Conexões: Matemática e Física

Um caminho sempre a par

Alexandre Costa

A relação entre a física e a matemática é tão antiga como a sua existência. O aprofundamento da relação entre ambas tem vindo a evoluir de tal forma que não é possível, nos domínios de investigação de ponta, conceber o desenvolvimento de uma sem a existência da outra.

Esse facto, na física, é por demais evidente. Embora a física seja por natureza uma ciência empírica, a relação encontra-se de tal modo intrincada que há quem considere que «nos dias de hoje, tal é a obsessão com formalismo e matemática, que a física se perde de vista» (Magueijo, 2010, p. 7).

Embora exista algum exagero na afirmação anterior não deixa de ser inequívoca a relação crescente entre a investigação de ponta nas duas áreas desde o início do século XX, tendo a aplicação de novos métodos matemáticos (à época), como o cálculo tensorial (Kline, 1972, pp. 1122-1127), para o desenvolvimento da teoria da relatividade geral levado Einstein a afirmar (*ibid*, *ibidem*):

«Desde que os matemáticos invadiram a relatividade, eu próprio deixei de a entender».

De facto, nos últimos anos a relação entre a física e a matemática tornou-se tão intrincada que o desenvolvimento de uma está muitas vezes relacionada com os (ou condicionada pelos) desenvolvimentos na outra, o que faz com que estar na linha da frente da investigação em qualquer destas áreas implique um completo conhecimento dos desenvolvimentos da investigação na outra. Mas, embora o esforço para que tal acontecesse no passado fosse menor, assim tem sido desde sempre.

O desenvolvimento da agricultura, criou a necessidade de medir áreas e a vontade de medir a posição dos astros com precisão dia após, dia levou à necessidade de medir ângulos relativos e criar equações angulares para o movimento dos corpos celestes.

Novos problemas físicos sempre criaram a necessidade de desenvolver novos métodos matemáticos e assim continua a ser, trabalhando físicos e matemáticos conjuntamente nas questões mais complexas em que a investigação científica se encontra actualmente envolvida.

A construção do conhecimento físico e do conhecimento matemático

Independentemente de questões de notação e das diferenças no modo como os físicos e matemáticos olham para as situações, houve sempre uma interpenetração clara entre a física e a matemática que gerou a evolução destes dois domínios do conhecimento humano. Embora os biólogos tenham já demonstrado que não existe uma correspondência passo a passo entre o desenvolvimento da espécie (filogenia) e o desenvolvimento do indivíduo (ontogenia), sabe-se que existe uma relação clara entre a forma como um indivíduo se desenvolve e a forma como a espécie se desenvolveu. Também se sabe que, como foi primeiramente vislumbrado por Jean Piaget (1929, 1963), o desenvolvimento intelectual está claramente relacionado com a evolução biológica do indivíduo (Sprinthall e Sprinthall, 1993). O desenvolvimento intelectual é necessariamente lento e essencialmente qualitativo: a evolução da inteligência envolve o gradual aparecimento de diferentes fases, distinguidas pela construção de esquemas conceptuais qualitativamente diferentes. Embora Piaget compreenda a existência de processos dependentes do indivíduo, nas fases de desenvolvimento cognitivo, não considera essas diferenças individuais nem o mundo das emoções. Não estava interessado em diferenças individuais, uma vez que o seu interesse era claramente epistemológico. Para muitos, esta é a maior falha da sua teoria (Lawson, 1991) e um aspecto que não pode ser descurado por nenhum professor.

Respeitando as diferenças de desenvolvimento individuais, a aprendizagem da matemática e da física deve assentar numa progressão semelhante à que foi realizada no desenvolvimento destes domínios do saber.

E desenvolveram-se sempre a par. A física suporta-se na matemática e a matemática encontra o sentido da sua existência na análise física de fenómenos e processos, seja através da elegância dos métodos analíticos, seja pelo poder dos métodos de modelação numérica.

As primeiras operações matemáticas desenvolveram-se no sentido de acelerar o modo de contabilizar ganhos e perdas ou de contabilizar a quantidade de unidades numa dada quantidade de conjuntos de igual dimensão. Depois foi necessário aprender a medir áreas e volumes. E as situações foram crescendo em complexidade. O mesmo deve acontecer com a aprendizagem dos alunos. Reparem que não falo em ensino. Não é possível construir um prédio sem alicerces, do mesmo modo que não seria possível a Euler criar a sua matemática no século VI a.C.. De igual modo, um professor pode convencer-se que se ensinar bem cálculo tensorial a alunos eles aprenderão, mas tal só acontecerá se as fundações necessárias estiverem todas presentes na estrutura cognitiva dos alunos, ou seja, quando eles estiverem preparados para aprender.

Obviamente que, tendo que conseguir a aprendizagem, em 12 anos, por parte dos alunos, da matemática e da física fundamentais para poder possuir um pensamento físico e matemático, não se poderá deixar que os alunos tenham que tropeçar na necessidade de aprender, pois demorou ao homem actual cerca de 10000 anos para chegar ao presente estado do conhecimento por esta via. De igual modo, é necessário proceder a alguns saltos, não perdendo tempo nos erros de percurso cometidos pela espécie humana, como, por exemplo, no desenvolvimento do modelo geocêntrico, sem, no entanto, deixar de os apresentar sumariamente aos alunos.

É necessário começar pelas fundações e construir. E é preciso confrontar os alunos com problemas concretos que «forcem» a sua aprendizagem. A qualidade das aprendizagens será tanto maior quanto mais motivados estiverem os alunos, por sentirem que os conteúdos a ser estudados estão relacionados com a sua vivência pessoal.

Para muitos investigadores em educação (Gowin, 1981, Moreira e Buchweitz, 1993, Novak e Gowin, 1999, Mintzes *et al.*, 2000, etc.), uma boa aprendizagem exige a participação activa dos alunos, a fim de construir o seu próprio conhecimento. Na verdade, como o estudante, ainda que muito influenciado por factores sociais (Vygotsky, 1998), é o resultado da sua própria aprendizagem, esta constitui um processo individual e profundamente ligado à idiossincrasia do indivíduo (Gowin, 1981, p. 124 e 125), pelo que é necessária a sua participação activa em todos os processos (Papert e Harel, 1991).

Acredita-se actualmente que uma boa aprendizagem exige igualmente a criação de um ambiente de aprendizagem no qual os alunos interagem com objectos e ideias e negoceiam significados entre si e com os professores, para o que alguns autores chamam um ambiente construtivista da aprendizagem (Cunningham, Duffy e Knuth, 1993, Jonassen, 1994, Savery & Duffy, 1996, Gonçalves, 2004). Ao professor caberá um papel de facilitador da dinâmica de aprendizagem do aluno, o inverso do que acontecia na pedagogia passiva tradicional em que o professor era visto como um veículo de transmissão de conhecimentos. A aprendizagem deverá surgir da necessidade, mas essa necessidade tem que ser incentivada usando exemplos motivadores do quotidiano.

O currículo dos alunos e a concertação dos programas

No currículo dos alunos, a coordenação dos conteúdos de matemática e de física está, no essencial, bem conseguida, embora a concretização da sua leccionação nem sempre seja conseguida.

Os alunos iniciam formalmente a aprendizagem da física no 7° ano de escolaridade embora de um modo informal esse processo comece muito antes. Na altura em que iniciam a sua aprendizagem formal, existem alguns pré-requisitos matemáticos de base que são fundamentais, como as operações com potências de base 10, o trabalho com equações do primeiro grau, o trabalho com equações literais e os conceitos de proporcionalidade directa e inversa.

Até ao final do 3° ciclo do ensino básico, tornam-se necessários conhecimentos sobre equações da recta, de proporcionalidade quadrática e análise gráfica de rectas. Pode-se dizer que até este nível de ensino, sempre que os conteúdos matemáticos que constituem pré-requisitos para o ensino da física, foram sempre leccionados previamente, tal como no início do ensino secundário.

No ensino secundário, a utilização da trigonometria e das propriedades dos triângulos rectângulos encontra-se quase omnipresente no ensino da física, tendo aplicações frequentes nas definições paramétricas de vectores que têm mais do que uma dimensão espacial. Muitas vezes, porque um ou dois dos componentes de um vector não possui qualquer contribuição para a análise de um sistema e das alterações por ele sofridas, basta aos físicos, trabalhar com a componente do sistema na dimensão referida. Outras vezes, possuindo-se apenas a medida do vector e a sua orientação relativamente a um dos eixos do referencial (ou sistema de eixos de referência) é necessário obter a sua descrição cartesiana.

É frequente a utilização da decomposição do vector nos seus componentes, em particular, quando se pretende obter uma resultante da acção simultânea de vários componentes da mesma grandeza, como ocorre, por exemplo, no caso do cálculo das resultantes forças que actuam sobre um corpo (a soma vectorial). Para qualquer um vector força, $\vec{F}$, de medida F que descreva, no plano xy, um ângulo α, relativamente ao eixo dos xx, pode escrever-se o vector força em função dos seus componentes como sendo

$$\vec{F} = F.\cos(\alpha).\vec{i} + F.\sin(\alpha).\vec{j}(N) \qquad (3)$$

A utilização do círculo trigonométrico tem as mais diversas aplicações, em particular na análise de fenómenos periódicos oscilatórios, seja nos cursos científico-humanísticos, seja nos cursos profissionais. Na realidade, muitos fenómenos periódicos estudados pela física podem ser definidos como funções sinusoidais do tempo. No entanto, os máximo e mínimo das equações físicas são definidas pela amplitude da grandeza em estudo e não com +1 e −1, respectivamente, como sai das funções seno e co-seno. Por exemplo, quando se analisa a variação da corrente alternada num determinado ponto de um circuito eléctrico em função do tempo (uma função sinusoidal), a fase φ da corrente é definida em função do ângulo num círculo análogo ao trigonométrico de raio igual ao valor da intensidade máxima, Imax, onde pode ser projectado o valor da intensidade de corrente, I. Esse círculo recebe o nome de diagrama fasorial da corrente alternada (Albuquerque, 2007).

A função que define a intensidade da corrente em cada instante vem, assim,

$$I(t) = I\ \max.\sin(\varphi) = I\ \max.\sin(\varphi_0 + \omega t)(A) \qquad (4)$$

sendo φ_0 a fase inicial e $\omega = 2\pi/P$, em que P é o período, ou seja, o intervalo de tempo entre dois instantes sucessivos em que a onda se encontra na mesma fase φ.

Existem muitos exemplos de fenómenos leccionados no ensino secundário que podem ser analisados da perspectiva da sua periodicidade, como no caso anterior, nomeadamente osciladores harmónicos movimentando-se em movimento harmónico simples, o próprio movimento circular em torno de um círculo de raio R, em que o vector posição, $\vec{r}$, em cada instante pode ser definido (considerando a origem dos ângulos θ_i no eixo dos xx) como

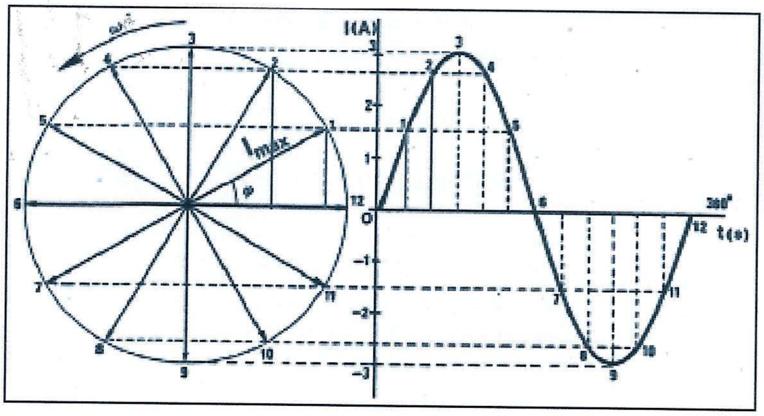

Figura 1. Representação da intensidade de corrente de uma corrente alternada em função do tempo vendo-se a projecção no diagrama fasorial.

$$\vec{r} = R.\cos(\theta_0 + \omega t).\vec{i} + R.\sin(\theta_0 + \omega t).\vec{j}(m) \qquad (5)$$

O cálculo diferencial usando derivadas é necessário apenas na Física do 12° Ano, pelo que a leccionação do conceito de derivada pela definição e de algumas regras de derivação no 11° Ano de Matemática se encontra perfeitamente adequado. Existem, no entanto, algumas escolas onde a leccionação desse conteúdo é deixada para o 12° Ano, o que cria, aos professores de física que leccionam a disciplina nesse ano, o constrangimento adicional de ter que ensinar as derivadas na disciplina de Física. Felizmente essas situações são a excepção e não a regra.

No final do ensino secundário, para a definição de grandezas envolvidas nos principais princípios de conservação, é necessário também recorrer a operações vectoriais.

Por exemplo, segundo o princípio de conservação da energia, uma das formas de alterar a energia de um sistema é através da realização de trabalho (por ele ou sobre ele). O trabalho é a medida da energia transferida para/de um sistema quando uma força actua sobre ele, enquanto ele se desloca, sendo a soma da energia fornecida/retirada pela componente da força que actua na direcção do deslocamento em cada instante e que se calcula através da equação 6 (Serway *et al.*, 2004; Tipler, 2004), onde se encontra patente o produto interno (produto escalar) de vectores

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad (6)$$

Embora, no ensino secundário, se utilizem normalmente apenas movimentos de corpos actuados por forças constantes e deslocamentos na mesma direcção ($\Delta\vec{r}$) que permitem a simplificação da expressão para

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \|\vec{F}\| \cdot \|\Delta\vec{r}\| \cdot \cos\alpha \quad (7)$$

em que α é o ângulo entre a força e o deslocamento, no 12° Ano de Física é já comum os docentes utilizarem o conceito de produto escalar com os alunos. Normalmente, nessa altura os alunos possuem já o conhecimento matemático necessário para a realização deste tipo de operações.

Também o produto externo (produto vectorial) de vectores é utilizado, em física, na definição de diversas grandezas; no entanto, neste caso, o conceito não é leccionado no ensino secundário na disciplina de Matemática.

Embora, num esforço de concertação entre os autores dos programas, a utilização de grandezas associadas à dinâmica de rotação tenha saído dos programas do ensino secundário, o produto externo de vectores continua a ser utilizado na definição da força magnética que actua uma carga num campo magnético que é dada (Serway *et al.*, 2004; Tipler, 2004) por

$$\vec{F_m} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad (8)$$

A necessidade de utilização do produto externo é muitas vezes minimizada no ensino Física, através da selecção de situações em que os exercícios possam ser resolvidos apenas utilizando a intensidade do vector força magnética

$$\|\vec{F_m}\| = q \cdot \|\vec{v}\| \times \|\vec{B}\| \cdot \sin\alpha \quad (9)$$

definindo-se, depois o sentido do vector pela regra da mão direita, pela regra do parafuso ou pela regra do saca-rolhas. No entanto, esta não é a forma mais adequada de resolver o problema, havendo muitos professores de física que optam por ensinar o produto vectorial de vectores, já que este tópico não é leccionado, no ensino secundário, na disciplina de matemática. Esta é uma situação que deveria ser corrigida na elaboração dos programas.

Apesar de nos actuais currículos parecer ter havido uma maior tentativa de concertação entre os autores dos programas de matemática e de física, existem ainda algumas questões por resolver no que diz respeito aos currículos.

Mas também a concertação entre docentes dos dois grupos disciplinares deveria estar mais presente na prática da didáctica das duas disciplinas, conjugando os conteúdos das duas disciplinas para a utilização nos problemas colocados aos alunos. O facto de trabalharem os conteúdos em ambas as disciplinas, mantendo a visão física na matemática e a visão matemática na física, decerto contribuiria (e afirmo por experiência própria que contribui) para produzir aprendizagens mais significativas, pois em cada disciplina estar-se-ia a valorizar aquilo que o aluno sabe da outra. Citando Ausubel (1968): «O factor mais importante que influencia a aprendizagem do aluno é o que ele sabe. Averigúem aquilo que ele sabe e ensinem em conformidade.»

A preocupação de concertar esforços deve ser aliada a uma preocupação em levar os alunos a resolver problemas em que as duas disciplinas estejam envolvidas. No final, isto contribuiria para que os alunos estivessem constantemente imersos nos processos de pensamento que definem estas duas áreas do conhecimento e como diria Geary (1995, p. 33 *apud* Mathews, 1997, p. 9) «Se quiser que alguém que saiba alguma coisa, ensine-lhe ... se quiser alguém que saiba alguma coisa e mantenha um conhecimento por um longo período de tempo, então deixe-a praticar».

Uma vez que é ao aluno que cabe aprender, e é ele que deve ser o foco do ensino, ao professor cabe a tarefa de apresentar situações problemáticas concretas que impliquem a descoberta dos conceitos e o ajudar a atalhar, cabendo-lhe ainda a difícil (para não dizer quase impossível) tarefa de «corrigir» concepções «erradas», que o estudante cria durante as suas interpretações ao longo da aprendizagem, pois «o conhecimento é adquirido, não por internalização de algo exterior, mas, pelo contrario, é algo construído a partir de dentro» (Osborne e Freiberg, 1985, p.82, *apud* Mathews, 1997, p. 9). Neste tipo de ensino, o aluno tem responsabilidade pelo que é ensinado e pelo que é aprendido, tendo que ser claro o compromisso com o desenvolvimento psicológico individual dos alunos, apesar da importância do desenvolvimento potencial numa perspectiva vygotskiana. Os alunos terão de ser motivados a descobrir por si próprios (Martin, Sexton, Wagner e Gerlovich, citado por Toh *et al.*, 2003, p. 197). De uma perspectiva psicológica, é preciso parar de olhar para a mente do aluno como um vazio que deve ser preenchido pelo professor. Em vez disso, é necessário valorizar as suas concepções e trabalhar sobre elas. A aprendizagem do aluno, bem como os conteúdos indirectos que utiliza na aprendizagem têm um papel crucial na construção dos seus conhecimentos.

A necessidade de normalização no ensino das duas disciplinas

Até ao século XVI, os homens de saber eram filósofos na verdadeira acepção da palavra, ou seja eram indivíduos que tocavam todos os domínios do saber e que quando tinham uma problema físico para resolver, que requeria uma nova matemática, parte do seu trabalho de investigação passava precisamente por obter as regras matemáticas que lhes permitissem simplificar os seus cálculos. A partir do século XVI começaram a surgir investigadores que cada vez mais assumiam interesses meramente físicos ou sobretudo matemáticos e que, por ausência de uma comunicação formal, geraram algumas diferenças no modo de tratamento das questões matemáticas na física e na matemática.

Um exemplo claro disso, embora também houvesse interesses nacionalistas envolvidos, ocorreu quando Isaac Newton teve a necessidade de demonstrar que, tal como havia proposto Johannes Kepler, as órbitas dos planetas em torno do Sol eram elípticas. A matemática existente à época não permitia a definição das equações do movimento numa órbita elíptica, o que levou a que Isaac Newton desenvolvesse uma matemática equivalente ao cálculo diferencial

(Fauvel, 1990; Struik, 1987; Boyer, 1959). Criou para este fim o chamado método das *fluxiões* (em inglês, *fluxions*) (Struik, 1987), que são, no essencial, as nossas *derivadas*, sendo o caso particular das derivadas em relação ao tempo.

Consideremos por exemplo, a posição de um corpo. Os fluxiões $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$ medem a variação das coordenadas espaciais por intervalo de tempo. Considerando o vector posição, $\vec{r}$, num referencial métrico cartesiano e ortonormado (com versores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), como sendo uma consequência das suas coordenadas espaciais, pode dizer-se que a variação de posição por intervalo de tempo, que recebe o nome de velocidade, é dada por

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}.\vec{k}(m) \qquad (10)$$

Obviamente, foi necessário desenvolver depois a operação inversa, que permitia a definição de posições dada a sua derivada e uma posição, o que levou Newton ao desenvolvimento do conceito de integração.

É provável que muitas partes dos *Principia* (Newton, 1990), tenham sido deduzidas por Newton através do método dos *fluxiões*, embora depois tenham sido convertidas ao método geométrico, por este ser mais compreensível para a comunidade científica da época.

Nessa mesma época, o alemão Gottfried Wilhelm von Leibnitz desenvolvia, por via paralela, a notação que ainda hoje é utilizada em matemática para o cálculo diferencial e integral. Note-se que as duas notações são equivalentes tendo-se

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (11)$$

Não obstante a formalização introduzida por Leibnitz, é ainda comum, para a maioria dos físicos, por simplicidade de notação, a utilização da simbologia dos *fluxiões* para as derivadas temporais de grandezas.

Situações similares ocorrem em diversos conteúdos específicos, embora a normalização tenda a eliminar as discrepâncias entre as duas áreas. Como exemplos, vou apenas citar dois casos particulares.

O primeiro refere-se à medida de um vector: enquanto em matemático a representação da medida de um vector, $\vec{a}$, é feita apenas pela sua norma, $\|\vec{a}\|$, em física pode ser representada pela norma, pelo módulo, $|\vec{a}|$, ou apenas por a, sendo neste caso difícil a sua distinção do valor da sua componente no caso de vectores unidimensionais (Costa & Rosa, 1996). Tal como no caso dos *fluxiões*, o uso das diferentes notações, quer por docentes, quer por alguns autores de manuais escolares, tem apenas por base uma diminuição dos caracteres usados na escrita.

O segundo exemplo de discrepância era o que tradicionalmente ocorria quando se falava de inclinação. Para os matemáticos os conceitos de declive e de inclinação são coincidentes; no entanto, para alguns físicos, e como se pode encontrar nalguns manuais escolares, embora o conceito de declive gráfico seja, obviamente, igual ao da matemática, o mesmo não acontece com o de inclinação, por exemplo de um plano inclinado. Enquanto na matemática a inclinação é dada pela tangente do ângulo α na base da subida, até recentemente, para a generalidade dos físicos, a inclinação era dada pela função seno do mesmo. Assim, na matemática, o ângulo $\alpha = 45°$ representa um declive igual a 1 e também uma inclinação de 100% ($\tan\alpha$); na física, o mesmo ângulo representa um declive igual a 1, mas uma inclinação de 70,7% ($\sin\alpha$).

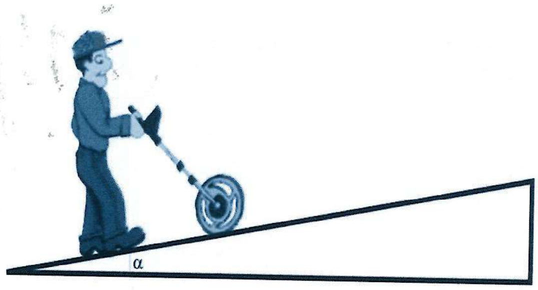

Figura 2. Medição da distância para determinação do desnível de uma estrada pelo método tradicional. O ângulo α é determinado usando um teodolito.

A razão justificativa deste facto prendia-se com o modo como era feita a medição: com um teodolito media-se o ângulo de inclinação e com uma fita ou uma roda de medição media-se a distância entre dois pontos num plano inclinado. A partir daí era definida a inclinação como sendo a razão entre a altura que era subida (cateto oposto) e a distância percorrida na trajectória (hipotenusa) que é, deste modo, dada pelo seno do ângulo de inclinação, α (figura 2). Obviamente que com o crescente aumento de imagens de satélite o que se passa a medir são distâncias horizontais, cada vez são mais os físicos e engenheiros que começam a utilizar a função tangente.

Mas, como se pode ver dos dois exemplos anteriores, os docentes de física e de matemática devem ter uma preocupação na normalização e devem trabalhar conjuntamente nesse sentido.

Reflexão final

Como se disse, tem havido uma clara melhoria na concertação dos programas de matemática e de física, embora existam ainda algumas arestas a ser limadas no futuro.

O grande óbice encontra-se agora no estabelecimento de pontes interdisciplinares na prática quotidiana da actividade lectiva. É preciso colocar ênfase na resolução de problemas que permitam aos alunos um cimentar dos seus conhecimentos sobre as duas disciplinas. A resolução de verdadeiros problemas é morosa e não pode esperar-se que seja feita no dia do teste: requer outro tipo de trabalho.

No entanto, a resolução de problemas é a melhor forma de cimentar conhecimentos de uma forma significativa. O trabalho hercúleo de ser professor está na concepção de problemas que, de facto, façam a diferença, pois é necessário fazê-los a cada ano pois no ano seguinte os problemas do ano anterior já são conhecidos e deixam de o ser.

Mas, mais do que a informação transmitida, é o trabalho desenvolvido de modo a levar os alunos a querer vencer o desafio da sua resolução que será o grande contributo do professor para as aprendizagens significativas dos seus alunos. O resto ... depende de pequenas células cinzentas.

Bibliografia

Albuquerque, R.O. (2007) *Análise de circuitos em corrente alternada*, Ed. Erica, São Paulo.

Ausubel, D. (1968) *Educational Psychology: A Cognitive View*. Holt, Rinehart & Winston, New York.

Costa, A. J., Rosa, A. M. (1996) O módulo e a norma, *Gazeta de Física* Vol. 19 (1), pp. 11–12.

Cunningham, D, Duffy T. M., Knuth, R. (1993) *Textbook of the Future*. In C. McKnight (Ed.) *Hypertext: A psychological perspective*, Horwood Pubs, London.

Fauvel, J. (Editor) (1990), *Let Newton Be! — a New Perspective on his Life and Works*, Oxford University Press.

Gonçalves, L. (2004) Haverá lugar para afectos na gestão curricular?, *Gestão Curricular-percursos de investigação*, Universidade de Aveiro, Aveiro, p. 159–172.

Gowin, D.B. (1981) *Educating*, 1st Ed. Cornell University Press, Ithaca.

Jonassen, D.H. (1994) Thinking Technology: Toward a constructivist design model, *Educational Technology*, *34* (3), 34–37.

Kline, Morris (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*, *Vol.* 3. Oxford University Press, Oxford.

Lawson, A (1991) Is Piaget's epistemic subject dead?, *Journal of Research in Science Teaching*, *28*, 581–592.

Magueijo, J. (2010) A anarquia e as leis da física, *Gazeta de Física*, Vol. 33 (2), pp. 2–8.

Mathews, M.R. (1997) Introductory comments on Philosophy and Constructivism in Science Education, *Science & Education* 6, 5–14.

Mintzes, J., Wandersee, J., Novak, J. (2000) *Ensinando Ciência para a compreensão*, Plátano Edições Técnicas, Lisboa.

Moreira, M., Buchweitz, B. (1993) *Novas Estratégias de Ensino e Aprendizagem*, Plátano Edições Técnicas, Lisboa.

Newton, I. (1990) *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, republicação da obra de 1687, Ed. Edusp — Nova Stella, São Paulo.

Novak, J., Gowin, D.B. (1999) *Aprender a Aprender*, 2ª ed., Plátano Edições Técnicas, Lisboa.

Papert, S., Harel, I. (1991) *Constructionism*, Ablex Publishing Corporation.

Piaget, J. (1929). *The Child's Conception of the World*. NY: Harcourt, Brace Jovanovich.

Savery, J. R., Duffy, T. M. (1996) *Problem based learning: An instructional model and its constructivist framework*. In Brent G. Wilson (Ed), *Constructivist learning environments: Case studies in instructional design*. Englewood Cliffs, NJ: Educational Technology Publication.

Serway, Raymond A.; Jewett, John W. (2004). *Physics for Scientists and Engineers* (6th ed. ed.). Brooks/Cole.

Sprinthall, N.A., Sprinthall, R.C., (1993) *Psicologia Educacional*, McGraw-Hill de Portugal, Lisboa.

Struik, D.J. (1987) *A Concise History of Mathematics*, ed. Dover.

Boyer, C.B. (1959) *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, 4th Ed., Ed. Dover.

Tipler, Paul (2004). *Physics for Scientists and Engineers: Mechanics, Oscillations and Waves, Thermodynamics, 5th ed.*. W. H. Freeman.

Toh, K.-A., Ho, B.-T., Chew, C.M.K., Riley II, J.P. (2003) Teaching, Teacher Knowledge and Constructivism, *Educational Research for Policy and Practice*, *2*, 195–204.

Vygotsky, L. S. (1998) *A Formação Social da Mente*. Ed. Martins Fontes, São Paulo, Brasil.

Alexandre Costa
Escola Secundária de Loulé

Matemática à Espreita: A temperatura calculada por um grilo

Os biólogos observaram que a temperatura influencia o metabolismo dos animais, acelerando-o. Por exemplo, o canto de grilos de uma determinada espécie está relacionado com a temperatura ambiente de um modo linear. Quanto maior a temperatura, maior o número de vezes que o grilo canta.

Em teoria, a relação é linear e tem uma determinada lei, diferente de espécie para espécie. Supõe-se que a primeira fórmula para a determinação da temperatura do ar a partir do canto dos grilos foi encontrada em finais do século XIX por um professor de Física. Para o verificar basta ouvir um grilo e usar um relógio. Por comodidade, regista-se o número de vezes que o grilo canta a cada período de 15 segundos. Procura-se uma média dos vários valores obtidos e, a partir daí, basta ter em conta a tal relação linear para se ficar a conhecer a temperatura ambiente.

Os grilos parecem saber qual é. Poderá ser um bom desafio para um dia de verão!