José Paulo Viana

Um número de restos

– Repara neste número tão curioso – disse a Eva para a Francisca. – É formado por cinco algarismos ABCDE e tem as seguintes propriedades:
A é o resto da sua divisão por 6,
B é o resto da sua divisão por 5,
C é o resto da sua divisão por 4,
D é o resto da sua divisão por 3,
E é o resto da sua divisão por 2.
No dia seguinte, a Francisca foi ter com a Eva:
– Olha, descobri outro número com as mesmas características.
Será verdade?

(Respostas até 30 de Setembro para zepaulo@armail.pt)

A COLECÇÃO DE SELOS

O problema proposto no número 111 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:
Fui visitar o Hugo, que me mostrou logo a sua bela colecção de selos. Admirado, perguntei-lhe:
– *Quantos selos tens tu?*
– *Olha, só te posso dizer que é o menor número que é o dobro de um quadrado e o triplo de um cubo.*
Quantos selos tem o Hugo?

Recebemos 18 respostas: Afonso Garcia (Torres Novas), Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Armando Fernandes (Aveiro), Carlos Dinis (Torres Novas), Catarina Ferreira (Lamego), Edgar Martins (Queluz), Ema Modesto & João Pineda, Eva Mendes (Torres Novas), Florinda Costa (Lisboa), Francisca Canais (Torres Novas), Francisco Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Helena Cunha (Viseu), João Sá, Mária e António Almeida, Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Rute Subtil (Torres Novas).

Cerca de metade das resoluções usaram a folha de cálculo para encontrar a solução. Eis como a Ema e o João fizeram:
Seja n o número de selos do Hugo.
Sabe-se que n é do tipo $2x^2$ e que também se pode escrever na forma $3y^3$.
Sendo assim, na folha de cálculo fazemos uma coluna com os valores de $2x^2$ e outra com os de $3y^3$. Procuramos o primeiro número que apareça nas duas colunas, obtendo 648 como o número de selos do Hugo.
As restantes resoluções seguiram processos analíticos e alguma dedução. Vale a pena ver os três exemplos seguintes.

Alberto Canelas: O zero não será solução do problema, pois nesse caso não haveria colecção de selos. É evidente que o número pedido terá de ter os factores 2 e 3, quando decomposto em factores primos. Para o número ser o dobro de um quadrado e o triplo de um cubo o factor 2 terá como expoente um múltiplo de três que seja um múltiplo de dois mais um e o factor 3 terá como expoente um múltiplo de dois que seja um múltiplo de três mais um. O número mais baixo nessas condições é:
$2^3 \times 3^4 = 2 \times (2^2 \times 3^4) = 2 \times 18^2 = 3 \times (2^3 \times 3^3) = 3 \times 6^3 = 648$

Edgar Martins: Se $2x^2 = 3y^3$, a decomposição em factores primos de $2x^2$ e $3y^3$ têm de ser iguais. Como procuramos a solução mínima e o primeiro membro já tem um 2 e o segundo um 3 vamos tentar chegar a uma solução apenas com estes dois, não acrescentando mais qualquer primo à solução.
O 2 do segundo membro tem de vir da decomposição em factores de y. Como y está ao cubo e x ao quadrado, basta que x e y tenham um 2 na sua decomposição para ficarmos com três números 2 de cada lado.
Com o 3 já vamos ter um pouco mais de trabalho. Se x tiver apenas um 3, como x está ao quadrado, ficavam dois no primeiro membro e apenas um no segundo. Como y está ao cubo não dá para «acertar». Se x tiver dois números 3 na sua decomposição o primeiro membro fica com quatro e se y tiver mais um, como está ao cubo, o segundo membro também fica com quatro.
$2(2\times3^2)^2 = 3(2\times3)^3 = 648$

Francisco Branco:
$2x^2 = 3y^3$
$x = y \times \sqrt{3y/2}$
Logo, y tem de ser par e $3y/2$ quadrado perfeito.
O menor valor possível para y é 6, ficando $x = 18$. Portanto:
$2 \times 18^2 = 3 \times 6^3 = 648$
Finalmente, o Edgar e o Alberto incluiram generalizações do problema que permitem encontrar todas as soluções e não apenas a menor.