

Geometria do espaço e materiais no 7.º ano

Leonor Cunha Leal, Esc. Secundária D. Pedro V
Eduardo Veloso, Departamento de Educação da FCUL

Introdução

A experiência de utilização de materiais manipulativos em Geometria que vamos descrever está enquadrada num projecto de renovação curricular da disciplina de Matemática nos 7.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade — MAT₇₈₉ — com a duração de quatro anos e que teve início no ano lectivo de 1988/89. Neste ano a experiência foi desenvolvida em duas turmas do 7.º ano e na planificação global, decidimos atribuir 11 semanas do ano lectivo a actividades em Geometria.

De acordo com propostas para o ensino da Geometria Elementar que têm sido avançadas desde há muito, em particular por educadores matemáticos holandeses (Freudenthal, Albada), foi resolvido tratar a Geometria do 7.º ano tomando como *ambiente principal de aprendizagem o espaço* e, depois, *descendo ao plano e subindo de novo ao espaço*, sempre que isso se tornasse natural ou conveniente para resolver as questões que fossem sendo postas aos alunos.

A utilização de materiais manipulativos é uma prática corrente e natural no ensino da Geometria e os próprios materiais escolhidos não têm também nada de revolucionário, sendo apenas uma das escolhas possíveis. Julgamos que o interesse desta experiência está sobretudo na opção pedagógica que referimos e nas consequências que ela provocou no modo de utilização dos materiais.

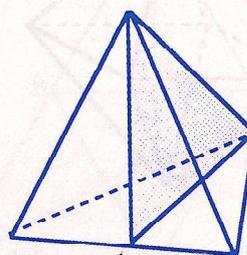
Alguns materiais e sua utilização

No primeiro dia de aulas de Geometria, foram dados a cada grupo de alunos um cubo, um tetraedro e uma pirâmide de base trapezoidal.

Em vez de utilizar poliedros opacos, utilizámos pequenos tubos de plástico (arestas) ligados através de cantos (vértices) também em plástico, formando desta forma as estruturas dos sólidos — a que um dos alunos chamava «esqueletos de sólidos». Além de tornar fácil o seu manuseamento, esta opção possibilitava a medição da diagonal do cubo ou da altura da pirâmide, por exemplo. «Medir» significa aqui precisamente isso, os alunos teriam que arranjar um processo expedito de fazer essas medições — muitos recorreram a um fio de cordel, pois utilizar a régua directamente tornava-se difícil. Outra vantagem era a de poderem introduzir dentro de tais estruturas outras construídas por eles (por exemplo, pirâmides dentro de um cubo), tendo assim uma confirmação aproximada das suas anteriores opções e medidas.

Apresentamos a seguir dois exemplos retirados das fichas de trabalho:

A) Repara bem na figura seguinte, em que aparece a sombreado um triângulo dentro do tetraedro:



este ponto
está no meio
da aresta

Tenta desenhar em cartolina um triângulo que se encaixe no tetraedro da maneira indicada na figura. De quantas maneiras diferentes podes encaixar o triângulo no tetraedro?

B) Queremos encher o cubo com 6 pirâmides todas iguais. Pensa bem como há-de fazer. Depois faz todas as medições necessárias para a construção das pirâmides. Chama depois a professora e pede as palhas necessárias para fazer duas dessas pirâmides.

Constrói as pirâmides e depois verifica que seis dessas pirâmides encheriam o cubo.

Sugestão: as bases das pirâmides vão ser as faces do cubo.

Comentários:

No exemplo A), o que se pedia aos alunos era no fundo a construção de um triângulo isósceles, em que o lado «diferente» era a aresta do tetraedro e o lado «igual» era a altura da face do tetraedro. Os grupos utilizaram processos, mais ou menos expeditos e rigorosos, para medir esta altura.

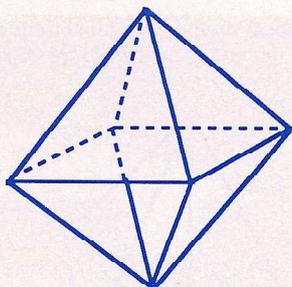
No exemplo B), foram dados aos alunos, após um trabalho prévio de pesquisa de quantas pirâmides iriam caber dentro do cubo e quais as dimensões necessárias para a sua construção, palhinhas de refresco com uma certa consistência mas fáceis de cortar e limpa-cachimbos para ligar as palhinhas nos vértices.

Outra actividade frequente dos alunos foram as planificações, utilizando a tradicional cartolina. Contudo, o ponto de partida foi sempre a resolução de problemas ou a exploração de situações problemáticas em que as

planificações se revelassem como um processo conveniente de trabalho. Dois exemplos tirados das fichas de trabalho dos alunos:

A)

a) Estuda o octaedro que te for fornecido em cartolina:

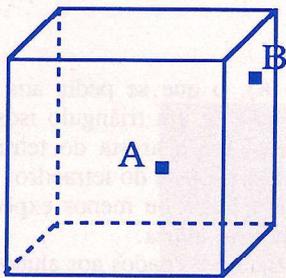


Acrescenta-o à lista dos sólidos geométricos e preenche a tabela das suas propriedades.

b) Imagina que queres planificar o octaedro. Vê se descobres quantos cortes terias que fazer. Indica a lápis no octaedro quais as arestas que decidiste cortar e faz um esboço com o resultado final da planificação.

B) Uma mosca que não sabe voar vive sobre um cubo. Para se deslocar, apenas pode andar sobre as faces do cubo.

a) Se marcarmos um ponto A sobre uma das faces do cubo (a da frente) e um ponto B sobre outra face (de lado), qual será, de todos os caminhos possíveis entre os dois pontos, o mais curto?



Faz um esquema no teu caderno indicando como descobririas o caminho mais curto. (Sugestão: lembra-te que já sabes planificar o cubo).

b) Estuda agora o caso em que dois pontos estão sobre duas faces opostas do cubo. Faz também um esquema no teu caderno.

Comentários:

No exemplo A), foi tido em conta que os octaedros fornecidos aos alunos e construídos pelo professor não revelassem quais as arestas que foram coladas. Dessa forma, diferentes grupos de alunos chegaram naturalmente a diferentes soluções, que foram depois discutidas com toda a classe.

Quanto ao exemplo B), a planificação do cubo é praticamente exigida pela resolução do problema. Mas este problema obriga, sobretudo a alínea b), a perceber que existem várias planificações possíveis e que em alguns casos não é indiferente qual a que escolhemos.

Considerações finais

Ao reflectirmos sobre a nossa experiência com estas duas turmas do 7.º ano, somos levados a fazer duas constatações:

- os alunos aceitaram muito bem o conjunto de actividades de Geometria que lhes propusemos e demonstraram interesse e mesmo prazer na realização dessas actividades;

- como é natural, depois de um período prolongado de trabalho num certo ambiente e com certo tipo de objectos — neste caso, os sólidos geométricos — os alunos revelavam uma familiaridade e uma apreciável capacidade de resolver problemas envolvendo esses objectos, e ao mesmo tempo começavam a libertar-se da necessidade de manipular os sólidos para pensar sobre eles; ou seja, parecia estarmos também a atingir um dos nossos objectivos, os alunos tinham desenvolvido as suas capacidades de visualização no espaço.

Para ilustrar estas últimas afirmações, utilizaremos como exemplos respostas de alunos a questões que lhes foram postas numa ficha de avaliação de Geometria. Esta ficha pretendia avaliar os diferentes tipos de actividades que os alunos tinham realizado em Geometria, e assim, ao mesmo tempo que eram propostos variados problemas, também eram pedidas algumas construções em cartolina a propósito de outros problemas. Apresentaremos como exemplo duas questões dessa ficha.

A)

a) Quantos cubos com uma aresta de 5 cm se poderiam encaixar dentro de um cubo com uma aresta de 10 cm, de maneira a enchê-lo completamente?

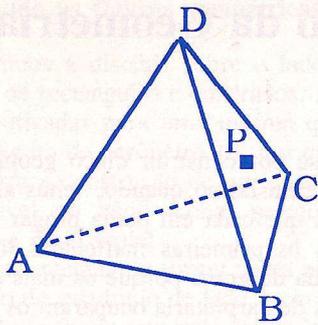
Faz um pequeno desenho explicando a tua resposta.

b) E se a aresta dos cubos mais pequenos medisse $\frac{1}{4}$ da aresta do cubo maior, quantos cubos pequenos se poderiam encaixar no maior? Explica a tua resposta.

Repara na figura seguinte, que representa um tetraedro regular cuja aresta mede 5 cm.

B)

O ponto P é o centro do triângulo BCD.



Responde agora às seguintes perguntas:

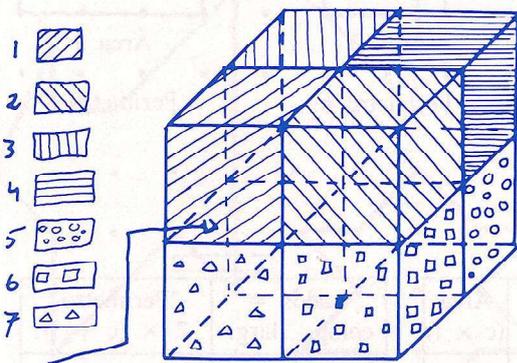
a) Uma aranha desloca-se sobre o tetraedro. Se a aranha está no ponto A e quer apanhar uma mosca que está no ponto P, qual é o caminho mais curto? Explica a tua resposta. Quantas soluções existem para a aranha?

b) Desenha uma planificação deste tetraedro (5 cm de aresta) numa folha de desenho e traça o tal caminho mais curto. Mede com uma régua a distância em milímetros a que está a aranha da mosca.

Comentários:

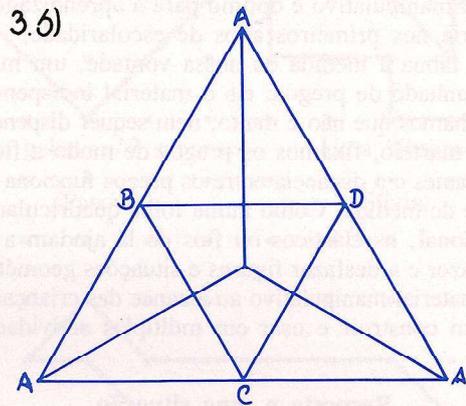
Quanto ao problema A), grande número de alunos não só responderam acertadamente às questões a) e b) como nas suas justificações fizeram esboços interessantes em perspectiva, utilizando métodos sequenciais de numeração e processos claros e sistemáticos para responder à alínea b). Apenas um exemplo que dispensa mais comentários:

a) Poderiam-se encaixar 8 cubos com 5 cm cada aresta dentro de um cubo com 10 cm cada aresta.



PS: O cubo nº 8 encontra-se tapado por os outros, daí ao facto de não se ver.

Quanto à questão B), alguns alunos foram capazes de escolher a planificação que facilitava mais a sua resposta, enquanto outros, embora não escolhendo a melhor planificação, conseguiram mesmo assim, mediante uma correcta identificação dos pontos da planificação que correspondem ao mesmo ponto no sólido, chegar ao resultado correcto. Seguem-se exemplos de um e de outro caso:



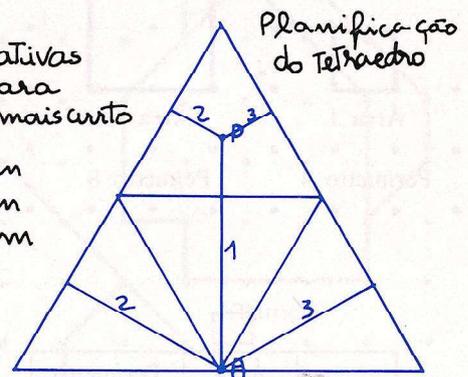
Eu tracei os 3 caminhos possíveis que a aranha podia fazer, traçando desta maneira. Há 3 pontos que estão marcados pela letra A, porque são todos o mesmo vértice. Traçando assim, os caminhos já não estão sujeitos a ficarem separados, quando se faz a planificação e as arestas ficam separadas. Desta maneira, já se pode medir do certo os caminhos traçados.

Os três caminhos medem 58 milímetros.

3 b)

3 alternativas possíveis para caminho mais curto

- 1 - 5,85 cm
- 2 - 5,85 cm
- 3 - 5,85 cm



Estes foram os materiais e a utilização que lhes foi dada em Geometria, no 7.º ano. Os mesmos alunos, no início deste ano lectivo, agora já no 8.º ano, utilizaram espelhos e desenhos do Escher no estudo das transformações geométricas. Mas isso fica para outra vez...