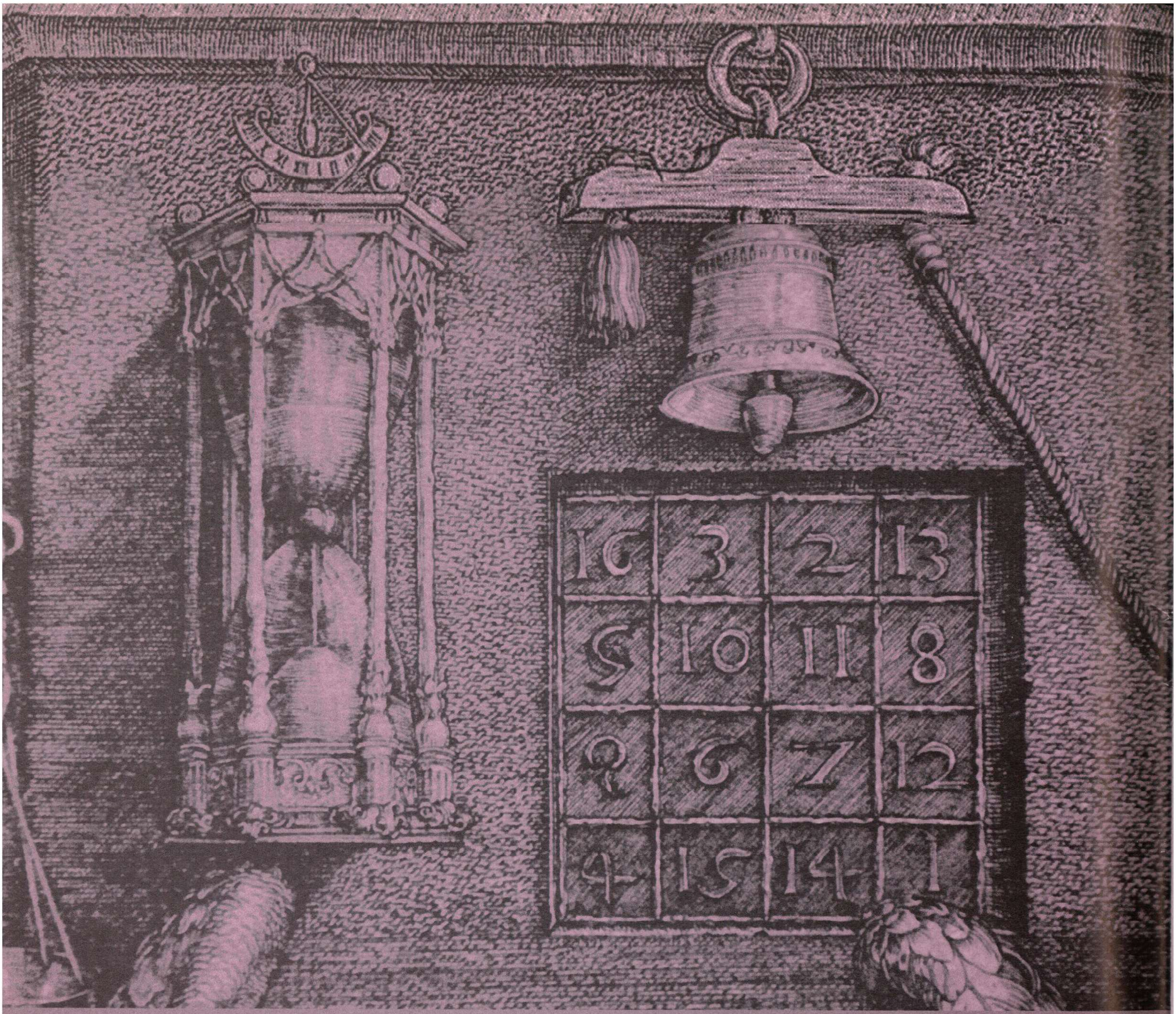


Magia em Matemática

Ana Caseiro

No 1° encontro, em 2005–2006, para professores do 1° ciclo do ensino básico, desenvolvido pelo Programa de Formação Contínua em Matemática, PFCM, da Escola Superior de Educação de Lisboa, foi facultado um panfleto aos professores do 1° ciclo que participaram no encontro onde era proposto que os mesmos resolvessem um desafio denominado «22 Mágico».

Passado uns anos, tive acesso ao enunciado e pareceu-me mesmo desafiante tentar resolvê-lo, pois para ter proposto pelos formadores do programa de Formação Contínua da Matemática no decorrer do 1° encontro entre formandos, de certo seria um desafio a quem o tentasse solucionar.

O desafio era:

Escreva um número natural com três algarismos todos diferentes, isto é, não pode ter nenhum algarismo repetido nem o zero, por exemplo, 342. Forme todos os números de 2 algarismos com os algarismos desse número: 34,43,23,32,24,42. Adicione esses seis números e divida essa soma pela soma dos três algarismos do número que escolheu. Que número obteve?
Repita com outro número. Que número obteve?
Parece-lhe que o resultado será sempre o mesmo? Porque será?

Para tentar dar resposta ao desafio apresentado resolvi a tarefa utilizando o exemplo proposto.

Deste modo cheguei a:

$$34 + 43 + 23 + 32 + 24 + 42 = 198$$

Soma dos algarismos do número inicial: $3 + 4 + 2 = 9$

$$198 : 9 = 22$$

Como seria de esperar, devido ao nome do desafio, o resultado obtido foi 22. De seguida pensei que com qualquer número que eu escolha, segundo as condições fornecidas, o resultado iria ser sempre 22, mas decidi confirmar com mais um exemplo:

Ex 1:

321
$32 + 31 + 23 + 21 + 13 + 12 = 132$
$3 + 2 + 1 = 6$
$132 : 6 = 22$

Depois de fazer com mais este exemplo, questionei-me devido ao porquê de ser frisado que o número não possa ser constituído por nenhum zero. Para tentar perceber resolvi escolher um número com um zero e outro com dois zeros e ver o que obteria como resultado:

Ex 2:

302
$30 + 32 + 03 + 02 + 23 + 20 = 110$
$3 + 0 + 2 = 5$
$110 : 5 = 22$

Ex 3:

400
$40 + 40 + 04 + 00 + 04 + 00 = 88$
$4 + 0 + 0 = 4$
$88 : 4 = 22$

Sem dúvida que ao resolver o desafio tendo os números formados com zeros é preciso ter mais atenção aos números que se formam, uma vez que alguns são simplesmente zero e outros compostos por apenas um algarismo (no qual eu coloquei o zero à esquerda, como se de outro qualquer algarismo se tratasse), tendo sido, talvez, por este motivo que no enunciado é frisado que não se formem números com zeros.

Depois de dar resposta à questão que me surgiu, apareceu-me outra que me pareceu pertinente: mas não funcionará com números constituídos por algarismos iguais ou será pelo mesmo motivo do zero, somente porque cria um pouco mais confusão na construção dos números? Foi para dar resposta a esta questão que escolhi mais um número com o qual experimentar:

Ex 4:

222
$22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 = 132$
$2 + 2 + 2 = 6$
$132 : 6 = 22$

Com o 222 também obtemos o mesmo resultado, mas ainda se torna mais complicado de colocarmos todas as combinações de dois algarismos possíveis de fazer uma vez que são todas iguais e podemos perder a noção de quantas vezes o número se repetirá.

Mas porque será que o resultado obtido é sempre o mesmo e porque será que é sempre 22? Foram estas as questões que me levaram a utilizar variáveis para simbolizar o valor de cada algarismo (figura 1).

Deste modo se comprova que utilizando qualquer número de três algarismos na resolução deste desafio o resultado obtido será sempre o mesmo: 22.

A curiosidade falou mais alto e depois de dar resposta às questões do desafio resolvi investigar um pouco mais e compreender o que se passava fazendo o mesmo desafio com um número natural composto por diferente número de algarismos (com 2, 4, 5, ...). Será que o número total de algarismos do número influencia o resultado final? Como? E será que o número de algarismos com que se têm de formar os restantes números também influencia o resultado final? De que modo?

Para dar resposta a estas questões comecei por utilizar alguns exemplos de números compostos apenas por 2 algarismos, tendo chegado a:

Ex 1:	**Ex 2:**	**Ex 3:**
12	36	30
$12 + 21 = 33$	$36 + 63 = 99$	$30 + 03 = 33$
$1 + 2 = 3$	$3 + 6 = 9$	$3 + 0 = 3$
$33 : 3 = 11$	$99 : 9 = 11$	$33 : 3 = 11$

O resultado obtido parece ser sempre 11. Mas porque será que o resultado obtido é sempre 11? Novamente com o raciocínio realizado anteriormente, temos que:

$$ab \rightarrow 10a + b$$

$$\frac{(10a + b) + (10b + a)}{a + b} = \frac{11a + 11b}{a + b} = \frac{11\,(a + b)}{a + b} = 11$$

Deste modo se comprova que utilizando qualquer número de dois algarismos na resolução deste desafio o resultado obtido será sempre o mesmo: 11.

E se for com um número de 4 algarismos? Será 33?

Ex 1:

4321
$43 + 42 + 41 + 34 + 32 + 31 + 24 + 23 + 21 + 14 + 13 + 12 = 330$
$4 + 3 + 2 + 1 = 10$
$330 : 10 = 33$

Ex 2:

1029
$10 + 12 + 19 + 01 + 02 + 09 + 21 + 20 + 29 + 91 + 90 + 92 = 396$
$1 + 0 + 2 + 9 = 12$
$396 : 12 = 33$

$$abc \rightarrow 100a + 10\,b + c$$

$$\frac{(10a + b) + (10a + c) + (10b + a) + (10b + c) + (10c + a) + (10c + b)}{a + b + c} = \frac{22a + 22b + 22\,c}{a + b + c} = \frac{22\,(a + b + c)}{a + b + c} = 22$$

Figura 1.

Número de algarismos do número escolhido	Número obtido
2	11
3	22
4	33
5	44
6	55
7	66
8	77
9	88
10	99

Tabela 1. Número obtido consoante o número de algarismos do número escolhido

Nº total de algarismos do nº (n)	Nº de algarismos de cada parcela	Resultado obtido	Expressão
2	2	11	$11 \times (n-1)$
3	2	22	$11 \times (n-1)$
3	3	222	$111 \times (n-1) \times (n-2)$
4	2	33	$11 \times (n-1)$
4	3	666	$111 \times (n-1) \times (n-2)$
4	4	6666	$1111 \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)$
5	2	44	$11 \times (n-1)$
5	3	1332	$111 \times (n-1) \times (n-2)$
5	4	26664	$1111 \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)$
5	5	266664	$11111 \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4)$

Tabela 2. Expressões algébricas consoante o número de algarismos do número escolhido e do número de algarismos de cada parcela a formar

Deste modo se comprova que utilizando qualquer número de quatro algarismos na resolução deste desafio o resultado obtido será sempre o mesmo: 33 (figura 2).

Com números compostos por até 10 algarismos, a regularidade mantém-se (ver Tabela 1).

Ao analisar a tabela percebe-se que o número obtido é múltiplo de 11. Além disto também é possível conjecturar que este múltiplo se obtém multiplicando 11 pelo número de algarismos do número menos um, ou seja:

Número obtido = $11 \times (n-1), n \geq 2$,
sendo n o número de algarismos que
constituem o número escolhido

Depois deste desafio outra questão se colocava: e se as parcelas que se têm de constituir com os números não tiverem apenas dois algarismos? Se for constituída cada uma por três algarismos? E por 4?

Depois de explorar alguns exemplos, como nos casos anteriores, percebi que existe uma relação entre o número total de algarismos que compõem o número escolhido, o número de algarismos com que se formam as parcelas e o resultado obtido, tendo, deste modo, chegado às expressões algébricas que nos indicam, tendo apenas conhecimento dessas duas características (número de algarismos do número e número de algarismos das parcelas a formar) qual o resultado final que iremos obter (ver Tabela 2).

Como é possível verificar, a expressão obtida está estritamente dependente do número de algarismos com que se pretende formar cada parcela, existindo para cada caso uma expressão distinta. Deste modo se percebe que a expressão anteriormente demonstrada apenas funciona quando se trabalha com parcelas constituídas por apenas 2 algarismos (os únicos casos estudados anteriormente), sendo essa a expressão apresentada nas linhas assim sombreadas a roxo claro.

Os exemplos, na tabela, com o sombreado roxo escuro referem-se aos casos em que as parcelas a formar são constituídas por 3 algarismos, sendo que a expressão dos números nesta situação difere da fórmula descoberta anteriormente no facto de um dos factores ser o número 111, em vez do 11, e ter sido acrescido de mais um factor $(n-2)$.

Para o caso das parcelas a formar com 4 algarismos, o factor 11 do primeiro caso, passa a 1111, e para além do acréscimo do factor $(n-2)$ como no exemplo anterior, também é acrescentado o factor $(n-3)$.

Ao analisarmos estas regularidades percebe-se que existe uma maneira de descobrir qual o resultado final sabendo apenas o número de algarismos do número com o qual queremos trabalhar, e o número de algarismos de cada parcela, uma vez que, independentemente da situação, seguem as mesmas regras. Para a obtenção da expressão geradora basta apenas saber qual o número de algarismos de cada parcela que se vai formar, sendo que o número de algarismos do número com o qual se quer trabalhar apenas serve para resolver a fórmula e chegar ao resultado final:

1.º Para saber qual o primeiro factor da expressão, basta saber que o número de algarismos das parcelas a formar é igual ao número de vezes que o algarismo 1 se repete, formando deste modo o primeiro factor da fórmula;

$$abcd \rightarrow 1000a + 100b + 10c + d$$

$$\frac{(10a+b)+(10a+c)+(10a+d)+(10b+a)+(10b+c)+(10b+d)+(10c+a)+(10c+b)}{a+b+c+d} +$$

$$+\frac{(10c+d)+(10d+a)+(10d+b)+(10d+c)}{a+b+c+d} = \frac{33a+33b+33c+33d}{a+b+c+d} = \frac{33(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 33$$

Figura 2.

2.º De seguida, tem que se multiplicar o número obtido no ponto anterior por $(n - x)$, sendo que o n representa o número total de algarismos do número inicial e x representa todos os números naturais de 1 até $n - 1$, inclusive.
3.º Por fim, basta substituir os valores e resolver a operação.

Por exemplo, para o caso de se querer formar parcelas com 3 algarismos:
1.º O primeiro factor será 111, uma vez que o algarismo 1 escreve-se 3 vezes (número de algarismos de cada parcela a formar);
2.º Multiplica-se o 111 por $(n - 1)$ e $(n - 2)$, já que se se formam parcelas com 3 algarismos os restantes factores terão de ser n menos os números naturais inferiores a 3, ou seja, 1 e 2;
3.º Neste caso chegou-se à fórmula $111 \times (n - 1) \times (n - 2)$. Agora sabendo o número de algarismos do número com o qual pretendemos resolver o desafio, basta substituir o n por esse valor e resolver a operação.

Deste modo parece que o desafio proposto inicialmente, e que foi um grande desafio aquando da sua resolução, se encontra resolvido para qualquer situação que seja proposta.

Este é um exemplo de um desafio que pode ser realizado com alunos, desde os mais pequenos, para os quais será um desafio interessante e provavelmente diferente dos que costumam realizar, até aos alunos da formação inicial com os quais já é possível chegar a várias generalizações.

Ana Caseiro
Escola Superior de Educação de Lisboa

O 22 Mágico

Envolver os alunos em descobertas matemáticas pode ter como ponto de partida qualquer motivo. O conhecimento deste desafio tornava-o interessante para ser explorado num dia 22. Mesmo tendo consciência de que realizar trabalho repetitivo pode ser importante para sistematizar aprendizagens, nem sempre se encontram situações em que este seja realizado com gosto já que a finalidade é descobrir outra matemática interessante.

Este desafio constitui um exemplo de como é possível envolver os alunos em trabalho repetitivo, mas mantendo o seu interesse já que o gosto da descoberta e a confirmação de conjecturas induz a um trabalho organizado e o envolvimento dos alunos em sustentar as descobertas e argumentar a favor das suas conclusões, cria ambientes de entusiasmo, em que o trabalho repetitivo é realizado sem esforço.

O desafio foi apresentado aos alunos em dois dias consecutivos, prevendo um tempo de trabalho de cerca de 45 m em cada um dos dias. No primeiro dia foi apresentado o desafio e permitiu-se que fossem realizadas explorações de forma livre e em grupo. Dentro do tempo previsto, reservou-se um período para que todos os grupos pudessem apresentar as suas conclusões e as conjecturas que começavam a surgir.

No segundo dia solicitou-se a elaboração de um relatório, também em grupo, que pudesse ser lido por qualquer pessoa e fosse suficientemente explícito para se perceber o que tinham descoberto com o trabalho realizado. O relatórios foram lidos e revistos em conjunto, assinalando-se o que era menos perceptível. Este trabalho revelou-se muito profícuo e importante no que respeita aspectos da comunicação matemática sempre difíceis de conseguir e tanto mais complicados quanto o trabalho solicitado teria de ser elaborado em grupo. Não se procedeu à reescrita dos relatórios uma vez que já havia sido muito absorvente o processo desenvolvido.

A exploração realizada no primeiro dia seguiu caminhos diferentes nos vários grupos de alunos. Enquanto uns tentaram encontrar números que se diferenciassem em alguns aspectos, por exemplo, cuja soma dos dígitos originasse valores bastante diferenciados, outros, na tentativa de «ganhar», e ganhar significava experimentar mais números, escolheram um conjunto de números cuja soma dos dígitos fosse sempre igual. Os grupos que escolheram esta opção verificaram que em números cuja soma dos dígitos fosse igual, a soma dos números formados pelos algarismos que o compunham era também igual, pelo que evitavam fazer a divisão final, abreviavam a adição e poderiam afirmar que tinham experimentado muitos números (ver figura 1 na página seguinte)

Nos grupos que seguiram opções diferentes a grande preocupação era encontrar estratégias que garantissem que as operações efectuadas estavam correctas e não havia lugar a erros.

Seguiram-se estratégias interessantes. Os diferentes alunos do grupo realizavam as operações separadamente e verificavam as operações uns dos outros. Encontraram formas de, utilizando as propriedades das operações, verificar a sua correcção (ver figura 2 na página 6) ou ainda escolheram números cujos dígitos somassem 10 de forma a facilitar a operação de divisão (ver figura 3 na página 6).

Saliente-se o trabalho esforçado dos grupos de alunos que propositadamente experimentaram números cuja soma dos dígitos originavam valores muito diferenciados por forma a comprovar ou negar que o resultado era sempre idêntico — o 22 era mágico. Assim foram testados os números 123, 456, 789 sistematicamente, ou ainda o 425, 987, 321.

Logo no primeiro dia, alguns alunos não resistiram à tentação de experimentar números com dígitos repetidos quando o enunciado afirmava que o não deveriam fazer. A atitude de desafio, talvez na procura de casos que não confirmassem o resultado, não deixou de ser interessante, tanto mais que não se enganaram na composição de números repetidos dos seis números com dois dígitos que deveriam adicionar. Testaram o 262 e depois o 333 e 444 (ver figura 4 na página seguinte).

Há ainda a referir que um grupo não resistiu e experimentou com quatro algarismos — 1423 — e um número com cinco algarismos — 2453, tendo concluído»Se for com cinco e com

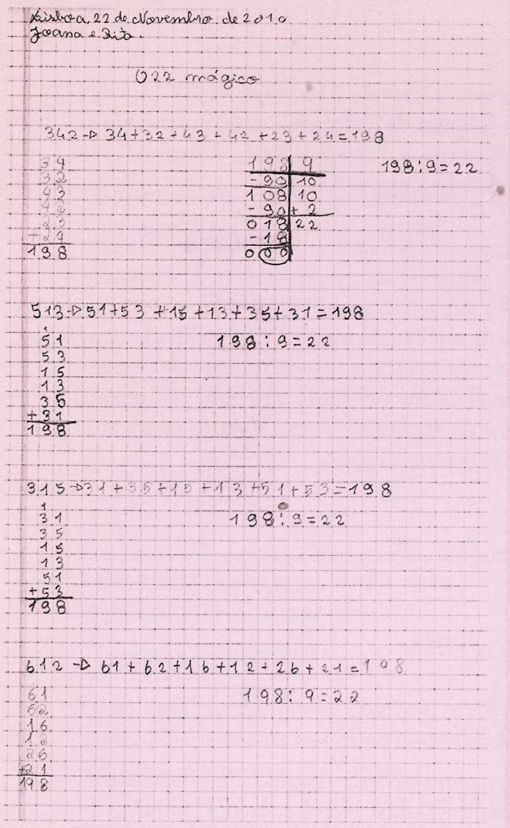


Figura 1

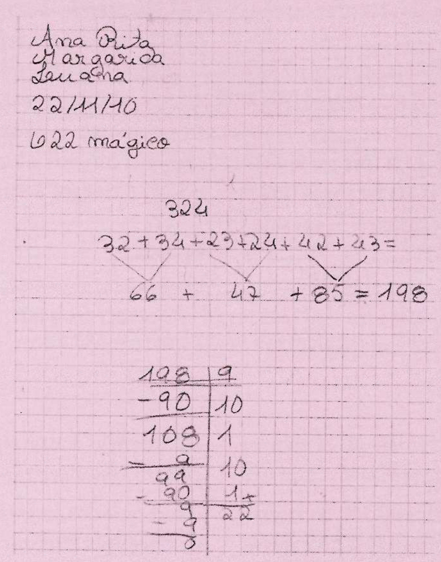


Figura 2

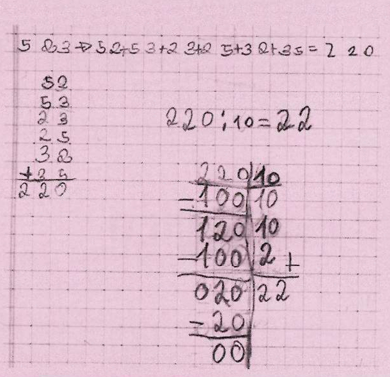


Figura 3

seis e por aí fora dá sempre capicua. Por exemplo 44, 55, 66, 77, 88...

Na aula seguinte verificou-se que tinha havido troca de informações, outras explorações e o trabalho tinha continuado fora da sala de aula. Os alunos estavam intrigados e continuaram a experimentar mas sem grande sistematização. Iniciou-se a aula tentando organizar todas as descobertas que já tinham sido efectivamente realizadas. Insistiram no registo de todos os números experimentados, com dígitos diferentes e iguais, com três dígitos ou mais. Conclui-se que não tinha havido tentativas com números de dois dígitos. As conjecturas iniciadas desafiavam a tentar números com 4, 5 ou mais dígitos, mas descobrir todas as combinações exigia um processo organizado e realizar a adição de todas as parcelas nem sempre era fácil. Enquanto ponderava a disponibilização ou não de calculadoras ou sugeria o recurso ao Magalhães, alguns grupos de alunos organizavam os números em colunas a fim de sistematizar a composição de todas as possibilidades com dois algarismos, o que permitia realizar adições parcelares resolvendo o problema. De seguida os alunos empenharam-se em redigir um relatório que explicitasse as suas ideias.

Redigir um relatório em grupo não é ainda tarefa fácil para alunos de 4° ano de escolaridade. Num dos grupos foi muito conflituoso a forma como se deveria explicitar o problema e acabaram por realmente fazer trabalho separado não conseguindo chegar a acordo. Um dos alunos pretendia explicitar o problema da seguinte forma:

"O 22 mágico"

No dia 22 de Novembro a professora escreveu a seguinte investigação: Escolhe um número de 3 algarismos. Depois escreve todas as maneiras do número de 3 algarismos que pensaste. A seguir somas o número que pensaste. E também somas as maneiras de 2 algarismos. Depois do número que somaste de 3 algarismos divide com as maneiras que somaste de 2 algarismos. E vê o que te dá.

O aluno pretendeu reproduzir a forma como entendeu o problema, não se apercebendo que a sua forma de comunicar as questões, não era perceptível pelos restantes membros do grupo.

Uma vez que não lhe conseguiram fazer perceber, porque é que esta redacção não poderia ser aceite pela maioria das outras pessoas, outro elemento do grupo fez uma proposta alternativa (figura 5) e o terceiro elemento elaborou o exemplo. O relatório final foi resultado do recorte e colagem das diferentes partes elaboradas. Sentiram ainda necessidade de juntar os exemplos que tão arduamente exploraram, muitos deles em casa, e um aviso (figura 6).

Nem todos os relatórios elaborados foram conseguidos a ponto de sistematizar as informações principais e muitos registavam conclusões pouco aceites na discussão pelo grande grupo, pelo que, os elementos desses grupos admitiram haver necessidade de reformulações e alguns admitiram mesmo ter registado conclusões pouco correctas. Seleccionar as informa-

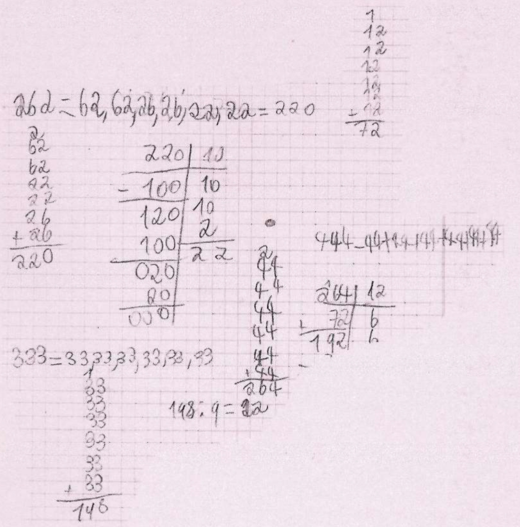


Figura 4

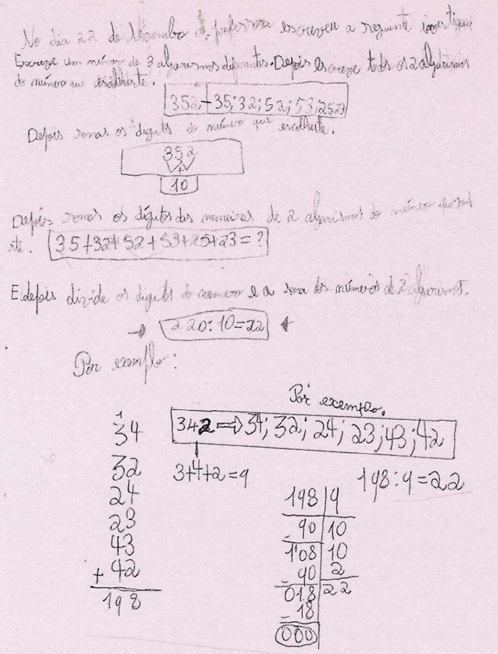


Figura 5

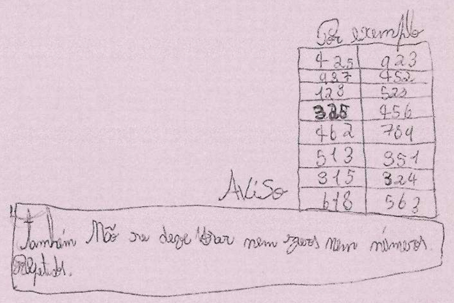
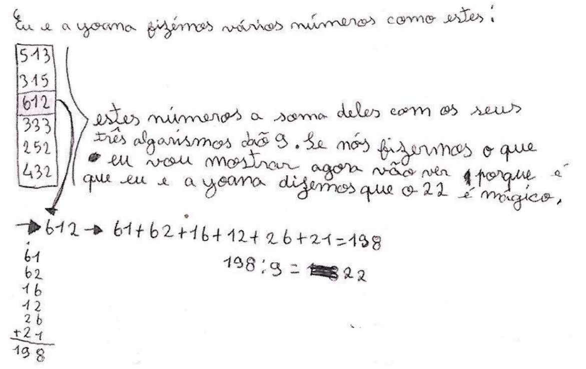


Figura 6

ções relevantes, escolher apenas um exemplo e não referir todos os números explorados, dar sentido ao relatório sem pretender colocar toda a informação revelou-se um processo muito pouco simples. A redacção de relatórios apela à utilização de um modo de escrito informativo não completamente dominado por todos os alunos. Não é de estranhar que um dos relatórios seja bastante similar às histórias e narrativas mais comuns à escrita realizada pelos alunos. Assim, com o título «A magia da matemática» um grupo relatava:



«Era uma vez um menino chamado Pedro que tentou fazer um truque que estava num livro. Fez o seguinte. escolheu um número que tinha três algarismos todos diferentes e sem zeros, por exemplo, 972, depois tentou fazer todos os números com dois algarismos todos diferentes com os algarismos do número que tinha escolhido, e foram estes: 97, 92, 72, 79, 27, 29, depois somou todos e deu esta conta: 97+92+72+79+27+29=396. Dividiu por 18, a soma dos dígitos do número que tinha escolhido, e deu esta conta: 396:18=22, depois tentou com outro número. A divisão resultou 22, logo descobriu que o 22 é mágico.»

Ainda o mesmo grupo continuou com «O encanto da Matemática»

«O Pedro ficou tão encantado que resolveu experimentar com dois dígitos e fez esta conta:

$$92 \rightarrow 29+92=121$$
$$121:11=11$$

Experimentou com outro número e a divisão resultou 11 e descobriu que o 11 também era mágico. Resolveu experimentar com 4 dígitos e deu esta conta:

$$1243 \rightarrow 12+14+13+21+24+23+41+42+43+34+32+31=330$$
$$330:10=33$$

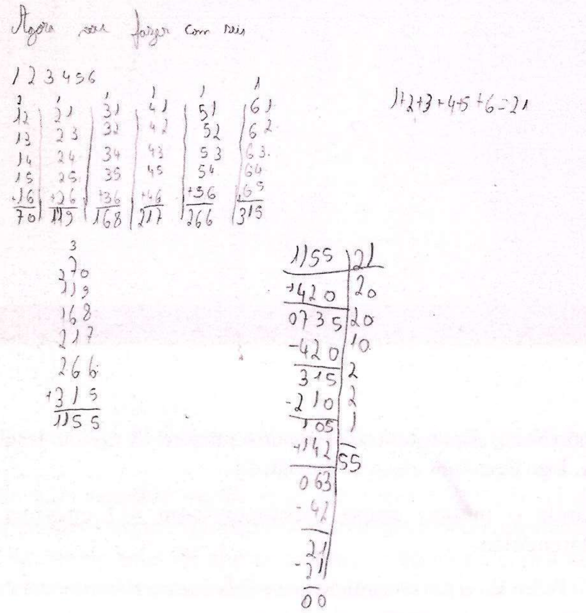
Experimentou com outro número e a divisão resultou 33 e descobriu que o 33 também era mágico. Resolveu experimentar com 5 dígitos e deu esta conta:

$$12345 \rightarrow 12+13+14+15+21+23+24+25+31+32+34+$$
$$+35+41+42+43+45+51+52+53+54=660$$
$$660:15=55$$

experimentou com outro número e a divisão também resultou 55. Descobriu que o 55 também era mágico. O Pedro descobriu a sequência que a partir do 33 era sempre mais 22 números. E o Pedro resolveu mostrar estas magias à mãe.»

O empenho em tentar encontrar uma regularidade não deu para perceber que havia erro nas operações efectuadas e de certa forma força-se o resultado para satisfazer uma conjectura. Na discussão final percebeu-se o erro, mas o contentamento por ter levantado uma hipótese, que mais ninguém tinha conseguido elaborar, não foi menor. Ficou o cuidado de rever com mais atenção.

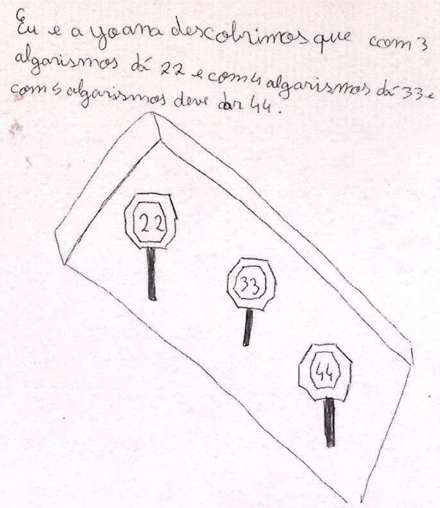
Outros grupos privilegiaram nos seus relatórios a descrição da maior quantidade de números encontrados e depois de exporem o problema inicial, explicaram:

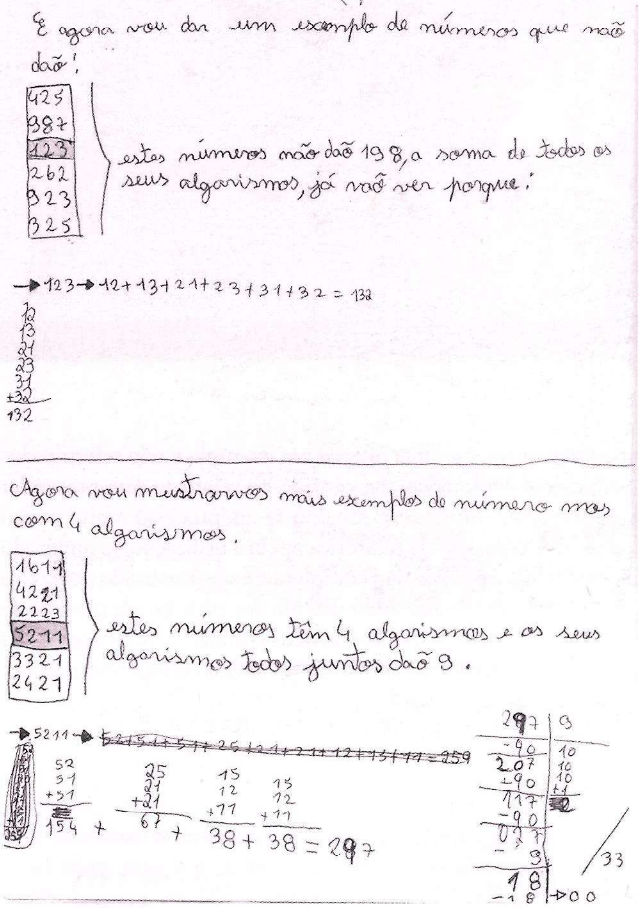


Um dos relatórios destacou-se pela descrição extensiva e pelo pormenor referido. uma vez que foi redigido a lápis não permitindo a digitalização com qualidade de leitura, fica a transcrição, já que permite, apesar da escrita pouco apurada, perceber o processo de trabalho:

«A professora escreveu para cada grupo pensar num número de três algarismos todos diferentes e explicou o que eram algarismos diferentes, eram números de zero a nove mas não se podia meter o zero nesse número por exemplo 327. E depois para formar todos os números de dois algarismos desse número por exemplo: 32, 37, 23, 27, 72, 73. A seguir adicionar esses números e dividir pela soma dos dígitos desse número. Primeiro vimos que quase todos os números quando se dividiam davam 22. E depois viu-se se fosse o número 315 a soma dos dígitos era 9 a soma dos números era 198, e vimos se fizéssemos números seguidos era o número com os mesmos algarismos. E depois houve pessoas que experimentaram com zero e houve outros que experimentaram com quatro que foi eu e a Carmo e agora vamos experimentar com 2 algarismos e agora penso que com dois é 11 e a sequência deve ser 11, 22, 33, 44, 55, 66 e por aí fora sempre a seguir a sequência. Com 2 é 11, com 3 é 22, com 4 é 33, com 5 é 44, com 6 é 55, com 7 é 66 e por aí fora.»

O relatório continua com exemplos de números de 3 dígitos, dois dígitos, apresentando as contas e termina:





Durante dois dias os alunos empenharam-se em realizar descobertas, e apesar de se terem envolvido em contas, muitas contas, esse trabalho, não foi desmotivante e até constituiu um desafio acrescido. Empenharam-se em organizar os dados e apresentar as conclusões de forma perceptível. Discutiram, reformularam, identificaram relações entre números, fizeram conjecturas, testaram na medida do possível, comunicaram as conclusões e deixaram-nos a informações do desejo de comunicar estas descobertas a outros. O desafio do 22 mágico revelou-se um trabalho estimulante para o processo de aprendizagem da turma.

Helena Maria Amaral

EB1 Parque Silva Porto

Agrupamento de Escolas Quinta de Marrocos