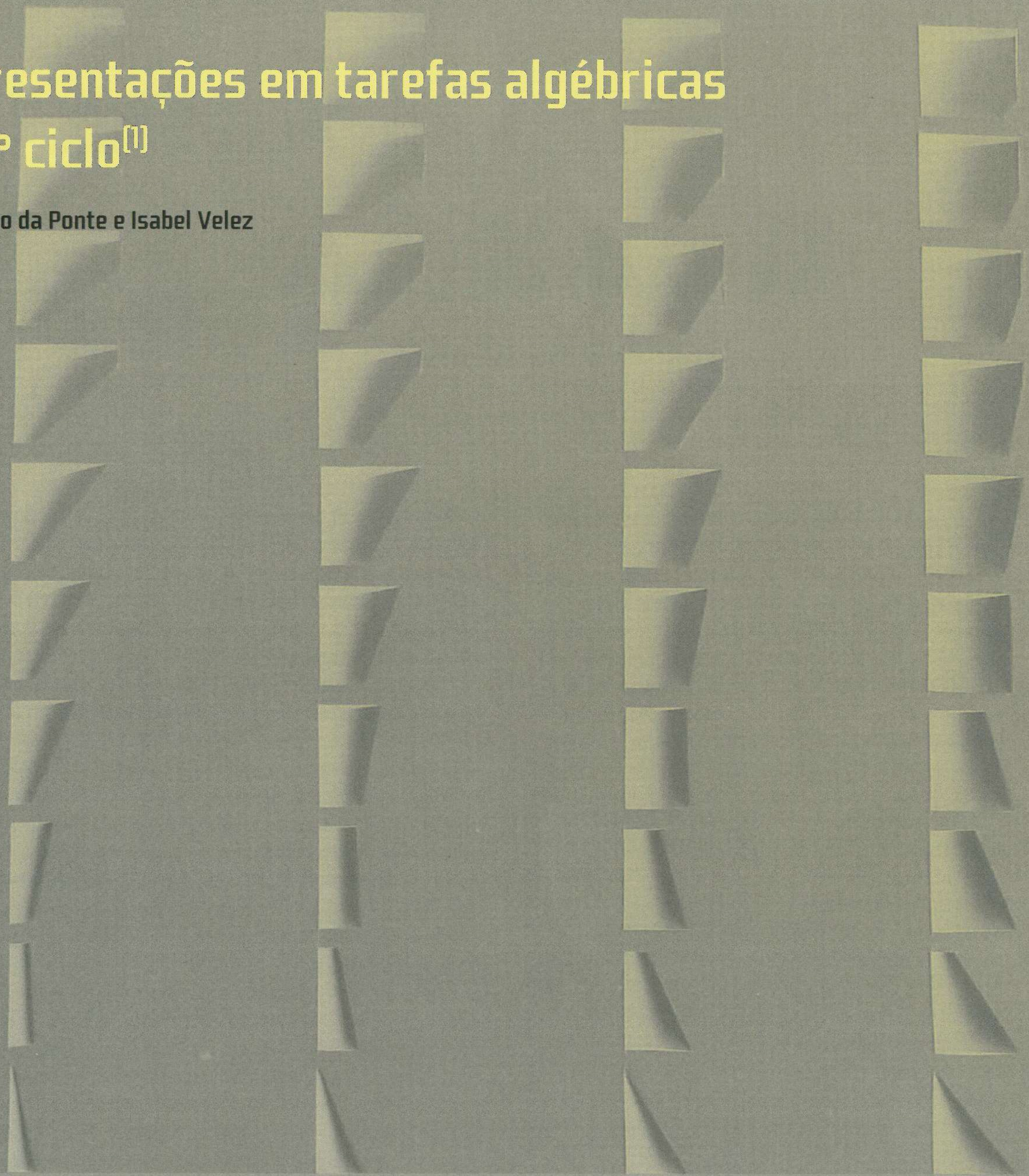
Representações em tarefas algébricas no 1.º ciclo[1]

João Pedro da Ponte e Isabel Velez



A realização de actividades visando promover o pensamento algébrico dos alunos do 1.º ciclo do ensino básico é um dos aspectos distintivos do actual programa de Matemática em Portugal (ME, 2007). Tarefas com sequências pictóricas e numéricas bem como problemas de contagem de combinações estão entre as situações que podem contribuir para desenvolver este tipo de pensamento. Na sua resolução assume um papel decisivo o modo como os alunos interpretam as representações indicadas nos enunciados e como geram e interpretam as suas próprias representações.

Por isso, uma grande atenção deve ser dada ao modo como os alunos lidam com diversas representações, sejam estas indicadas em tarefas propostas pelo professor ou geradas pelos próprios alunos. É isso que procuramos ilustrar neste artigo, recorrendo a exemplos de respostas dadas por alunos do 2.º ano a tarefas de índole algébrica.

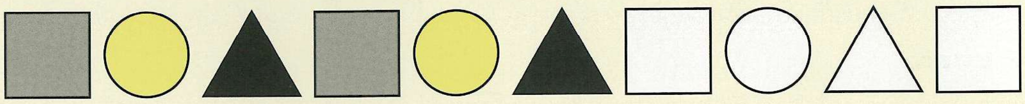
Representações matemáticas

Um dos autores que mais tem escrito sobre as representações matemáticas é Gerard Goldin. Num artigo recente, caracteriza uma representação como «uma configuração que representa algo, de alguma forma. Por exemplo, uma palavra pode representar um objecto real, um numeral pode representar o número de elementos num conjunto, ou a posição de um número numa recta numérica» (Goldin, 2008, p. 180).

Um outro autor com uma influência marcante no tema das representações é Jerome Bruner (1999), que fala em representações activas, icónicas e simbólicas:

> O que queremos dizer com representação? O que significa traduzir a experiência num modelo do mundo? A minha sugestão é que os seres humanos têm provavelmente três maneiras diferentes de realizarem esta proeza. A primeira

Tarefa 1 — Sequência com figuras geométricas



1. Descreve a sequência.
2. Quantos elementos tem a sequência inicial?
3. Completa a sequência.
4. Como será o 20.° elemento da sequência?
5. Em trinta elementos, quantas vezes aparecerá o 1.°/4.°?

> é através da acção. Conhecemos muitas coisas para as quais não há imagética nem palavras e é muito difícil ensiná-la através de palavras, diagramas ou imagens (...) Há um segundo sistema de representação que depende da organização visual ou outra organização sensória e do recurso a imagens de resumo (...) A primeira forma de representação veio a ser designada como *activa* e a segunda como *icónica* (...). Por fim, há a representação por palavras ou linguagem. O seu traço distintivo é ser *simbólica* por natureza (...) (pp. 27–29)

Deste modo, em Matemática, as representações são caracteres, símbolos, configurações pictóricas ou mesmo objectos que representam alguma ideia, objecto, ou relação matemática. A relação entre a representação e o objecto representado não é biunívoca. Assim, um dado objecto matemático pode ter, muitas vezes, diversas representações — por exemplo, o número natural dois pode ser representado por «2» (dígito), «II» (numeração romana), «10» (no sistema binário), «dois» (palavra da língua portuguesa), «two» (em inglês), «••» ou por qualquer conjunto de dois objectos. Além disso, uma dada representação pode remeter para diferentes objectos, consoante o contexto — pensemos, por exemplo, no sinal de =, que tanto pode representar uma equivalência como o resultado de uma operação[2]. Por isso, uma representação matemática não pode ser interpretada isoladamente, só fazendo sentido quando observada num contexto bem determinado, à luz de um sistema de representação, com regras e significados bem definidos. Só este enquadramento torna possível a comunicação matemática, com a utilização universal de representações comummente aceites e generalizadas.

Goldin (2008) salienta que estes sistemas de representação têm uma estrutura complexa e elaborada mas ao mesmo tempo aberta e em constante mudança, pois as regras e normas que definem um sistema de representação também permitem que através da «manipulação de símbolos, regras de álgebra ou cálculo já existentes nos seja possível obter novas fórmulas, ou transformar e resolver equações» (p. 182). As representações mais complexas não são compreensíveis a não ser relacionadas com outras representações mais simples, para as quais o indivíduo atribua um significado.

Este autor chama a atenção que é preciso distinguir dois tipos de representações: externas e internas. As representações externas têm existência física, seja em papel, seja num ecrã de computador, seja num outro suporte qualquer (símbolos que representam os números e suas operações, notação algébrica, símbolos da linguagem Logo, sistemas geométricos como a rectas numérica e os gráficos cartesianos, diagramas diversos e outros). Bishop e Goffree (1986), categorizam os vários tipos de representações externas que se podem encontrar nas aulas de Matemática em quatro grupos principais — *símbolos matemáticos*, *linguagem verbal*, *figuras* e *objectos* — e indicam que «cada um destes tipos tem o seu próprio vocabulário ou código que precisa ser apreendido de forma a compreender as ideias matemáticas expressas» (p. 34). As figuras, imagens, ícones, etc. dão origem ao que podemos designar por *representações pictóricas*.

Ainda há bem pouco tempo, só se trabalhava na escola com representações simbólicas, incluindo os símbolos para os dígitos, os sinais das operações +, –, ×, : e o sinal =. Mais recentemente, começou a perceber-se a importância de se valorizarem as representações informais, nomeadamente por figuras e objectos. Em Portugal, o modo como os alunos do 3.° ano trabalham com diferentes representações matemáticas foi estudado por Nuno Valério (2005) que evidencia a sua capacidade para gerarem representações próprias, ao procurarem dar sentido a um problema, e que constituem um importante suporte para a sua aprendizagem. Pelo seu lado, Paula Canavarro (2007) sublinha a importância tanto das representações matemáticas convencionais como das não convencionais como recurso para o raciocínio algébrico e para a expressão do pensamento por parte dos alunos do 1.° ciclo. Elisa Pinto (2009) refere que para além das representações simbólicas, os alunos utilizam frequentemente representações activas (usando materiais manipuláveis) e representações icónicas como ligação ao concreto, como base para uma representação simbólica e como suporte para o raciocínio matemático.

Enquanto as representações externas são fáceis de observar, o mesmo não se pode dizer das representações internas que cada indivíduo forma e usa de modo diferente. Surge então a questão relativa ao modo como decorre o processo cognitivo, como é que uma representação externa passa a ter uma representação interna associada no nosso pensamento. Goldin (2008) sublinha a dificuldade em analisar o processo através do qual

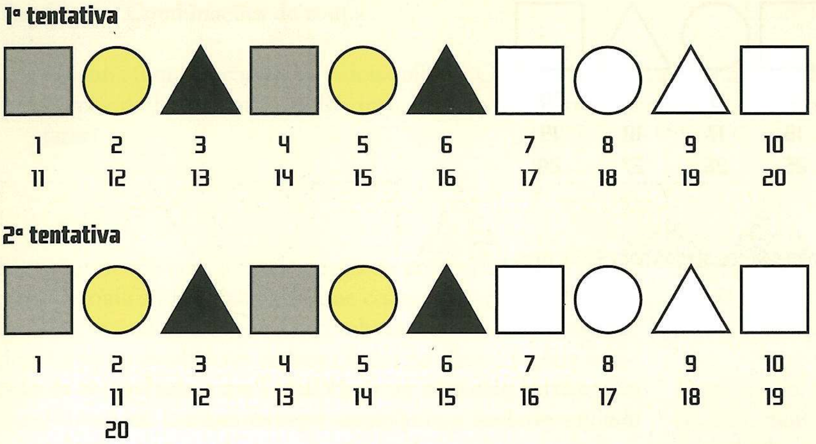


Figura 1. 1.ª e 2.ª tentativas de David (note-se que os numerais indicados na figura não são registados por escrito mas sim indicados oralmente pelo aluno).

as representações internas se formam em cada indivíduo, bem como em perceber como se caracterizam essas representações. Contudo, apesar de não se conseguir acompanhar directamente o processo de representação interna dos alunos, podemos fazer inferências sobre ele, baseando-nos na forma como trabalham com as representações externas nas interacções com os colegas, na sua participação nas actividades propostas e nos registos produzidos. Assim, quando um aluno usa os seus conhecimentos na construção de uma sequência, um gráfico, ou um diagrama, podemos procurar compreender o seu processo de pensamento e respectivas dificuldades. De igual modo, quando lhe pedirmos para explicar por palavras suas ou por uma outra representação uma definição ou procedimento, podemos tentar perceber como foram compreendidos os conceitos envolvidos.

A tarefa 1 é uma sequência repetitiva[3], onde existe uma unidade que se repete formada por três elementos (as imagens quadrado, círculo, triângulo). Os primeiros seis termos caracterizam-se pela sua forma e pela sua cor e os quatro termos que se seguem apenas pela sua forma. Envolvendo uma sequência pictórica repetitiva de fácil apreensão, esta tarefa pode parecer muito simples. Na verdade, rapidamente podemos chegar a questões de assinalável complexidade, que só podem ser respondidas recorrendo a outros sistemas de representação para além da sequência pictórica dada.

Na realização desta tarefa, Bianca, uma aluna do 2.º ano, revela facilidade em utilizar correctamente as designações «triângulo», «círculo» e «quadrado» e mostra-se familiarizada com tarefas envolvendo sequências. Nas questões 1, 2 e 3 descreve a sequência, referindo as figuras que a compõem, diz que a sequência tem 6 elementos e pinta cada figura da 7.ª à 10.ª posição, de acordo com o padrão indicado.

No entanto, a partir da questão 4, a aluna mostra dificuldade em compreender as perguntas, obrigando a professora a formulá-las de forma diferente. Uma das suas dificuldades parece ter a ver com a terminologia dos ordinais, uma vez que não reconhece o termo «vigésimo». Nota-se que espontaneamente usa os termos ordinais até «sétimo», revertendo depois para termos cardinais:

Entrevistadora: Bianca, qual será o vigésimo elemento desta sequência?

Bianca fica em silêncio e aparenta estar confusa.

Entrevistadora: Se continuares esta sequência e se tivesses que fazer vinte, como achas que vai ser a vigésima pecinha?

Bianca continua em silêncio, morde o lábio e continua com um ar confuso.

Entrevistadora: Esta é a primeira, a segunda. A terceira... Continuando por aqui... Como será a vigésima? Podes fazer como quiseres... Não tens que adivinhar, podes fazer em papel.

Bianca continua em silêncio e está cada vez mais atrapalhada.

Entrevistadora: Estás a perceber o que te estou a pedir?

Bianca acena negativamente com a cabeça e encolhe os ombros.

Entrevistadora: Esta é a primeira pecinha, esta é a segunda, esta é a ...

Bianca (apontando para os elementos seguintes): ... Terceira, quarta, quinta, sexta, sétima, oito, nove, dez.

Entrevistadora: Se continuares a sequência, como será a peça número vinte?

Bianca renitente, simula que vai resolver a situação na folha, como que a pedir autorização para o fazer, e perante um aceno positivo, começa a desenhar no papel a sequência, enquanto conta baixinho até vinte. No vigésimo elemento, pára e aponta para um círculo amarelo.

Nesta sequência, Bianca identifica o padrão pictórico mas não consegue identificar um padrão numérico. Consegue raciocinar na representação pictórica e dizer qual vai ser o termo que se segue a um termo dado. Consegue mesmo identificar o 20.º termo. No entanto, não identifica uma sequência numérica associada a esta que lhe permita responder às questões envolvendo termos distantes e, para isso, necessita de completar a sequência, desenhando todos os elementos.

David, outro aluno do 2.º ano, revela também facilidade em utilizar correctamente as designações «triângulo», «círculo» e «quadrado» e estar familiarizado com o conceito de sequência. Apresenta mais facilidade em compreender o que lhe é pedido e sempre que tem dúvidas, não hesita em fazer perguntas. Para responder à questão 4, conta oralmente os elementos da sequência, indicando que são dez, volta ao primeiro e continua a contar oralmente, tal como mostra a Figura 1 (1.ª tentativa). No entanto, quando é questionado, pensa na sua solução e rapidamente a corrige:

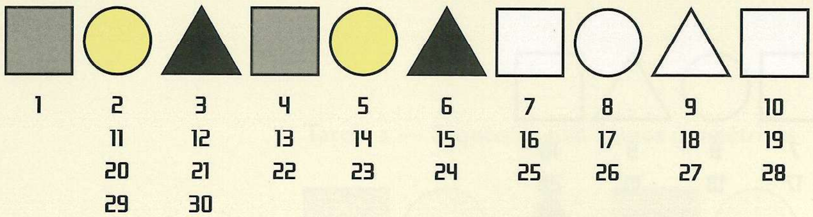


Figura 2. Generalização de David (novamente os numerais não são registados por escrito mas sim indicados oralmente pelo aluno).

David: Vinte! É um quadrado cinzento!
Entrevistadora: Não percebi...
David: Pois... É assim... Pus a sequência na minha cabeça e fiz dez mais dez.
Entrevistadora: Dez mais dez?!?
David: Sim... Dez mais dez é vinte...
Entrevistadora: Sim... E...?
David: Pus duas barras na minha cabeça e o vigésimo... Aaah... Elemento... É o quadrado cinzento!
Entrevistadora: Aaaahhh... Mas... Tenho uma dúvida... Isto é uma sequência, certo?
David: Certo.
Entrevistadora: Então... Mas... Quando voltas aqui ao primeiro elemento, não estragas a sequência... Ao repetires dois quadrados?
David: Ah pois é! Espera, deixa-me pensar... (demora cerca de cinco segundos a testar a sua nova solução)... Vinte! Afinal é o círculo amarelo!
Entrevistadora: Não estou a perceber...
David: Então... É assim... Como assim repetia o quadrado, dou um saltinho para a segunda e continuo... Percebeste? Assim... Queres ver? (exemplifica com o dedo, contando em voz alta, tal como indica a Figura 1).

Quando a seguir lhe é pedido para indicar o trigésimo elemento, David generaliza o padrão que descobriu e faz oralmente contagem, apontando com os dedos, tal como sugere a Figura 2.

Note-se que David não trabalha com uma unidade composta de 3 elementos mas sim com uma unidade composta de 9 elementos. No entanto, mostra ser capaz de estabelecer uma relação entre duas representações, a pictórica e a numérica, e com essa relação consegue responder com facilidade a diversas questões.

Deste modo, ambos os alunos mostram compreender o que são sequências e o respectivo sistema de representação, embora Bianca não conheça os números ordinais a partir de certa ordem. A aluna desenvolve todo o seu raciocínio a partir da representação dada, que usa para construir novos termos da sequência, ficando por isso limitada relativamente às questões que consegue responder. Pelo seu lado, David consegue estabelecer uma relação entre a sequência pictórica dada e uma nova sequência numérica que ele próprio produz oral e gestualmente e com a qual consegue responder a diversas questões sobre termos distantes.

A tarefa 2 é um problema de análise combinatória, enunciada em linguagem verbal, sem indicar qualquer representação matemática pictórica ou simbólica. Para a resolver, os alunos têm que produzir a sua própria representação.

Bianca mostra-se bastante à vontade, e a sua professora confirma que ela já realizou tarefas análogas desde a educação pré-escolar. Para responder à questão 1, começa por colocar as cinco peças de roupa numa só fila, primeiro as três camisolas (que pinta de cores diferentes — rosa, amarelo, verde) e depois os dois calções (que pinta de azul e laranja). De seguida, toma cada camisola como «âncora» e representa por baixo os dois calções, produzindo assim uma possível representação de todos os casos possíveis (figura 3). Faz tudo isto sem precisar de nenhuma ajuda.

Entrevistadora: O que estás a fazer?
Bianca: Aqui vou pôr a roupa toda, primeiro as camisolas e... Os calções. Já está!
Entrevistadora: Então mas estás a desenhar mais calções por baixo das camisolas...?
Bianca: Sim, porque, este é com este, este com este e este com este! (refere-se aos primeiros calções que associa sucessivamente a cada camisola) Agora faltam os outros calções! (refere-se aos segundos calções)

No entanto, a contagem do número de combinações revela-se um problema complicado. Bianca deixa de ter em atenção as combinações de peças de roupa e conta simplesmente os objectos que tinha representado — 3 na primeira coluna, 3 na segunda e 3 na terceira (registo que aparece na parte de baixo da figura 3). Deste modo, perde de vista o significado do que

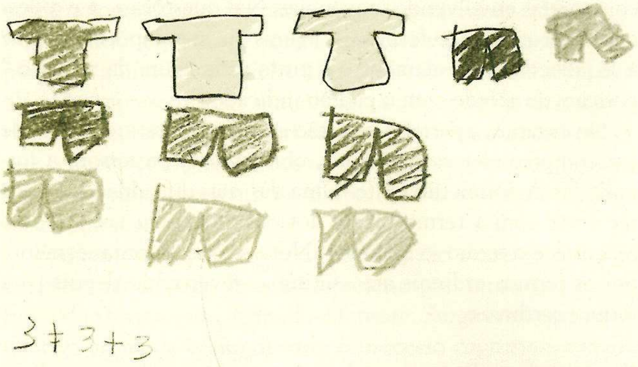


Figura 3. Representação de Bianca na sua resposta à questão 1.

Tarefa 2 — Combinações de roupa

1. A Joana tem três camisolas e dois calções. Quantos dias consegue fazer combinações diferentes?
2. A mãe da Joana comprou-lhe uma saia nova. Quantas combinações a Joana passa a conseguir fazer?

representou. Só com a intervenção da entrevistadora é que a aluna retoma a ideia que tinha que contar, não peças de roupa isoladas, mas as suas diferentes combinações. Em vez de contar directamente os objectos representados na figura, prefere estabelecer uma relação entre estes objectos e os dedos da mão, que constituem um sistema de representação auxiliar, contando a partir deles.

À semelhança da sua colega, David também faz a sua representação numa espécie de tabela, mas pinta todas as combinações, organizando-as dentro de rectângulos (figura 4). Assim, consegue responder mais rapidamente às sucessivas questões que lhe são colocadas pela entrevistadora, limitando-se a acrescentar ou retirar elementos (figura 5).

Entrevistadora: Depois da mãe da Joana lhe comprar a saia, quantas combinações passa a ter a Joana?
David: Isso é fácil... Junta-se as saias... Posso pôr aqui ao lado?
Entrevistadora: Sim... Não há problema...
David: Então... São nove!
Entrevistadora: Ah... Já percebi... Então... Mas sabes... A mãe da Joana é um bocadito desastrada e sem querer, os calções encolheram na máquina e deixaram de servir à Joana... Quantas combinações é que ela tem agora?
David: Três!

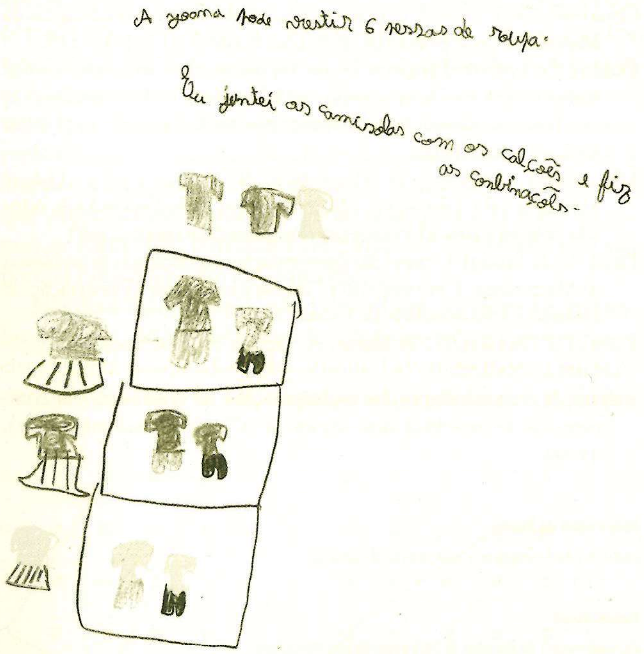


Figura 4. Representação de David na questão 1 da tarefa 3.

Entrevistadora: Ai é?!
David: Sim... Tiras estas que são os calções... E ficas só com estas três que são as saias!

Deste modo, Bianca parece fazer uma representação mais abstracta e mais eficiente — representando os calções por baixo de cada camisola. No entanto, tem muitas dificuldades em distinguir «peças de roupa» e «combinações de peças de roupa». David inicialmente não mostra esse tipo de dificuldade, desenhando cada combinação e respondendo correctamente às duas questões. Ambos os alunos mostram facilidade em gerar as suas representações próprias para o problema proposto, sendo mais sofisticada a de Bianca que a de David. Mas é este aluno quem consegue raciocinar melhor a partir da sua representação. Isto mostra que o facto dos alunos trabalharem com representações próprias não garante sucesso na resolução de um problema. É preciso que eles saibam tirar partido dessas representações e que as saibam relacionar com outras representações matemáticas, como a sequência dos números naturais.

Conclusão

Apesar de Bianca e David serem considerados os melhores alunos da sala e terem já alguma experiência no trabalho com sequências e na resolução de problemas combinatórios, estas tarefas constituíram para eles um grande desafio. Sendo alunos do 2.º ano de escolaridade, têm ainda muitas dificuldades em expressar por escrito o seu raciocínio e mesmo ao nível da ora-

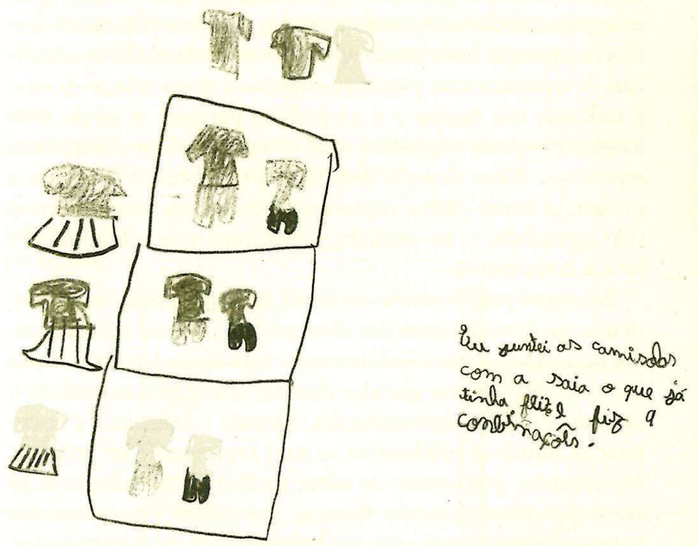


Figura 5. Representação de David na questão 2 da tarefa 3, tendo por base a resposta à questão anterior.

lidade necessitam de alguma ajuda para se fazer entender. Cada vez que são questionados, olham a entrevistadora com alguma desconfiança, tentando perceber se a pergunta é realmente uma dúvida ou um sinal de que estão a dar uma resposta incorrecta.

Na tarefa 1, envolvendo uma sequência pictórica repetitiva, existe à partida uma representação externa dada no enunciado. Ambos os alunos conseguem compreender o sistema de representação, envolvendo diversos tipos de figuras dispostas numa certa ordem, e usam-no para responder às questões mais simples que lhes são propostas.

No entanto, para responder às questões mais complexas, torna-se necessário produzir representações adicionais (internas), que podem ser materializadas externamente de diferentes modos. Bianca não o chega a fazer mas, David usa a sequência dos números naturais para estabelecer uma correspondência com os termos da sequência (primeiro incorrecta, mas depois correctamente), com a qual responde a várias questões.

Na tarefa 2, envolvendo combinações, os alunos têm de gerar uma representação externa apropriada. Na fase inicial da resolução da tarefa, ambos representam os dados (três camisolas e dois calções) através de representações próprias, elementos icónicos, em linha, procurando ligar o problema à realidade. Bianca, embora produza uma representação que teria permitido uma resposta correcta, perde o sentido da ideia de combinação como par de objectos e acaba por contar objectos individuais. Usa um sistema de representação que aprendeu em momentos anteriores, mas mostra não compreender muito bem o que está a fazer. Já David produz um sistema de representação mais explícito, que lhe permite contar directamente os pares de objectos solicitados.

Muitos professores consideram que as representações matemáticas são aprendidas naturalmente pelos alunos sem ser preciso dar-lhes grande atenção. O desempenho de Bianca e David, no entanto, evidencia a complexidade da aprendizagem das representações. A compreensão do padrão visual das sequências pictóricas permite aos dois alunos responder correctamente às questões mais simples da tarefa 1. Para responder a questões mais complexas é necessário gerar uma relação entre as sequências dadas e a sequência dos números naturais, o que David consegue fazer (oral e gestualmente) de modo muito eficaz. A representação pictórica-simbólica desta relação (como a indicada nas figuras 2 e 3) poderia permitir ir ainda mais longe na resposta a questões mais complexas sobre a sequência repetitiva. Além disso, o desempenho de Bianca na tarefa 2 evidencia como certas representações podem parecer terem sido aprendidas e, na verdade, subsistirem muitas dificuldades na sua compreensão.

No nosso país, o estudo do papel das representações no currículo, na aprendizagem dos alunos e nas práticas profissionais dos professores deste nível de ensino está ainda largamente por explorar. Não temos grandes dúvidas que é preciso valorizar diversos tipos de representações, formais e informais e encorajar os alunos a produzirem as suas representações próprias. No entanto, precisamos de saber melhor como lidar com os casos dos alunos, como Bianca, que usam representações potencialmente úteis sem verdadeiramente as compreender. De que modo podemos ajudar os alunos a evoluírem do uso de representações informais para representações mais formais? Enfim, trata-se, de um campo que precisa de atenção, de forma a percebermos melhor o modo de pensar dos alunos e como os podemos ajudar a compreenderem melhor os conceitos e procedimentos matemáticos.

Durante as entrevistas, os alunos mostraram-se sempre disponíveis, interessados e muito motivados. A certa altura tocou para o recreio escolar, mas ambos pediram para voltar mais cedo para terminarem as tarefas. Quando regressaram à sua sala, disseram à professora que as tarefas propostas foram muito difíceis, mas fixes e divertidas. Isto mostra como os alunos deste nível de ensino podem ser sensíveis ao desafio de tarefas matemáticas que achem interessantes. É de registar, ainda, que o entusiasmo dos alunos fez com que o resto da turma ficasse bastante curioso em relação às tarefas propostas, o que, por sua vez, levou a professora a decidir realizá-las no futuro com toda a turma...

Notas

[1] Trabalho realizado no âmbito do Projecto IMLNA — Improving Mathematics Learning in Numbers and Algebra, apoiado pela FCT — Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/CED/65448/2006). Este artigo tem por base uma comunicação apresentada no seminário de encerramento deste projecto, em 31 de Janeiro de 2011.

[2] Uma discussão aprofundada sobre os diferentes usos do sinal de = encontra-se, por exemplo em Ponte, Branco e Matos (2009).

[3] Tarefa baseada numa situação apresentada em Ponte, Branco e Matos (2009).

Referências

Bishop, A., & Goffree, F. (1986).Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309–365). Dordrecht: D. Reidel. (Tradução de J. M. Varandas, H. Oliveira e J. P. Ponte).

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação.* Lisboa: Relógio d'Água.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, XVI (2), 81–118.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178–203). New York, NY: Routledge.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação. (disponível em http://www.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents /ProgramaMatematica.pdf)

Pinto, M. E. (2009). *O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: Um estudo no 1º ano de escolaridade* (Dissertação de mestrado, Universidade de Évora).

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

Valério, N. (2005). Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1º ano. *Quadrante*, 14(1), 37–66.

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Isabel Velez

Agrupamento de Escolas Dr. Azevedo Neves, Amadora

Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa