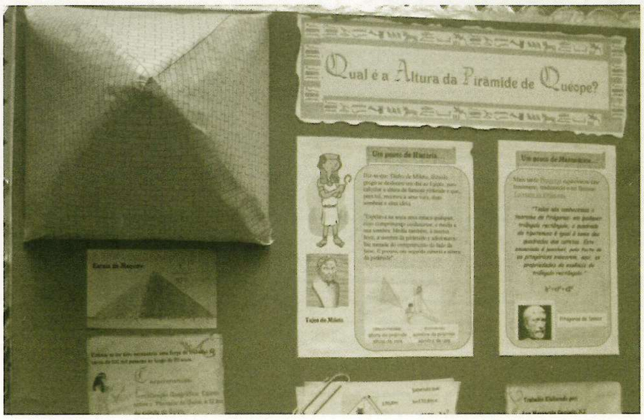
«O fabuloso Teorema de Pitágoras»



«O fabuloso Teorema de Pitágoras» foi o título escolhido para um trabalho proposto aos alunos do 8° ano da Escola EB 2,3 Engenheiro Duarte Pacheco, em Loulé.

Foram dinamizadoras as professoras Fernanda Menina e Sandra Guerreiro que propuseram aos seus alunos de 8° ano um trabalho de grupo que consistia em realizar uma maqueta que simulasse a aplicação do teorema de Pitágoras. O tema do trabalho foi bem recebido pelos alunos e dos cerca de cento e trinta alunos que frequentam o 8° ano na escola, apenas aproximadamente dez não entregaram uma maqueta.

Os trabalhos excederam as nossas expectativas, quer pela adesão quer pela criatividade e originalidade. Alguns alunos construíram uma maqueta para aplicação do Teorema de Pitágoras no plano, outros para a aplicação do teorema de Pitágoras no espaço. Para exposição houve castelos, pirâmides do Egipto, velas de barcos, parques infantis, um campo de futebol em legos, um «Phineas» (um desenho animado) e até a ponte Vasco da Gama. Embora alguns alunos se tenham documentado na internet, a realização manual do trabalho foi da autoria dos alunos. Estes além da maqueta deviam ainda apresentar um problema e resolvê-lo.

Estes trabalhos foram importantes em muitos sentidos. Para os alunos possibilitou a visualização da aplicação prática do Teorema de Pitágoras, dando um sentido à questão «Para é que isto serve?». Possibilitou ainda um momento diferente das aulas de realização de exercícios e problemas, mostrando o aspecto lúdico/didáctico da disciplina. Finalmente e porque teve peso na avaliação, ajudou a melhorar os níveis de final de período uma vez que recompensámos o seu empenho. Para as professoras, foi importante lembrarmo-nos que a escola não são apenas reuniões e processos burocráticos, mas que ser professor é trabalhar com pessoas ávidas de novos desafios, para que nos possam surpreender reinventando temas e fazendo-nos reinventar didácticas e práticas pedagógicas. Lembrámo-nos como gostamos de ser professoras e de trabalhar com os nossos alunos.

Por estes motivos a exposição foi um sucesso. Embora em situações problemáticas ainda haja alunos que não vêem a aplicação do Teorema de Pitágoras, estes são uns ases na aplicação directa do mesmo, quer para calcular a hipotenusa, ou um dos catetos. Na auto-avaliação muitos alunos sugeriram a realização de um novo trabalho de grupo.Todos eles estão de parabéns.

Fernanda Menina e Sandra Guerrreiro
EB 2,3 Eng. Duarte Pacheco, Loulé

Jacob Steiner e o problema da menor malha viária: uma resolução utilizando o Cálculo Diferencial

Este artigo apresenta uma resolução analítica do problema da menor malha viária de Jacob Steiner, diferente da apresentada no n.° 82 desta revista, em 2005, por José Mello. O referido artigo trata do problema utilizando a Geometria e proponho apresentar duas maneiras diferentes de resolver o mesmo problema, utilizando o Cálculo Diferencial.

Figura 1

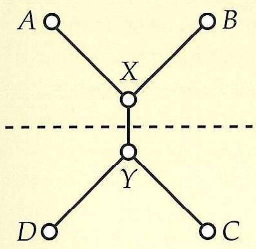


Figura 2.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(L - x)^2 + a^2} + L - 2a$$

[mover 1 varia o trajeto pela horizontal]

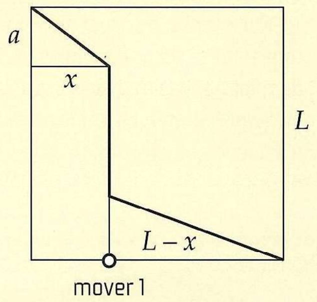


Figura 3.

$$g(x) = 2\sqrt{\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} + x$$

[mover 2 varia o trajeto pela vertical]

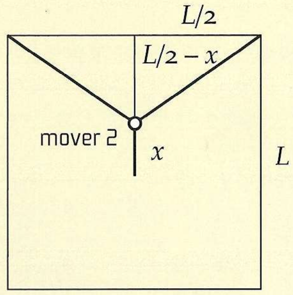


Figura 4

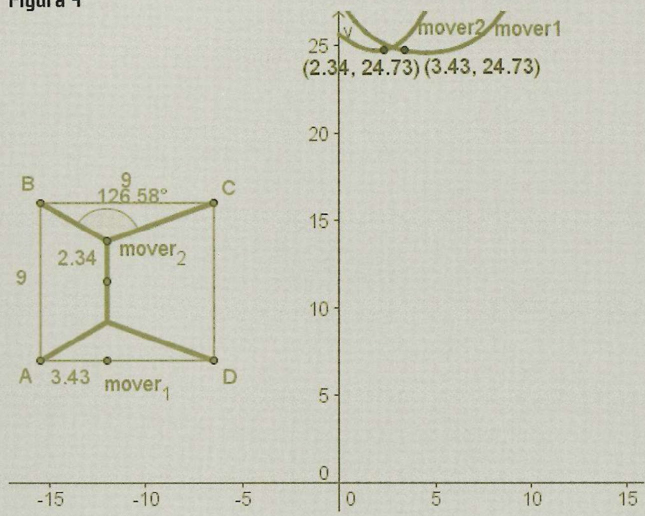
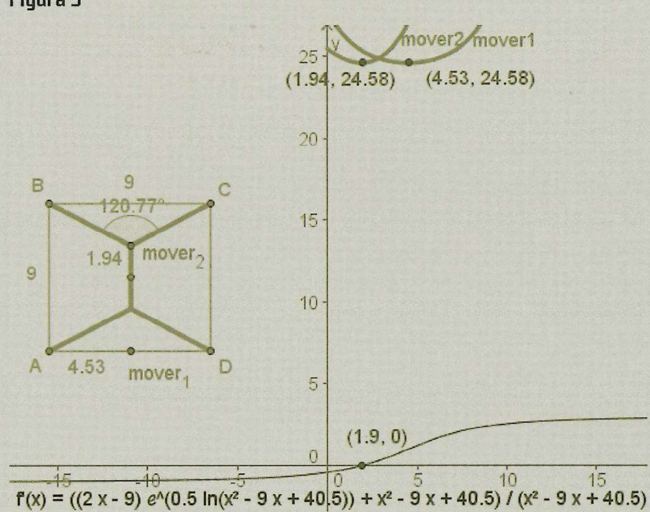


Figura 5



O problema

Conforme Mello (2005), do ponto de vista prático o problema pode ser apresentado da seguinte forma: se quisermos construir estradas ligando quatro cidades, qual é a configuração da malha viária mais curta possível? Para simplificar a análise do problema, admitiremos que cada cidade esteja localizada no vértice de um quadrado.

Mello (2005) apresenta a prova geométrica que entre todas as malhas com dois pontos de Steiner (X e Y), a apresentada na figura 1 é a de menor comprimento total.

Resolução pela geometria dinâmica

Construída a situação com o *software* Geogebra[1], dois pontos móveis (mover1 e mover2), produzem a variação do trajeto, conforme figura 2 e figura 3, respectivamente. Transportando para o sistema cartesiano, as posições desses pontos e o valor do trajeto criam dois lugares geométricos que coincidem com as funções.

As figuras 4 e 5 apresentam um quadrado de lado 9 produzidas com o *software* Geogebra, com algumas posições possíveis para os pontos de Steiner. Na figura 5, a que apresenta a solução do problema, foi constatado que o ponto de mínimo na parte que varia o trajeto pela horizontal (mover1) é aproximadamente 4,5 e que na parte que varia o trajeto pela vertical (mover2) é aproximadamente 1,94. Pode-se observar também o gráfico da derivada da função g, que apresenta o mesmo valor para x quando a função derivada é nula (condição que trataremos a seguir).

Resolução pelo cálculo diferencial – função com uma variável

A otimização de funções no Cálculo Diferencial baseia-se na ideia de que em um ponto de máximo ou mínimo da função, a derivada é nula. Assim sendo, determinada a função que gera o trajeto, basta otimizá-la:

função que varia o trajeto pela horizontal (mover1)

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(L - x)^2 + a^2} + L - 2a$$

otimizando $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \dfrac{x - L}{\sqrt{(L - x)^2 + a^2}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \dfrac{-x + L}{\sqrt{(L - x)^2 + a^2}}$, considerando $x \neq L$,

$-2a^2Lx + a^2L^2 = 0$ donde $x = \dfrac{a^2L^2}{2a^2L}$,

considerando $a \neq 0$, $x = L/2$. Se $L = 9$, então $x = 9/2 = 4{,}5$.

Função que varia o trajeto pela vertical (mover2)

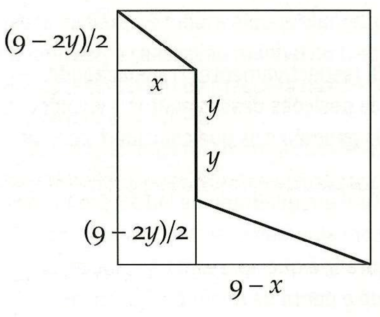
$g(x) = 2\sqrt{\left(\dfrac{L}{2} - x\right)^2 + \left(\dfrac{L}{2}\right)^2} + x$, otimizando:

$$g'(x) = \frac{2x - L}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} + 1$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3Lx + L^2/2 = 0 \Leftrightarrow x = \left(3L - L\sqrt{3}\right)/6$$

$x = L\left(3 - \sqrt{3}\right)/6 \cong 0{,}211L$ e, considerando $L = 9$,

temos $x \cong 1{,}9$.



$$F(x,y) = 2\sqrt{x^2 + \left(\frac{9 - 2y}{2}\right)^2} + 2\sqrt{(9 - x)^2 + \left(\frac{9 - 2y}{2}\right)^2} + 2y$$

Figura 6. Função que varia o trajeto

Resolução pelo cálculo diferencial – função com duas variáveis

A otimização de funções com duas variáveis no Cálculo Diferencial baseia-se na mesma ideia usada para funções com uma variável. Assim sendo, determinada a função que gera o trajeto, conforme figura 6, basta otimizá-la.

Entretanto, os propósitos deste artigo são os de apresentar uma análise do gráfico dessa função para determinar seu ponto de mínimo. Assim, transportando a função F para o *software Winplot*[2], podemos analisar seu gráfico tridimensional e estimar a solução que se aproxima da solução geométrica conforme figura 7.

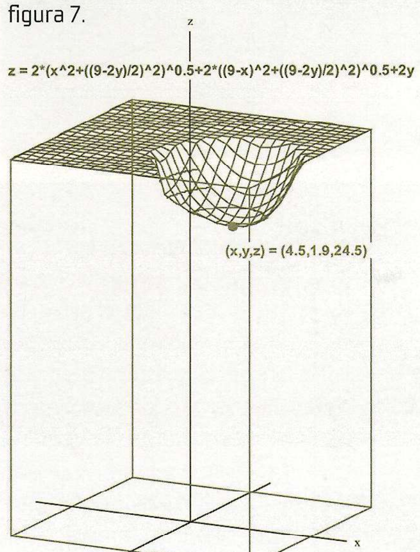


Figura 7

Conclusões

Embora a resolução do problema do menor caminho pela abordagem do Cálculo Diferencial considere alguns conceitos complexos, o que não proporciona uma resolução relativamente simples como a resolução geométrica, ela possibilita localizar os pontos de Steiner no espaço, o comprimento do trajeto e não apenas os ângulos formados em seu entorno. Além disso, podemos a partir do modelo determinado para a situação trocar valores das medidas e resolver diversos problemas semelhantes.

Notas

(1) Geogebra é um software matemático que reúne geometria, álgebra e cálculo. Ele foi desenvolvido por Markus Horenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas e é gratuito. Disponível em http://www.geogebra.org/cms/

(2) O Winplot é um programa gráfico e gratuito. Foi desenvolvido pelo professor Richard Parris da Phillips Exeter Academy, USA. Disponível em http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html

Marcos de Miranda Paranhos, Ana Lúcia Manrique
Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Atuária (FEA) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), Brasil