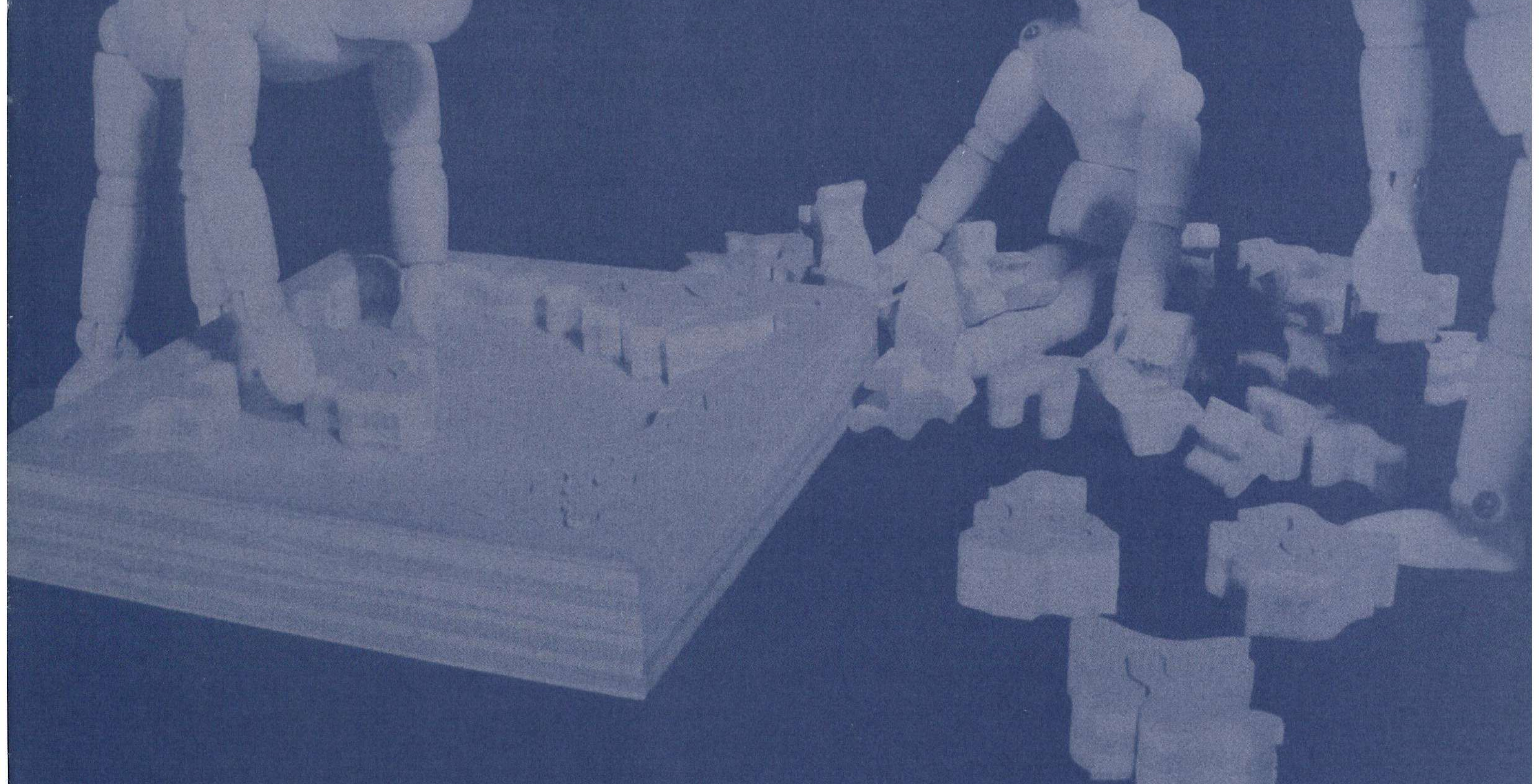
As peripécias de três resolvedoras de um problema

Cláudia Carvalho   Cristina Leiria   Guida Dias



No decorrer de uma das aulas de *Complementos de Didáctica da Matemática II*, o professor referiu o problema dos triângulos coloridos proposto na Revista *Educação e Matemática* (ver figura 1), número 105, e sugeriu a sua resolução. O problema apresenta um enunciado simples e apelativo, o que logo nos despertou interesse. Após algumas tentativas e muitos cálculos, conseguimos a primeira demonstração que considerámos «pouco elegante». Tentámos então obter uma outra, por outro caminho, e acabámos com três demonstrações do problema que recorrem a tópicos distintos da Matemática.

Neste texto pretendemos partilhar uma reflexão sobre as peripécias vividas no decorrer da resolução deste problema. Apresentamos novamente o enunciado do problema (Figura 1), os pontos-chave de cada demonstração que encontrámos, o que passámos para as obter e, também, o que sentimos quando as obtivemos (ou não!).

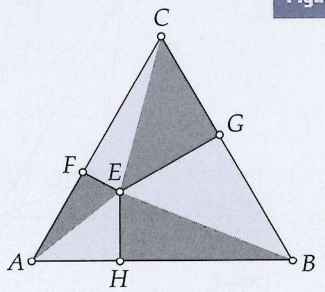
Triângulos Coloridos

O professor disse aos alunos para desenharem um triângulo equilátero $[ABC]$ e para escolherem um ponto qualquer E no seu interior. Depois pediu-lhes que unissem esse ponto com cada um dos vértices e que, também a partir de E, traçassem os segmentos perpendiculares a cada um dos lados do triângulo.

O triângulo inicial ficou assim dividido em seis triângulos mais pequenos que foram depois pintados alternadamente de vermelho e de amarelo.

A Catarina garante que a área total dos triângulos vermelhos é igual à dos amarelos mas a Diana afirma que isso vai depender da posição do ponto E. Quem tem razão?

Figura 1



A primeira reacção perante este problema foi verificar qual das duas amigas tinha razão recorrendo a programas de Geometria Dinâmica (GSP/Geogebra). Movendo o ponto *E*, ganhámos a convicção de que a Catarina tinha razão, isto é, que a área total dos triângulos azuis é igual à área total dos triângulos brancos, independentemente da posição que o ponto E ocupa no interior do triângulo.

Sabíamos que as ferramentas usadas, com recurso ao arrastamento de um ponto, não nos permitem a generalização pretendida, apenas nos possibilitam fazer conjecturas. Pois, tal como afirma Eduardo Veloso (p. 65), «na verdade, nada é contínuo nos computadores, tudo é discreto. Por maior que seja a resolução de um ecrã, trata-se sempre de uma grelha $m \times n$, com m e n finitos. Assim o ponto *P*, por arrastamento, passa apenas por um número finito de posições».

Após a primeira abordagem ao problema, partimos para a demonstração da igualdade verificada (e conjecturada) de modo a que não restassem dúvidas quanto à sua validade. A esse respeito, Davis e Hersh (p. 149) referem que «a demonstração traz consigo a respeitabilidade. A demonstração é a garantia de autoridade.»

Tentámos diferentes caminhos, desde o teorema de Heron, conceitos de geometria plana e o recurso à geometria analítica. O enunciado simples, e o facto de não termos uma resolução imediata, despertou-nos a curiosidade e aumentou-nos a vontade de o resolver, tendo então sido encarado por nós como um forte desafio matemático.

Andámos com alguma frequência em círculos e por atalhos que não levavam ao fim desejado ou conduziam à relação $\text{Área}_{\text{amarela}} + \text{Área}_{\text{vermelha}} = \text{Área}_{\text{triângulo } [ABC]}$, sem, no entanto, provar o que se pretendia, isto é, que $\text{Área}_{\text{amarela}} = \text{Área}_{\text{vermelha}}$.

Nas tentativas de resolução, foi possível estabelecer várias relações, algumas muito curiosas, como, por exemplo (figura 2):

— $h_1 + h_2 + h_3$ é igual à altura do triângulo $[ABC]$;

— $h_1 + h_2 + h_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}l$

— $a + b + c = \dfrac{3}{2}la$

(sendo l a medida do comprimento do lado do triângulo $[ABC]$)

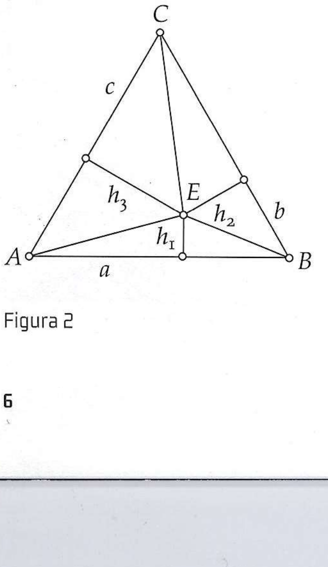


Figura 2

Depois de algumas tentativas, o recurso à geometria analítica possibilitou obter a primeira demonstração (Demonstração 1). Esta exigiu muitos cálculos, tornando-se trabalhosa e de aspecto «pouco estético». Percorremos os passos que Polya define para a resolução de um problema: compreendemos bem o enunciado, elaborámos um plano de resolução, executámos o plano, perdendo-nos por vezes em atalhos que não nos levaram a lado nenhum, verificámos cuidadosamente cada passagem feita e, depois de obtida a demonstração, reflectimos sobre todo o percurso percorrido e concluímos que, apesar de termos chegado à solução, não sentíamos, como esperávamos, a sensação de um trabalho (bem) feito, de um trabalho concluído. Foi uma sensação contraditória: estávamos satisfeitas porque a demonstração implicou cálculos que tiveram de ser feitos muito concentradamente, sem sabermos se seriam profícuos ou não, e, depois das simplificações feitas, foi com grande prazer que vimos estabelecida a igualdade pretendida. No entanto, intuitivamente, e como resultado de muitos anos de actividade matemática, sabíamos que era possível obter uma demonstração mais simples, com menos cálculos, esteticamente mais interessante.

Segundo Henry Poincaré (citado na Brochura de Didáctica, p. 38) «a lógica, que é a única que nos pode fornecer a certeza, é o instrumento da demonstração; a intuição é o instrumento da invenção. Assim, a lógica e a intuição têm, cada uma delas, o seu papel. Ambas são indispensáveis.» Por isso, agarradas à intuição que nos impedia de dar o problema por resolvido, considerámos que o desafio se mantinha e partimos novamente à descoberta. Nas nossas reflexões, concluímos que este processo é um pouco o reflexo de como sentimos a Matemática — como fonte de incertezas mas também de conhecimento e de prazer — e a resolução de problemas — como uma actividade humana que decorre de um diálogo entre pessoas que os tentam resolver.

Seguindo um outro caminho chegámos à segunda demonstração (Demonstração 2). O recurso à trigonometria possibilitou encontrar uma relação entre a, h_1 e h_3 e, de modo análogo, escrever uma relação entre b, h_2 e h_1 e outra entre c, h_3 e h_2. Esta demonstração compensou o envolvimento e o entusiasmo depositados neste problema pelo prazer de criar Matemática, conseguindo uma solução que nos deixou satisfeitas — usámos um artifício novo para nós e a sua descoberta encheu-nos de confiança.

Enquanto explorávamos possíveis resoluções, contagiámos alguns amigos que também se envolveram na procura de uma solução mais simples. Um deles apresentou uma demonstração geométrica, sem palavras, e de uma enorme simplicidade. Para nós «a mais bonita». Esta última demonstração encerra em si «a ideia luminosa», o «clic» a que aspirávamos quando insistimos na procura de uma outra solução «mais bela». Como refere Poincaré, muitas das descobertas matemáticas resultam de flashes após um período de tempo de reflexão sobre determinado assunto. «Muitas vezes, quando se trabalha num problema difícil, não se consegue nada da primeira vez que se inicia a tarefa. Mais tarde, depois de um descanso mais ou menos longo, sentamo-nos de novo à mesa e, durante a primeira meia hora, continuamos sem encontrar nada. Depois, de repente, a ideia decisiva surge perante a mente ...» (Poincaré, 1996, p. 10). Neste caso, a ideia consiste em traçar as rectas paralelas a cada um dos lados do triângulo equilátero passando no ponto *E*

(Demonstração 3). Essas rectas dividem o triângulo equilátero em triângulos equivalentes dois a dois. Constata-se a seguir que, considerando um triângulo qualquer na «parte amarela», há um triângulo equivalente ao considerado na «parte vermelha» e, deste modo simples, prova-se que $\text{Área}_{\text{branca}} = \text{Área}_{\text{azul}}$. Mais uma vez, sentimo-nos invadidas por um misto de sentimentos: felizes por podermos admirar esta demonstração que se nos afigurava como uma obra de génio mas, também, um pouco decepcionadas por não termos sido nós a ter a ideia.

No que respeita à resolução de problemas revemo-nos em Pólya quando diz que «Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução.» (p. 14). À medida que se vão resolvendo problemas, vai-se interiorizando que os problemas matemáticos estão relacionados uns com os outros e com conhecimentos adquiridos anteriormente, onde a resolução pode proporcionar satisfação e a sua exploração não se esgota ao chegar à solução. Quando se revê o processo de resolução podem imaginar-se diversas situações: i) é possível usar o processo adoptado, ou ii) o resultado obtido, ou, iii) a partir do problema dado criar um novo problema alterando, por exemplo, as condições iniciais (o que se verificará se o ponto E não pertencer ao interior do triângulo?). Assim, a procura de solução para um problema nunca fica completamente acabada.

Concordamos que só insistindo na resolução de problemas se ganha confiança e se desenvolve a capacidade de os resolver, reforçando-se, assim, o desejo de o continuar a fazer.

Demonstrações

Apresentamos as 3 demonstrações referidas.

1) Demonstração 1

Relativamente à figura ao lado tem-se,

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{l} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}l;\ \text{Área} = \frac{l \times h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}l$$

$$A = (0,0);\ B = (l,0);\ C = \left(\frac{l}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}l\right);\ I = (\alpha,\beta)$$

(1) Q ponto que pertence a $[AB]$ e à recta perpendicular a $[AB]$ que passa pelo ponto Q tem coordenadas $(\alpha, 0)$

(2) P pertence a $[AC]$ e à recta r perpendicular a $[AC]$ que passa em I; AC é a recta de equação $y = \sqrt{3}x$ e r a recta de equação

$$y - \beta = -\frac{1}{3}(x - \alpha)$$

Se a abcissa de P for a, a respectiva ordenada é $\sqrt{3}a$. Substituindo na equação de r obtem-se:

$$\sqrt{3}a - \beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}(a - \alpha) \Leftrightarrow 2a = \sqrt{3}\beta + \alpha \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{4}\beta + \frac{\alpha}{4}$$

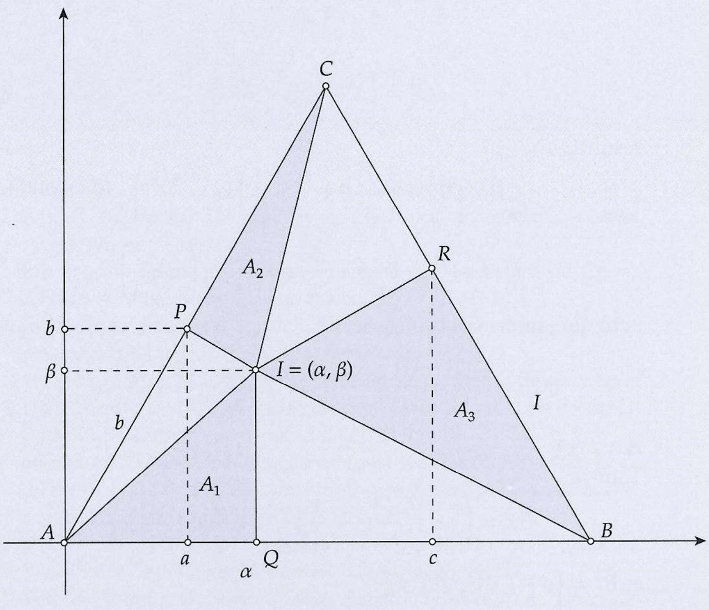
substituindo na equação da recta AB temos,

$$y = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\beta + \frac{\alpha}{4}\right)$$

ou seja,

$$P = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\beta + \frac{\alpha}{4}, \frac{3}{4}\beta + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha\right)$$

(3) R pertence à $[CB]$ e à recta s perpendicular a $[CB]$ que passa em I; a recta CB tem equação $y = -\sqrt{3}(x - l)$ e,



$$\overrightarrow{CB} = \left(\frac{l}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}l\right).$$

Por outro lado, a equação da recta s é

$$y - \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \alpha)$$

Se a abcissa de R for c, vem $y = -\sqrt{3}c + \sqrt{3}l$, substituindo na equação de s obtem-se:

$$-\sqrt{3}c + \sqrt{3}l - \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}(c - \alpha) \Leftrightarrow c = -\frac{\sqrt{3}}{4}\beta + \frac{3}{4}l + \frac{\alpha}{4}$$

substituindo na equação da recta CB obtem-se,

$$y = -\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\beta + \frac{3}{4} + \frac{\alpha}{4}\right) + \sqrt{3}l \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{4}l + \frac{3}{4}\beta - \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha$$

pelo que,

$$R = \left(\frac{3}{4}l + \frac{\alpha}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\beta, \frac{\sqrt{3}}{4}l - \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta\right)$$

Uma vez que através de $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \times \|\vec{y}\| \times \operatorname{sen}\theta$ se obtém a área do paralelogramo de «lados» $\vec{x}$ e $\vec{y}$, então, considerando o módulo do produto vectorial, a área do triângulo será

$$\frac{\|\vec{x} \times \vec{y}\|}{2}.$$

As áreas consideradas são então:

Área A1:

$$\|\overrightarrow{AQ} \times \overrightarrow{AI}\| = \alpha\beta$$

Área A2:
como

$$\overrightarrow{CP} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\beta + \frac{\alpha}{4}, \frac{3}{4}\beta + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha\right) - \left(\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\beta + \frac{\alpha}{4} - \frac{l}{2}, \frac{3}{4}\beta + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}l\right)$$

e,

$$\overrightarrow{CI} = \left(\alpha - \frac{l}{2}, \beta - \frac{\sqrt{3}}{2}l\right)$$

resulta,

$$\|\overrightarrow{CP} \times \overrightarrow{CI}\| = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\beta + \frac{\alpha}{4} - \frac{l}{2}\right)\left(\beta - \frac{\sqrt{3}}{2}l\right) -$$

$$-\left(\frac{3}{4}\beta + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}l\right)\left(\alpha - \frac{l}{2}\right)$$

pelo que, feitas as contas,

$$\|\overrightarrow{CP} \times \overrightarrow{CI}\| = \frac{\sqrt{3}}{4}\beta^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha^2 - \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\beta l}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha l$$

Área A3:
Tem-se

$$\overrightarrow{BR} = \left(-\frac{l}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\beta + \frac{\alpha}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}l + \frac{3}{4}\beta - \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha\right)$$

e, $\overrightarrow{BI} = (\alpha - l, \beta)$, pelo que:

$$\|\overrightarrow{BR} \times \overrightarrow{BI}\| = \left(-\frac{l}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\beta + \frac{\alpha}{4}\right)\beta - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}l + \frac{3}{4}\beta - \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha\right)(\alpha - l)$$

ou seja,

$$\|\overrightarrow{BR} \times \overrightarrow{BI}\| = -\frac{l\beta}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\beta^2 + \frac{\alpha\beta}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}l\alpha - \frac{3}{4}\beta\alpha -$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 + \frac{3}{4}\beta l - \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha l$$

Soma da área colorida é então dada por,

$$A1 + A2 + A3 = \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8}\beta^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}\alpha^2 - \frac{\alpha\beta}{4} - \frac{\beta l}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha l - \frac{l\beta}{8} -$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{8}\beta^2 + \frac{\alpha\beta}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}l\alpha - \frac{3}{8}\beta\alpha - \frac{\sqrt{3}}{8}\alpha^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}l^2 + \frac{3}{8}\beta l - \frac{\sqrt{3}}{8}\alpha l$$

ou seja,

$$A1 + A2 + A3 = \frac{\sqrt{3}}{8}l^2 - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

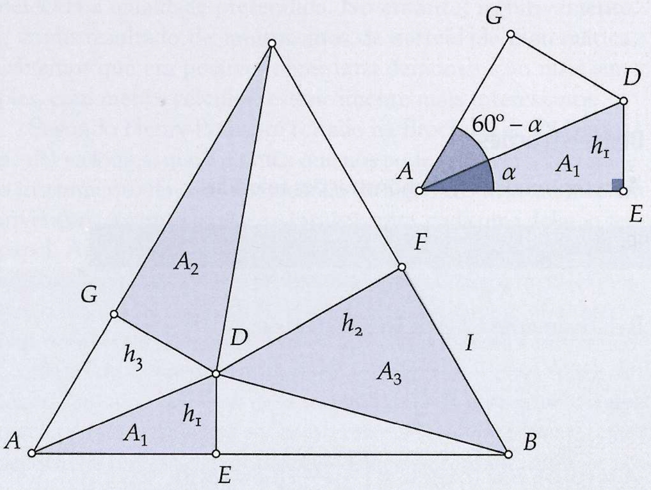
concluindo-se que,

$$A1 + A2 + A3 = \frac{1}{2}\text{Área}[ABC]$$

pelo que, as áreas coloridas e não coloridas do triângulo são iguais.

2) Demonstração 2

Considereos a figura abaixo,



O triângulo $\Delta[ABC]$ é equilátero de lado l. Tem-se ainda que, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = l$ e $A\hat{B}C = B\hat{C}A = C\hat{A}B = 60°$. Além disso,

Altura do $\Delta[ABC]$: $h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$

Área do $\Delta[ABC] = \frac{l}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$ ou $\frac{h}{2} \times \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$

Como

$$\Delta[ABC] = \frac{\overline{AC} \times h_3}{2} + \frac{\overline{AB} \times h_1}{2} + \frac{\overline{CB} \times h_2}{2} = \frac{h \times l}{2}$$

resulta que,

$$\frac{lh_3}{2} + \frac{lh_1}{2} + \frac{lh_2}{2} = \frac{h \times l}{2}$$

ou seja, $h_1 + h_2 + h_3 = h$. Por outro lado,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h_1}{\overline{AD}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(60° - \alpha) = \frac{h_3}{\overline{AD}} \qquad (1)$$

donde,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(60° - \alpha)} = \frac{h_1}{h_3}$$

Como $\operatorname{sen}(60° - \alpha) = \operatorname{sen} 60° \cos\alpha - \cos 60° \operatorname{sen}\alpha$ obtem-se

$$\text{sen}(60^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\text{sen}\,\alpha$$

De (1) vem

$$h_3\,\text{sen}\,\alpha = \frac{h_1}{2}(\sqrt{3}\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha)$$

$$\Leftrightarrow h_3\,\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}h_1\cos\alpha - \frac{h_1}{2}\,\text{sen}\,\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(h_3 + \frac{h_1}{2}\right)\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}h_1\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}h_1}{h_3 + \frac{h_1}{2}} = \frac{\sqrt{3}h_1}{2h_3 + h_1}$$

Sendo

$$\overline{AE} = h_1\frac{2h_3 + h_1}{\sqrt{3}h_1} \text{ e } \text{tg}\,\alpha = \frac{h_1}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{h_1}{\text{tg}\,\alpha}, \text{ pelo que:}$$

$$\overline{AE} = \frac{2h_3 + h_1}{\sqrt{3}}$$

De modo análogo, obtém-se

$$\overline{CG} = \frac{2h_2 + h_3}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \overline{FB} = \frac{2h_1 + h_3}{\sqrt{3}}$$

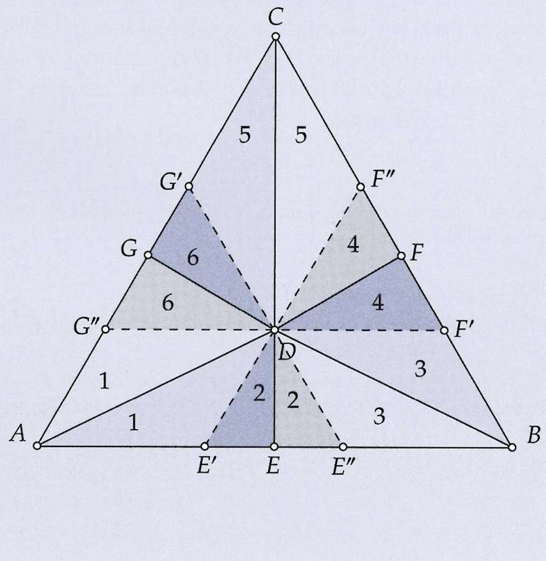
Então

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{2}\frac{2h_3 + h_1}{\sqrt{3}}h_1 + \frac{1}{2}\frac{2h_1 + h_2}{\sqrt{3}}h_2 + \frac{1}{2}\frac{2h_2 + h_3}{\sqrt{3}}h_3$$

$$= \frac{(h_1 + h_2 + h_3)^2}{2\sqrt{3}} = \frac{h^2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\frac{h^2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\text{Área}\,\Delta[ABC]$$

3) Demonstração 3

Relativamente à figura abaixo,



Observa-se que:

Área $\Delta[ADE']$ = Área $\Delta[ADG'']$
Área $\Delta[DE'E]$ = Área $\Delta[DEE'']$
Área $\Delta[BDF']$ = Área $\Delta[BDE'']$
Área $\Delta[DFF']$ = Área $\Delta[DFF'']$
Área $\Delta[CDG']$ = Área $\Delta[CDF'']$
Área $\Delta[DGG']$ = Área $\Delta[DGG'']$

Assim

Área $\Delta[ADE]$ + Área $\Delta[BDF]$ + Área $\Delta[CDG]$ =
= Área $\Delta[ADE']$ + Área $\Delta[DEE']$ + Área $\Delta[BDF']$+
+Área $\Delta[DFF']$ + Área $\Delta[CDG']$ + Área $\Delta[DGG']$

Área $\Delta[BDE]$ + Área $\Delta[CDF]$ + Área $\Delta[ADG]$ =
= Área $\Delta[BDE'']$ + Área $\Delta[DEE'']$ + Área $\Delta[BDF'']$+
+Área $\Delta[DFF'']$ + Área $\Delta[ADF'']$ + Área $\Delta[DGG'']$

Bibliografia

Davis, P. & Hersh, R. (1995). A *experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática do Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação, DES.

Pereira, M. (2004). *As Investigações Matemáticas no Ensino-Aprendizagem das Sucessões — Uma experiência com alunos do 11.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado. Covilhã: UBI.

Poincaré, H. (1996). A Invenção Matemática. Em P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para Aprender Matemática* (pp. 7–14). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ponte, J.P., Boavida, A. M., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica — Ensino Secundário*. Ministério da Educação, DES.

Veloso, E. (1998). *Geometria Temas Actuais*. Ministério da Educação e IIE.

http://labvirtual.eq.uc.pt

http://portal.uninove.br

http://profesores.sanvalero.net

Cláudia Carvalho

Escola Básica Integrada João Roiz, Castelo Branco

Cristina Leiria

Escola Secundária Campos Melo, Covilhã

Guida Dias

Escola Secundária Campos Melo, Covilhã