— A aprendizagem do número — Que exercícios? Que materiais?

Helena d'Orey Marchand, Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação
Universidade de Lisboa

Introdução

A problemática dos materiais manipulativos na aprendizagem da matemática pressupõe uma reflexão mais lata sobre os pressupostos epistemológicos de teorias explicativas do desenvolvimento do número e do cálculo e sobre as teorias da aprendizagem delas decorrentes. No presente artigo não teremos a pretenção de o fazer exaustivamente. Com efeito, de momento, apenas será analisada, de forma mais fundamentada, a concepção Piagetiana do número e algumas propostas de estimulação desta noção dentro do quadro da epistemologia construtivista. A escolha desta posição deve-se ao facto de que independentemente de algumas críticas de estudiosos desta problemática que têm conduzido investigações, quer dentro de um quadro conceptual Piagetiano (Brainerd, 1973, 1974; Siegel, 1974; Williams, 1976, entre outros) quer afastando-se dele (Gelman e Gallistel, 1978; Klahar e Wallace, 1973 entre outros)[(1)] todos eles, tal como Piaget, atribuem um papel de relevo: a) à actividade do sujeito na construção das noções numéricas, b) à ordenação e à cardinação na construção desta noção e c) à correspondência termo a termo na génese da noção do número. Escolhemo-la, ainda, por, do ponto de vista de uma intervenção, ter dado origem a uma série de estudos, referentes à aprendizagem do número elementar e do cálculo, muito interessantes, alguns deles facilmente aplicáveis na sala de aula. Dado que um corpo substancial de investigações neste domínio tem incidido fundamentalmente sobre a criança da pré-primária e da primária, e dado que nós próprias conduzimos uma investigação com crianças, em insucesso escolar grave, que se encontravam nos dois primeiros anos da primeira fase, a temática que nos propomos analisar referir-se-á à construção do número e do cálculo em crianças destes dois níveis de escolaridade.

Sobre a natureza do número

A noção de número natural é muito complexa tendo vários autores, partindo de hipóteses diferentes, proposto diversas teorias explicativas da sua construção.

Algumas questões, que os investigadores que se debruçam sobre a natureza e a génese desta noção se colocam, foram sintetizadas por Piaget no livro «Introdução à Epistemologia Genética» no capítulo referente a «O pensamento matemático» (Piaget, 1949). Depois de afirmar que a significação epistemológica do número deu lugar às mais diversas e contraditórias hipóteses este autor interroga: a) se a proposição $1+1=2$ é uma verdade, uma convenção ou um enunciado tautológico; b) se tal relação é fruto de experiências e de quais; c) se é construída *a priori* ou objecto de uma intuição imediata e de que tipo e, por fim, d) se o número é uma noção primeira ou uma síntese de operações simplesmente lógicas (Piaget, 1949).

Algumas das questões que Piaget coloca haviam sido objecto de análise por parte de estudiosos desta matéria tendo dado origem a duas posições epistemológicas antagónicas:

1) A posição intuicionista (Brouwer), que negando a componente lógica no número, apela para a intuição como mecanismo explicativo da sua origem. Tal intuição seria fruto da intuição temporal que os sujeitos têm da sua existência.
2) A posição logicista (Russel), que ao defender que lógica e matemática são disciplinas de natureza idêntica, reduz o número a conceitos simplesmente lógicos.

A resposta que Piaget dá às questões levantadas colocam-no numa posição que supera o reducionismo implícito nas duas posições citadas. Para este autor estruturalista, o número seria solidário de uma estrutura de conjunto que se elabora graças à síntese, num sistema único, de duas estruturas mais simples, a saber: a inclusão de classes e a seriação ou relações de ordem.

A perspectiva de Piaget quanto à natureza do número

Os estudos efectuados por Piaget e seus colaboradores quanto à génese do número, assim como os estudos efectuados quanto à génese de outras noções tiveram por objectivo dar resposta à grande questão colocada por este autor, de ordem essencialmente epistemológica, sobre a natureza e a formação do conhecimento.

A resposta que encontra, baseando-se nos resultados dos estudos empíricos efectuados em diversos domínios do conhecimento, é de natureza construtivista.

A hipótese fundamental do construtivismo Piagetiano é que nenhum conhecimento humano, excepto as formas hereditárias muito elementares, existe préformado no sujeito. O conhecimento é produto duma relação de interdependência entre o sujeito que conhece e o objecto a ser conhecido. O objecto é, nesta perspectiva, um estado limite de que o sujeito se tenta apropriar, por aproximações sucessivas, sem dele nunca atingir um conhecimento completo. A objectividade é o produto de uma construção e de sucessivas descentrações do sujeito que conhece. Esta construção faz-se em duas grandes direcções, que têm entre si um conjunto de conhecimentos intermédios:

1 — A construção das formas do conhecimento (as estruturas lógico-matemáticas), por abstracção reflexiva[(2)].

2 — A construção do conhecimento das propriedades dos objectos e das relações espacio-temporais e causais, por abstracção empírica[(3)].

A distinção efectuada por Piaget entre conhecimento físico e conhecimento lógico-matemático é não só epistemologicamente fecunda como tem grande valor heurístico.

O conhecimento físico é o conhecimento dos objectos da realidade externa. Por exemplo, a cor é uma propriedade física dos objectos que pode ser conhecida pela observação (objecto vermelho, objecto azul, etc.).

No entanto se nos apresentarem dois objectos, um azul e o outro amarelo, a diferença que notamos na cor é um conhecimento lógico-matemático. A diferença de cor, embora pressupondo a observação da cor de cada objecto de per si, é já uma relação, criada mentalmente pelo sujeito, que relaciona os dois objectos.

O conhecimento lógico-matemático é construído pelo sujeito através de sucessivas coordenações de relações (a fonte do conhecimento lógico-matemático é interna). As crianças progridem na construção do conhecimento lógico-matemático através da coordenação das relações mais simples que efectuaram entre os objectos. «Por exemplo ao coordenar as relações de igual, diferente e mais, a criança torna-se apta a deduzir que há mais contas no mundo do que contas vermelhas e que há mais animais do que vacas. Da mesma forma, é coordenando a relação entre «dois» e «dois» que ela deduz que $2+2=4$ e que $2\times2=4$» diz a este respeito Kamii (1984, p.15).

Segundo esta autora, a posição de Piaget quanto à natureza lógico-matemática do número está em flagrante contraste com a concepção de matemática da maior parte dos manuais. Dá como exemplo um texto de Duncan e Al. (1972) em que é afirmado que o número «é uma propriedade dos conjuntos, da mesma maneira que ideias como cor, tamanho e forma se referem a propriedades dos objectos» (p. 30, citado por Kamii, 1984, p. 16). Nesta perspectiva o número seria aprendido da mesma maneira que a cor, tamanho, forma, etc., isto é, através da abstracção simples ou empírica. Para Piaget, e as investigações efectuadas na escola de Genéve no âmbito da aprendizagem de noções lógicas comprovam-no, o número é aprendido através da abstracção reflexiva. Se para a aprendizagem de pequenos números (até 5, por exemplo) a distinção entre estes dois tipos de abstracção[(4)] pode não ser muito evidente para o professor, quando se trata de aprendizagem de números maiores, como por exemplo, mil, um milhão. etc., ela torna-se absolutamente necessária.

Será possível aprender estes grandes números, que conduzem ao infinito, através da abstracção empírica, a partir da contagem de objectos, ou de conjuntos?

Para a Escola de Genéve só as relações que a criança, progressivamente, constrói, por abstracção reflexiva, explicam a compreensão que passa a ter, por exemplo, de números como 5.000.010, mesmo que nunca os tenha visto ou contado num conjunto.

Como se pode ver, a concepção de número de Piaget é contrária à concepção que defende que os conceitos numéricos podem ser ensinados por transmissão social. Embora não discordando que se pode ensinar a criança a dar uma resposta correcta para a soma de $2+2$, por exemplo, este autor põe em questão que seja possível ensinar-lhes as relações subjacentes a esta adição.[(5)]

A génese do número

O número, para Piaget e Szeminska (1941), é, tal como foi dito, uma síntese, num sistema único, de duas estruturas mais simples: a seriação ou relações de ordem e a inclusão hierárquica de classes. É pela coordenação da acção de reunir e de ordenar mentalmente os objectos que o número se constitui.

Ordenar os objectos é uma acção fundamental para a construção do número. É esta operação, de que a criança muito jovem não tem necessidade lógica, que nos dá a certeza, por exemplo, que contámos todos os objectos e de que ao contar não repetimos, nem saltamos nenhum. No entanto, de per si, esta operação não permite quantificar os objectos. Para quantificar os objectos a criança tem que colocá-los numa relação de inclusão hierárquica, isto é, tem que incluir mentalmente o um no dois, o dois no três e assim sucessivamente. Quando damos à criança seis objectos ela só consegue quantificar o conjunto numericamente se coordenar a acção de os pôr em ordem, com a acção de os incluir hierarquicamente.

A construção das noções de seriação e de quantificação de inclusão de classes faz-se no interior do período operatório concreto, por volta dos 7-9 anos de idade. É nessa altura que a criança se torna capaz de seriar do mais pequeno para o maior, 8 ou 10 pauzinhos de dimensões diferentes, compreendendo que cada elemento é, simultaneamente, o maior de todos os que o precedem e o menor de todos os que se lhe seguem. É nesta altura que a criança é capaz de compreender que a classe incluinte B (por ex. as flores) é mais numerosa do que a subclasse incluída A (por ex. as rosas). Quer a operação de seriação, quer a operação de inclusão de classes pressupõem a mobilidade do pensamento da criança, que se torna progressivamente reversível. A reversibilidade capacita-a a realizar mentalmente acções ou operações simultaneamente opostas (por exemplo dividir o todo em várias partes e, mentalmente, reuni-las no todo, conservando a identidade quantitativa invariante).

Piaget e Szeminska (1941) estudaram a génese da conservação do número elementar analisando o comportamento das crianças quando confrontadas a realizar a prova de conservação da equivalência de 2 conjuntos, com transformação figural de um deles por deslocamento dos seus elementos.

A prova de conservação do número elementar consiste em pedir à criança, num primeiro momento, para colocar o mesmo número de objectos que os dispostos pelo experimentador.

A 0 0 0 0 0 0 0
B 0 0 0 0 0 0 0

Em seguida, o experimentador afasta os objectos de uma das séries e pergunta à criança, pedindo-lhe uma justificação, se há tantas, o mesmo número, a mesma quantidade de objectos nas duas séries.

A 0 0 0 0 0 0 0
B 0 0 0 0 0 0 0

As respostas encontradas por Piaget e Szeminska (1941) e, ulteriormente, por Gréco (1962), permitiram identificar 4 níveis de desenvolvimento:

1 — Num primeiro nível, a criança constrói uma série com o mesmo comprimento do que a série modelo, mas sem correspondência termo a termo.

Ex. 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

2 — Num segundo nível (por volta dos 4-5 anos), a criança consegue uma correspondência óptica exacta, mas quando se afastam um pouco os elementos de uma das séries, pensa que a série mais comprida tem um número superior.

3 — Num terceiro nível, na mesma situação, a criança pensa que o número se conserva mas que a quantidade aumenta (conservação da quotidade mas não da quantidade).

Ex. Quando o experimentador pede à criança para contar os objectos de uma série e para adivinhar o número de objectos da outra série esta diz, por exemplo, que há 7. No entanto se o experimentador, em seguida, lhe pergunta se há tantos, ou se alguém tem mais objectos, neste estádio, a criança responde «há 7 para ti e 7 para mim, mas tu (referindo-se à série do experimentador em que os elementos estão afastados) tens mais.»

4 — Num quarto nível (por volta dos 6-7 anos), a criança conserva a quotidade e a quantidade.[6]

A aprendizagem do número

Da teoria de Piaget não se podem tirar implicações imediatas quanto à aprendizagem do número. Tal como dissemos, os estudos deste autor tiveram por objectivo essencial contribuir para a clarificação da problemática da construção do conhecimento. As investigações efectuadas pela Escola de Genéve foram raramente conduzidas num contexto de sala de aula, e as que o foram não tiveram como objectivo imediato a extracção de implicações didácticas. Os investigadores desta Escola defendem, no entanto, que, sem subestimar a importância do ensinar a ler, escrever e contar os números, os professores deveriam insistir no desenvolvimento da estrutura mental do número. Se as crianças não a construírem, aprenderão a contar, ler e escrever números memorizando, sem os compreender.

Na década de 50 e, ulteriormente na década de 70, surgiu um corpo de investigações com o objectivo de analisar, entre outros aspectos, o problema da aprendizagem das estruturas lógico-matemáticas.

As questões que os investigadores do Centro de Epistemologia Genética, nos trabalhos efectuados nos anos 50 (ver Piaget, 1959), se colocaram eram essencialmente as seguintes: é possível a aprendizagem das estruturas lógicas utilizando como reforço externo a constatação dos factos? Por outras palavras, será possível uma aprendizagem do conhecimento que seja independente da lógica do sujeito? Ou pelo contrário toda e qualquer aprendizagem pressupõe uma tal lógica?

Os resultados de várias investigações mostraram que é impossível aprender as formas lógicas através de constatações de natureza empírica, isto é, através da constatação dos factos. Nesta altura começa-se a falar em exercícios operatórios e na noção de conflito, atribuindo-se à equilibração um papel primordial na génese do conhecimento.

Nos anos 70, Inhelder, Sinclair e Bovet (1974) retomam a problemática da aprendizagem das noções lógicas, num contexto mais psicológico do que epistemológico. Elaboram uma série de situações de aprendizagem de várias noções. Essas situações colocaram as crianças em situação de confronto cognitivo, que, segundo a teoria Piagetiana, é gerador de progressos cognitivos. «Procurámos evitar que a situação experimental suscite em si própria respostas correctas, o que iria contra o princípio da necessidade de uma actividade construtiva por parte da criança» (*op. cit.*, p. 46). Os exercícios criados por estas autoras, utilizando materiais muito simples (frutos de plástico, fósforos, etc.) conseguiram, em determinadas crianças, mobilizar os seus esquemas mentais, tendo algumas delas adquirido as estruturas lógico-matemáticas próprias do período operatório concreto.

Num trabalho efectuado em Portugal (Marchand, 1983, 1986) junto de crianças, da Escola Primária, provenientes de meios sócio-culturais muito desfavorecidos, em insucesso escolar grave (2 a 3 anos de repetência), verificámos um atraso na ordem dos 2-3 anos, quanto à aquisição das estruturas lógico-matemáticas subjacentes à noção do número elementar. Com o objectivo de acelerar o seu ritmo de desenvolvimento constituímos uma série de exercícios de aprendizagem do número elementar, agrupados em 3 sessões, de aproximadamente 30 minutos cada. Estas sessões foram efectuadas individualmente (embora seja possível efectuar estes exercícios na sala de aula, em pequenos grupos de 2 ou 3 crianças). No presente artigo serão apenas descritos dois exercícios utilizados nesse trabalho.

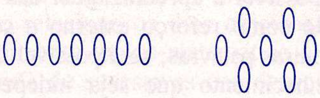
Exercício 1

Objectivo — Este exercício(7) teve por objectivo a estimulação dos esquemas de correspondência termo a termo e dos esquemas de numeração (quotidade) em colecções equivalentes.

Material — Árvores, casas, pequenos animais em plástico, fichas vermelhas, azuis, amarelas, etc.

O experimentador e a criança dispõem iterativamente («um para mim», «um para ti») os elementos em disposições espaciais diferentes.

Ex.



De seguida o experimentador coloca uma questão respeitante à igualdade numérica dos dois conjuntos «Há tantas, a mesma quantidade de casas e de árvores? Como é que sabes?» Se a criança manifesta dificuldades ou dá respostas em função da configuração espacial o experimentador insiste sobre o modo de composição: «Lembras-te como fizemos?» e ajuda-a a recapitular, se tal se tornar necessário. Depois coloca uma questão quanto à correspondência entre os elementos das duas colecções: «Se se quiser colocar uma árvore junto de cada casa, há árvores suficientes, ou muitas árvores ou só algumas?»

Em seguida a criança é convidada a antecipar o número de elementos da outra colecção, sem os contar: «Conta as tuas árvores. Podes adivinhar quantas casas tenho?» Após estas questões procede-se a uma verificação efectuando-se uma relação espacial (uma árvore junto de cada casa).

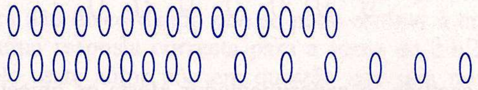
Uma grande variedade de exercícios pode ser efectuada segundo este esquema, com materiais diferentes e variados, quer com quantidades discretas equivalentes numericamente, quer não equivalentes.[8]

Exercício 2

Objectivo — Este exercício teve por objectivo estimular os esquemas de adição e de subtracção de elementos.

O experimentador pede à criança para adicionar o mesmo número e elementos (por ex. 6) a duas colecções equivalentes, sem efectuar a correspondência biunívoca — separando-os numa das colecções e juntando-os na outra.

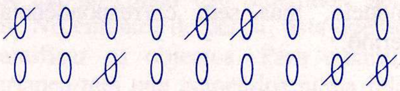
Ex:



Em seguida coloca-lhe uma questão referente à igualdade numérica e à identidade quantitativa das 2 colecções. Se a criança manifesta dificuldades em função da configuração espacial, o experimentador insiste sobre o modo de composição e ajuda-a a recapitular o modo de construção das duas séries. Por fim procede a uma verificação por correspondência termo a termo.

Ou ainda, o experimentador pede à criança para retirar o mesmo número de elementos (por ex: 3) de 2 colecções numericamente equivalentes, de modo a destruir a correspondência óptica.

Ex:



Em seguida coloca as mesmas questões e procede da mesma maneira que para o exercício precedente.

Após várias sessões em que utilizámos este tipo de exercícios a totalidade das crianças que não possuía a noção de número elementar, adquiriu-a.

Numa perspectiva um pouco diferente mas que consideramos não só muito interessante como, também, facilmente operacionalizável na sala de aula, Kamii (1984) propõe alguns princípios de ensino do número. Partindo do pressuposto que o número não é directamente ensinável e que o termo «ensinar» se refere a um ensino indirecto, no sentido em que o meio ambiente pode proporcionar muitas coisas que, indirectamente, facilitam o desenvolvimento do conhecimento lógico-matemático, esta autora propõe (*op. cit.*, p. 42) que o professor estimule a criança:

1 — A criar todos os tipos de relações entre objectos, acontecimentos, acções.

2 — A quantificar objectos — encorajando-as: a) a pensar sobre o número e quantidades de objectos, quando estes têm, para ela, significado; b) a quantificar logicamente os objectos e a comparar conjuntos; c) a fazer conjuntos com objectos móveis.

3 — A interagir socialmente com os colegas e com os professores: a) encorajando-a a trocar ideias com os seus colegas; b) intervindo de acordo com o que a criança está a pensar.

Para esta autora a observação do comportamento da criança pelo professor é primordial. Só esta lhe permitirá intervir de modo adequado e de acordo com o nível de dificuldade que esta manifesta.

Propõe, para a prossecução destes objectivos, que os professores (e mais genericamente os educadores) utilizem situações do dia-a-dia, tais como: pôr a mesa para as refeições; distribuir materiais na sala de aula; distribuir alimentos pelos colegas (todas estas actividades proporcionam a estimulação da correspondência termo a termo, a contagem, a comparação de conjuntos, as interacções sociais, a criação de relações entre objectos). Propõe, ainda, a utilização de jogos em grupo (jogos com alvos, corridas e jogos de pegar, jogos de tabuleiro e, sobretudo, jogos de baralho). Para Kamii, estes jogos não só constituem um contexto excelente para a activação do pensamento em geral, como também solicitam de forma mais directa a comparação de quantidades.

Em termos de conclusão

Dentro de um quadro Piagetiano o professor deve estimular a criação de todos os tipos de relação entre objectos e acontecimentos. Ao fazê-lo está a proporcionar, à criança, momentos de abstracção reflexiva que, tal como foi dito, constitui a dimensão mais original e fundamental da teoria do número equacionada por este autor.

Notas

(1) Para uma revisão desta problemática ver Morgado, 1989.

(2) A abstracção reflexiva obtém as suas informações da coordenação das relações que o sujeito efectua sobre o objecto.

(3) A abstracção empírica obtém as suas informações dos objectos.

(4) É importante salientar que embora distinga abstracção reflexiva de abstracção empírica Piaget defende que uma não pode existir sem a outra. Com efeito, segundo este autor a própria leitura dos observáveis pressupõe um sistema de referências lógico-matemático. Por exemplo para que a criança compreenda que um carro é vermelho necessita de possuir um sistema classificatório para distinguir vermelho das outras cores. Precisa, ainda, de possuir um esquema classificatório para diferenciar o carro dos outros objectos que conhece. Esta perspectiva opõe-se à interpretação do desenvolvimento como simples leitura do exterior e, deste modo, às teorias de aprendizagem que dela derivam — a teoria associacionista ou de condicionamento.

(5) Esta concepção não deixa de ter implicações, como teremos ocasião de ver, ao nível dos exercícios de aprendizagem.

(6) É, no entanto, importante salientar que a construção do número se processa gradualmente. A criança começa por conservar 7 elementos, depois de 8 a 15 elementos, depois de 15 a 30. E assim sucessivamente.

(7) Este exercício segue de perto a metodologia utilizada por Inhelder, Sinclair e Bovet, 1974.

(8) Para mais detalhes ver Marchand, 1983.

Referências bibliográficas

Brainerd, C. (1973), Mathematical and behavioral foundations of number. *Journal of General Psychology*, 88, pp. 221-282.

Duncan, E.R.; Capps, L.R.; Dolciani, M.P.; Quast, W.G., Zweng, M.J. (1972) *Modern School Mathematics: Structure and Use.* Teacher's Annotated Ed. Rev. ed. Boston: Houghton Mifflin.

Gelman, R.; Gallistel, C. (1978), *The child's understanding of number.* Cambridge, Harvard University Press.

Greco, P. (1962) Quantité et Quotité. *Études d'Epistémologie Génétique*, vol. XIII, pp.1-70.

Inhelder, B., Sinclair, H., Bovet, M. (1974), *Apprentissage et Structures de la Connaissance.* Paris, PUF.

Klahr, D.; Wallace, J. (1973), The role of quantification operators in the development of conservation quantity. *Cognitive Psychology*, 4, pp. 340-360.

Kamii, C. (1984), *A criança e o número.* Campinas, Papirus.

Marchand, H. (1983), *Apprentissage operatoire chez des enfants provenant de milieux socio-culturels défavorisés.* Tese de Doutoramento (no prelo).

Marchand, H., (1986) Apprentissage opératoire dans un milieu socio-culturel sous-privilégié, *Archives de Psychologie*, 54, 3-26.

Morgado, L. (1988), *Aprendizagem operatória da conservação das quantidades numéricas*, Coimbra, Instituto Nacional de Investigação Científica, Psicologia 7.

Piaget, J. (1949), *Introduction à l'Épistémologie Génétique I. La pensée mathématique.* Paris, PUF.

Piaget, J. (1959) Apprentissage et Connaissance. *Études d'Épistémologie Génétique*, vol.VII e X, Paris, PUF.

Piaget, J.; Szeminska, A. (1967), *La genèse du nombre chez l'enfant.* Paris, Delachaux et Niestlé.

Siegel, L. (1974) Development of number concepts: ordering and correspondance operations and the role of length cues. *Development Psychology*, 10, pp. 907-912.

Williams, R. (1976), An ordination before cardination response to Piaget's model for the assessment of number concept development. *The Journal of General Psychology*, 94, pp. 301-302.