grafos para todos — sobre o desenvolvimento da Teoria de Grafos no 3.º Ciclo do Ensino Básico*. (Tese de Mestrado, Universidade do Algarve), Lisboa: APM.
- Feiteira, R. (a publicar), Grafos, Cores e Resolução de Conflitos, *Gazeta da Matemática*, Lisboa: SPM.
- Grupo de Trabalho sobre a Formação Matemática do Futuro Professor (2005), *A Matemática na Formação Inicial dos Professores*. Disponível em <http://www.spce.org.pt/sem/actividades2.htm>.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000), *Principles and Standards for School Mathematics for school Mathematics*, Virginia: NCTM.
- Silva, A., Bernardino, L., Feiteira, R. (2006), Problemas de Afectação em MACS? In *Actas do ProfMat 2006*, Setúbal: APM [Suporte: CD-Rom].
- Paixão, J. (1992), Exemplos de aplicação da Teoria dos Grafos e Optimização Combinatória. In *Actas do ProfMat 1992*, Viseu: APM.
- Perdigão, C., (1994), Um breve olhar sobre os grafos — Matrizes por detrás das redes, *Educação e Matemática*, 29, 19-20, Lisboa: APM
- Pires, M. (2006), Grafos para todos: a importância dos exemplos na construção de conceitos. In *Actas do ProfMat 2006*, Setúbal: APM [Suporte: CD-Rom].
- Pires, M., Kravchenko, V. (2007), Reflexões sobre o ensino de grafos, *Educação e Matemática*, 93, 11-15, Lisboa: APM.

Rui Feiteira

Agrupamento Vertical de Escolas prof. José Buisel, Portimão

Marília Pires

Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade do Algarve