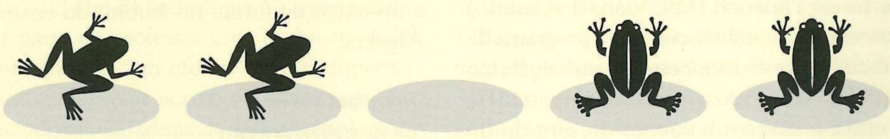
A Álgebra «dos» sapos

Ana Caseiro

Quando procurava uma tarefa de álgebra para colocar aos meus alunos da formação inicial de professores lembrei-me de uma que já tinha realizado com alunos de 1.º ciclo e que poderia ser também realizada por estes alunos. A tarefa consistia em descobrir qual o menor número de movimentos necessários para trocar as posições de dois sapos e duas rãs entre si:

Dois sapos e duas rãs precisam atravessar um lago e têm cinco pedrinhas para não ter de mergulhar na água fria.

Podem avançar para a pedra seguinte (que tem de estar vaga) ou saltar por cima de um animal de outro género, nunca podendo voltar para trás.



Aos alunos da formação inicial foi acrescentada uma questão que consistia na descoberta de uma expressão geral de modo a chegar a descobrir o menor número de movimentos possível, independentemente do número de sapos e rãs, sendo que primeiro foi solicitado que fizessem a investigação com número igual de sapos e rãs, e posteriormente foi alargada para qualquer número de sapos e qualquer número de rãs, devendo os alunos chegar a uma expressão geral, como eles referiram «a uma fórmula das fórmulas».

Par	Apresentação das sequências		Generalização consoante a diferença entre o número de sapos e o número de rãs				
	Correctas	Incorrectas	Diferença de 0	Diferença de 1	Diferença de 2	Diferença de 3	Diferença de *k*
1			✓	✓	✓	✓	×
2	✓		✓	✓			
3			✓	✓	✓		
4	✓		✓	✓	✓		
5			✓	✓			
6			✓	✓			
7	✓		✓	✓			
8			✓	✓	✓	✓	✓
9	✓	✓	✓				
10	✓		×	✓			
11	✓		✓	✓	✓		✓
12	✓		✓	✓			
13	✓		✓	✓			
14			✓	✓			
15	✓		✓	✓			

Tabela 1. Avaliação das descobertas dos alunos

Nº de animais de cada lado	Nº mínimo de movimentos
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35
6	48
7	63

Tabela 2. Número mínimo de movimentos

No 1º ciclo a tarefa foi realizada por alunos do 3º ano de escolaridade, sendo que desde o início se mostrou uma tarefa motivante para eles. A proposta foi feita para ser realizada a pares de modo a se conseguirem ajudar, tendo sido a comunicação fulcral nesta resolução.

Os alunos resolveram a tarefa recorrendo a material manipulável, tendo simulado os sapos e rãs, assim como as pedrinhas, o que facilitou a sua compreensão e a resolução da mesma. A competição «saudável» também foi um factor importante na resolução desta tarefa onde cada par tentava resolvê-la utilizando menos movimentos do que os restantes colegas.

Quanto à formação inicial, a tarefa foi realizada numa turma do 3º ano (32 alunos) da licenciatura em Educação Básica, aquando das últimas aulas da Unidade Curricular (UC) de «Lógica e Padrões», uma UC de 28 horas. Os alunos tiveram uma aula (duas horas) para resolver a tarefa a pares (dois grupos foram constituídos por 3 elementos), sendo que no final da aula a teriam de entregar para eu ver até onde conseguiram chegar na sua investigação.

Depois de analisar as respostas dos alunos, preenchi a tabela 1, onde os vistos (✓) representam respostas correctas dadas pelos alunos, as cruzes (×) respostas erradas dadas pelos alunos, e os espaços em branco a falta de respostas dadas pelos alunos.

Através da análise da tabela verifica-se que apenas três pares conseguiram concluir a tarefa, sendo que apenas dois a concluíram acertadamente. Verifica-se, também, que a maioria dos grupos apenas conseguiu chegar à generalização nas situações em que o número de sapos e de rãs é igual, e nas situações em que o número de sapos e de rãs difere apenas num valor.

Na discussão da primeira questão da tarefa, igual número de animais de cada lado do lago, foi explorado um processo mais formal de generalização (tabela 2).

Com os valores obtidos foi possível calcular as diferenças entre os mesmos, tendo chegado à seguinte conclusão utilizando o método das diferenças finitas:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 3 & & 8 & & 15 & & 24 & & 35 & & 48 & & 63 \\ & 5 & & 7 & & 9 & & 11 & & 13 & & 15 & \\ & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & \end{array}$$

Através da análise deste esquema apercebemo-nos que a segunda diferença entre os diversos números mínimos de movimentos é sempre constante: 2.

Pegando, então, na fórmula das diferenças finitas, temos que:

$$\begin{array}{ccc} \text{Termos} & 1^{\text{a}} \text{ diferença} & 2^{\text{a}} \text{ diferença} \\ \left\{ \begin{array}{l} a+b+c \\ 4a+2b+c \\ 9a+3b+c \end{array} \right. & \begin{array}{c} 3a+b \\ 5a+b \end{array} & 2a \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} an^2 + bn + c \\ a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \end{array}}$$

Assim sendo aplicando a fórmula anterior aos nossos valores temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a = 2 \\ 3a + b = 5 \\ a + b + c = 3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} n^2 + 2n = n(n+2) \\ n \text{ — número de animais de cada lado} \end{array}}$$

Nº de animais de cada lado	Nº mínimo de movimentos
1 - 2	5
2 - 3	11
3 - 4	19
4 - 5	29
5 - 6	41
6 - 7	55
7 - 8	71

Tabela 3. Número mínimo de movimentos

Nº de animais de cada lado	Nº mínimo de movimentos
1 - 3	7
2 - 4	14
3 - 5	23
4 - 6	34
5 - 7	47

Tabela 4. Número mínimo de movimentos

Nº de animais de cada lado	Nº mínimo de movimentos
1 - 4	9
2 - 5	17
3 - 6	27
4 - 7	39
5 - 8	53

Tabela 5. Número mínimo de movimentos

Aquando do seguimento da tarefa (número diferente de sapos e rãs) surgiu o seguinte processo de resolução (tabela 3).

Ao olharmos para estes valores calculámos as diferenças entre os mesmos, tendo chegado à seguinte conclusão:

5 11 19 29 41 55 71

6 8 10 12 14 16

2 2 2 2 2

Através da análise deste esquema apercebemo-nos que a segunda diferença entre os diversos números mínimos de movimentos é sempre constante: 2.

Utilizando, novamente, a fórmula das diferenças finitas, quando a segunda diferença é constante temos que:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 3a + b = 6 \\ a + b + c = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

$n^2 + 3n + 1$

n — número de animais do lado onde há menos

De seguida resolvemos realizar da mesma forma a actividade, mas com a variante da diferença entre o número de animais dos dois lados ir aumentando.

Começámos por realizar as actividades por tentativas, construindo desse modo as seguintes tabelas e chegando às respectivas expressões gerais através do método das diferenças finitas:

1. Diferença entre o número de animais dos dois lados: 2 (tabela 4). Assim, temos que:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 3a + b = 7 \\ a + b + c = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

$n^2 + 4n + 2$

n — número de animais do lado onde há menos

2. Diferença entre o número de animais dos dois lados: 3 (tabela 5). Assim, temos que:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 3a + b = 8 \\ a + b + c = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 3 \end{cases}$$

$n^2 + 5n + 3$

n — número de animais do lado onde há menos

Ao analisarmos as expressões gerais obtidas verificamos que existem algumas semelhanças entre as mesmas, o que talvez possibilite a construção de uma expressão geral para determinar as expressões gerais do número mínimo de movimentos a realizar:

$n^2 + 2n$	$n^2 + 3n + 1$
Igual número de animais nos dois lados	Diferença entre o número de animais nos dois lados: 1
$n^2 + 4n + 2$	$n^2 + 5n + 3$
Diferença entre o número de animais nos dois lados: 2	Diferença entre o número de animais nos dois lados: 3

Através da visualização pormenorizada das expressões gerais obtidas verificamos que:

- Todas as fórmulas se iniciam por n^2 (tal facto tem razão de ser, já que na descoberta das expressões verificámos que é sempre a segunda diferença entre os valores obtidos que é constante, sendo sempre 2.
- O valor que é multiplicado por «n» representa a diferença entre o número de sapos dos dois lados somada a 2 (ex.: quando a diferença entre o número de sapos é 1 vai ser $1 + 2$ ou seja 3, tal como se verifica na expressão).
- O valor que se vai somar à expressão que estamos a obter é sempre o valor da diferença entre o número de sapos dos

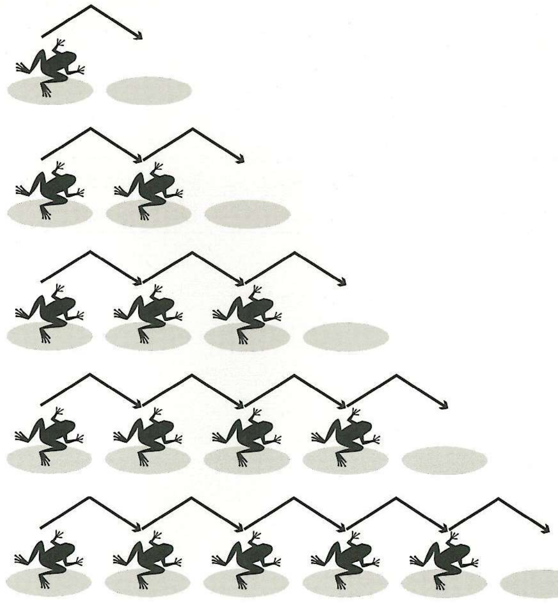


Figura 1

dois lados (ex.: quando a diferença entre o número de sapos é 2 vai ser 2, tal como se verifica na expressão).

Assim, podemos representar as conjecturas retiradas anteriormente do seguinte modo:

$$n^2(k+2)n+k$$

sendo k o valor da diferença entre o número de animais dos dois lados e n o número do lado com menor quantidade

De seguida, e para verificar se a expressão encontrada funciona em mais algumas situações, vou realizar o mesmo raciocínio (ir acrescentando sapos), mas somente a um dos lados, pois vou considerar o outro sem sapos (figura 1).

Nº de animais de cada lado	Nº mínimo de movimentos
0 - 1	1
0 - 2	2
0 - 3	3
0 - 4	4
0 - 5	5

Aplicando a expressão:

$$n^2(k+2)n+k$$

sendo k o valor da diferença entre o número de animais dos dois lados e n o número do lado com menor quantidade

Para 0 – 1 sapo:

$$0^2+(1+2)\times 0+1=0+0+1=1$$

Para 0 – 2 sapos:

$$0^2+(2+2)\times 0+2=0+0+2=2$$

Para 0 – 3 sapos:

$$0^2+(3+2)\times 0+3=0+0+3=3$$

Para 0 – 4 sapos:

$$0^2+(4+2)\times 0+4=0+0+4=4$$

Para 0 – 5 sapos:

$$0^2+(5+2)\times 0+5=0+0+5=5$$

Assim, podemos verificar que também nestes casos a expressão encontrada para determinar as expressões gerais do número mínimo de movimentos a realizar se encontra correcta.

Deste modo é possível conjecturar que a expressão obtida é válida para qualquer número de animais a deslocar.

Ana Caseiro
Escola Superior de Educação de Lisboa