A colecção de selos

Fui visitar o Hugo, que me mostrou logo a sua bela colecção de selos. Admirado, perguntei-lhe:

– Quantos selos tens tu?

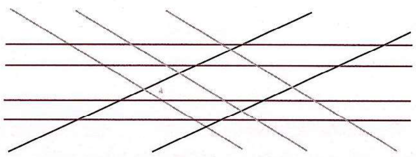
– Olha, só te posso dizer que é o menor número que é o dobro de um quadrado e o triplo de um cubo.

Quantos selos tem o Hugo?

(Respostas até 25 de Abril para zepaulo@armail.pt)

Paralelas e polígonos

O problema proposto no número 109 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:



Temos duas rectas paralelas segundo uma certa direcção A, mais três rectas segundo outra direcção B e ainda quatro rectas segundo uma terceira direcção C.

No máximo, quantos triângulos se podem obter?

E quantos paralelogramos?

E quantos trapézios que não sejam paralelogramos?

Recebemos 9 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Ana Petrucci (Lisboa), Gonçalo Ayala (Lisboa), Gonçalo Fialho (Lisboa), Hugo Silva (Amadora), Leonel Vieira (Braga), Maria Inês Marreiros (Lisboa), Miguel Santiago (Lisboa) e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

Primeiro, uma nota prévia, explicitada por Pedrosa Santos e Alberto Canelas: para maximizar o número de figuras pedidas, é necessário que em nenhum ponto concorram três rectas.

Os processos de resolução seguidos pelos nossos leitores foram muito parecidos.

1) Triângulos

Para se obter um triângulo é necessário escolher uma recta de cada direcção. Como temos 2 rectas segundo A, 3 segundo B e 4 segundo C, o número de triângulos que se obtém é: $2 \times 3 \times 4 = 24$.

Claro que, se usarmos a combinatória, isto pode ser escrito na forma: $C_1^2 \times C_1^3 \times C_1^4 = 2 \times 3 \times 4 = 24$.

2) Paralelogramos

Dois lados de um paralelogramo têm uma certa direcção e os dois restantes têm uma segunda direcção.

Temos então de escolher duas rectas numa direcção e duas noutra diferente.

Paralelogramos com lados segundo A e B: como há apenas uma maneira de escolher duas rectas com a direcção A e 3 possibilidades de ter duas rectas segundo a direcção B, temos $1 \times 3 = 3$.

Paralelogramos com lados segundo A e C: há uma maneira de escolher duas rectas com a direcção A e 6 de ter duas rectas segundo a C, logo temos $1 \times 6 = 6$.

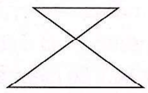
Paralelogramos com lados segundo B e C: há 3 possibilidades de escolher duas rectas com a direcção B e 6 de ter duas rectas segundo a C, logo temos $3 \times 6 = 18$.

O total de paralelogramos é:

$$C_2^2 \times C_2^3 + C_2^2 \times C_2^4 + C_2^3 \times C_2^4 = 1 \times 3 + 1 \times 6 + 3 \times 6$$
$$= 3 + 6 + 18 = 27$$

3) Trapézios não paralelogramos

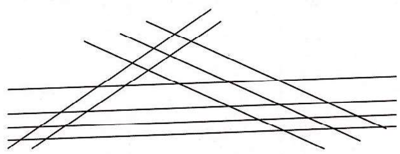
Aqui surge um problema. Será que esta figura é um trapézio?



Trapézio?

Se a aceitarmos como quadrilátero, podemos avançar. Caso contrário, o número de trapézios quando houver rectas que se cruzem entre duas paralelas (como acontecia na figura do enunciado do problema) irá variar de situação para situação.

Mas, como nos é pedido o número máximo de trapézios, podemos passar por cima desta objecção. Assim, admitimos trapézios estrelados ou consideramos apenas o caso em que não há intersecções no intervalo de duas paralelas.



Cada trapézio vai então ter dois lados com uma direcção, um lado com uma segunda direcção e mais um lado com a terceira direcção.

Casos AABC: $1 \times 3 \times 4 = 12$.

Casos ABBC: $2 \times 3 \times 4 = 24$.

Casos ABCC: $2 \times 3 \times 6 = 36$.

Usando a simbologia da combinatória, o número total de trapézios é:

$$C_2^2 \times C_1^3 \times C_1^4 + C_1^2 \times C_2^3 \times C_1^4 + C_1^2 \times C_1^3 \times C_2^4 =$$
$$= 12 + 24 + 36 = 72.$$