Conexões matemáticas e tecnologias

Introdução

As tecnologias digitais, como os computadores e as calculadoras gráficas, com a sua dinamicidade e interactividade, vieram colocar em evidência as conexões matemáticas, pelas imagens visuais das ideias matemáticas que oferecem e pelas diferentes formas de representação e facilidade de transição entre elas que proporcionam.

O trabalho que relaciona as diferentes janelas gráficas e algébricas num Ambiente de Geometria Dinâmica, a construção e exploração de modelos numa folha de cálculo, a recolha de dados reais através de sensores ou o desafio de resolver um problema com uma linguagem de programação, podem ser pontos de partida para boas discussões com os alunos quando o professor quer evidenciar conexões.

Como é sugerido por algumas orientações curriculares internacionais, «a tecnologia permite ainda esbater algumas das fronteiras artificiais existentes entre os diversos tópicos da álgebra, da geometria e da análise de dados, possibilitando que os alunos utilizem as suas ideias sobre uma determinada área para melhor compreenderem uma outra área da matemática» (NCTM, 2007, p. 28).

Para esta secção convidei cinco professores de Matemática: Elisabete Mariano, Cláudia Lança, João Grácio, Teresa Marques e Sandra Nobre. Todos aceitaram o desafio, contribuindo com artigos que caracterizam diferentes experiências, reflexões e investigações, conduzidas por eles na sala de aula de Matemática, em diferentes níveis de ensino, salientando o papel que diferentes tecnologias digitais têm no desenvolvimento de conexões matemáticas. Como não há espaço nesta revista temática para todos os testemunhos, incluímos apenas dois deles, saindo os restantes na próxima revista. A todos os autores agradeço a colaboração.

Referências

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Trabalho original publicado em 2000).

Apresentação

O artigo que segue é da responsabilidade da Cláudia Lança, professora do 3º ciclo da EB de Santa Clara de Évora, e envolve a recolha de dados reais através de sensores e a sua modelação com o auxílio da calculadora gráfica, com vista ao estudo da função de proporcionalidade inversa numa turma do 9º ano.

Os alunos são envolvidos em várias tarefas que passam pela recolha de dados reais através de sensores ligados a calculadoras gráficas, procurando que desenvolvam modelos matemáticos e os comparem com a realidade, permitindo estabelecer conexões e usar a matemática para interpretar e melhorar a compreensão sobre os fenómenos.

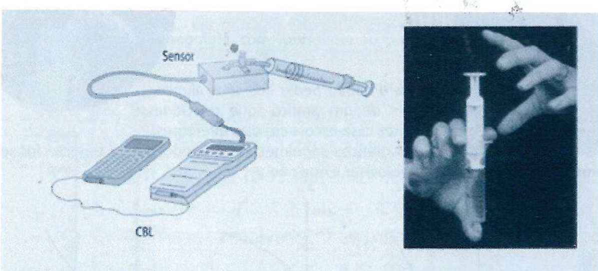
Descrição da experiência

Este artigo reporta-se a um trabalho de investigação desenvolvido no âmbito do mestrado em Educação Matemática, na Universidade de Évora. Foi realizado um estudo de caso tomando como protagonistas um grupo de quatro alunos de 9º ano de escolaridade de uma turma de uma escola do Alentejo, sujeitos a uma intervenção didáctica preparada com o professor da turma. Esta intervenção consistia numa sequência de tarefas de modelação («Pilhas em série», «Sob Pressão», «Até onde vemos?», «Descida de carrinhos pela rampa», «Espelhos e reflexões», e «Uma luz à distância») vocacionada para fazer emergir a função de proporcionalidade inversa como um modelo matemático necessário e poderoso. As tarefas foram variadas e corresponderam a autênticas situações reais. Neste texto é dado destaque a uma das questões do estudo — *Como é que a tecnologia, calculadoras gráficas e sensores, contribui para o desenvolvimento da actividade de modelação matemática pelos alunos?* — e discute-se o papel e as potencialidades dos sensores, interligadas com as da calculadora gráfica, na intervenção didáctica realizada. Em particular, apresentam-se os resultados do estudo que sugerem que os sensores proporcionaram uma estreita conexão entre o modelo matemático e o modelo real e a calculadora permitiu que os modelos fossem tratados como objectos concreto-abstractos, influenciando de forma determinante o desenvolvimento da actividade dos alunos.

Alguns dos objectivos da proposta pedagógica que evidenciam conexões matemáticas foram os de levar os alunos, nomeadamente, a: usarem dados e explorar que tipos de funções melhor se ajustam ou modelam esses dados; representarem relações funcionais de vários modos e passar de uns para outros; efectuarem uma interacção dinâmica entre o modelo e a situação real; e interpretarem, compreenderem e reconhecerem utilidade na relação entre a Matemática e a realidade.

Neste estudo, a actividade de modelação foi indissociável da tecnologia. A calculadora gráfica permitiu aos alunos verem, identificarem e explorarem, em grupo: as relações numéricas existentes entre os valores de uma variável e/ou de duas variáveis; as relações entre os dados recolhidos através das várias listas construídas (do produto, quociente, da média, etc.); as várias e distintas representações de uma relação funcional entre duas variáveis; os vários tipos de gráficos gerados por diferentes realidades; e construírem, interpretarem, explorarem, aperfeiçoarem e ajustarem os modelos matemáticos propostos, através da manipulação e interpretação grá-

"Sob Pressão"



Situação:

Quando um gás contido num recipiente é comprimido o volume e a pressão variam. Se exerceres pressão sobre o êmbolo de uma seringa tapando o orifício com o dedo de modo a não deixar sair o ar, aumentas a pressão (em atmosferas – atm). Então e o volume (em cm³) contido na seringa dependerá dessa pressão exercida? O que acontece ao volume à medida que a pressão aumenta?

Figura 1

Pressão p (em atm)	0,99	1,04	1,11	1,0[illegible]	1,25	1,3[illegible]	1,40	1,5[illegible]	1,71	1,8[illegible]	2,1	2,3[illegible]
Volume v (em cm³)	[illegible]	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7
$p \times v$	17,8[illegible]	17,6	17,7[illegible]	17,3	17,5	17,[illegible]	17,5[illegible]	17,2	17,1	16,9[illegible]	16,8	16,61

Figura 2

Distância da fonte luminosa aos sensores **d** (m) 46	0,5	0,6189	0,8029 9	0,956 26	1,1792	1,93 88	1,655 4
Intensidade da luz **i** (w.sr⁻¹) 42		0,9468	0,6044	0,44 52	0,33055	0,200 35	0,176 06
		0,59 65	0,487	0,42 573	0,389 79	0,28 227	0,29 145

Figura 3

fica destes com a situação real modelada, a fim de validarem o melhor. Além disso, teve um papel fundamental na construção de várias e distintas representações matemáticas de uma mesma realidade e de uma mesma função modeladora dessa realidade, e desenvolveu a capacidade de os alunos passarem de umas representações para outras. Os alunos efectuaram bastantes traduções entre a tabela e o gráfico da situação real e entre o gráfico e a expressão algébrica da função modeladora. A calculadora gráfica ajudou os alunos a confrontar o gráfico da função modeladora com o da situação real, e a dar um contexto a cada gráfico de cada função modeladora. Em vez de os gráficos serem encarados, pelos alunos, como uma «linha» passaram a estar interligados com fenómenos reais que rodeiam o quotidiano do aluno.

No estudo realizado, a calculadora gráfica serviu de suporte para que os alunos conseguissem, de uma forma mais simples, «visualizar» o comportamento do fenómeno real, formular conjecturas sobre os dados recolhidos, validar raciocínios e resultados, argumentar as constantes interacções entre os modelos e as suas respectivas situações reais modeladas, e experimentar os modelos matemáticos ao nível concreto, ou seja, permitir que aqueles objectos abstractos — por serem representações de relações entre variáveis — possam ser manipulados directamente.

Já no que diz respeito aos sensores, nesta investigação foram usados para medirem com grande precisão, de forma directa, as grandezas em estudo, possibilitando o estudo de situações inacessíveis de outro modo. Recolheram com grande precisão de forma organizada os dados da situação real e introduziram-nos nas listas da calculadora gráfica. Note-se que os sensores conseguem efectuar a recolha de dados com grande precisão, uma vez que os erros que cometem ao efectuarem as medições são ínfimos.

No estudo realizado, de um modo geral, nas tarefas com recurso a sensores, tanto na situação de proporcionalidade directa (tarefa das «Pilhas em série»), como nas situações de proporcionalidade inversa (tarefas «Sob pressão» e «Uma luz à distância», figura 1), os valores calculados das respectivas constantes de proporcionalidade eram muito precisos. No primeiro caso, os resultados da divisão dos valores da variável dependente pelos valores da variável independente eram idênticos ao valor 1,6, na unidade e primeira casa decimal, só se distinguindo a partir das centésimas, enquanto no segundo caso, os resultados dos produtos entre os valores das variáveis alternavam, aumentando e diminuindo, de forma muito próxima à volta de um determinado valor, respectivamente de 17 (figura 2) e de 0,41 (figura 3), ou seja na primeira tarefa só se diferenciavam pelas casas decimais e na segunda, a partir das milésimas.

Pelo rigor da recolha, os sensores, como instrumentos de modelação, ao terem permitido que os dados recolhidos de cada situação real se aproximassem bastante dos valores do *mundo real*, contribuíram de forma decisiva para que os alunos fizessem uma interpretação mais correcta, fácil e rápida da situação real em estudo. É de salientar, por exemplo, o facto de que a utilização dos dados recolhidos pelos sensores, ao ter proporcionado um menor desvio das constantes associadas aos modelos, levou a que os alunos se sentissem mais seguros a construir um modelo matemático e a desenvolverem a sua actividade de modelação.

A análise empírica dos dados obtidos neste estudo parece reforçar a ideia de que os sensores influenciaram o desenvolvimento da actividade de modelação dos alunos, uma vez que ao filtrarem com grande precisão as informações da realidade, permitem uma conexão mais estreita entre o modelo matemático, idealizado pelos alunos para a representação da situação real, e o modelo real, simplificado para sala de aula.

Referência

Lança, C. (2007). *Potencialidades das tarefas de modelação matemática com recurso a calculadoras gráficas e sensores na aprendizagem matemática dos alunos* (Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação e na Especialidade de Educação Matemática, Universidade de Évora).

Apresentação

A Teresa Marques, professora de Matemática do 2° ciclo, na EB 2,3 de Azeitão, enviou-nos este artigo que integra três pequenas histórias de aprendizagem da Matemática com alunos do 5° ano, quando trabalham em projectos que visam a resolução de problemas, com a linguagem de programação *Scratch*[1].

Os alunos do 5° ano, perante uma ferramenta que permite criar projectos animados — o *Scratch*, dão largas à sua imaginação e põem em acção um currículo que vai para além do estabelecido e que se traduz inicialmente por aprendizagens informais. A professora envolve-os em desafios e é simultaneamente desafiada, alimenta e orienta a discussão sobre temas e conteúdos que surgem, entre a experimentação e o erro, dá atenção aos processos e constitui o elemento mediador que ajuda a estabelecer as conexões facilitadoras da compreensão.

Descrição da experiência

O trabalho de investigação e aperfeiçoamento das linguagens e ambientes de programação para jovens, desenvolvido no Massachusetts Institute of Technology, produziu a ferramenta Scratch inspirada nas linguagens LOGO e Squeak (Etoys), mas pretendendo ser diferente de outros ambientes: mais simples, ambiente gráfico, mais fácil de utilizar e mais intuitivo. Possibilita a criação de histórias interactivas, animações, jogos, músicas e a partilha dessas criações na Internet. Foi concebido com a intenção de ajudar os jovens (desde os oito anos, ou menos desde que com mediação apropriada) a desenvolver competências de aprendizagem para o século XXI (destacando-se a competência transversal de resolução de problemas). Os seus criadores acreditam que, com o *Scratch*, podem aprender-se noções matemáticas e informáticas importantes, aprofundando simultaneamente o conhecimento e a compreensão do processo de concepção/criação (*design*) e despertando a sensibilidade crítica para os vários tipos de *media* que nos rodeiam.

Quando em 2007 iniciei o trabalho com alunos (na sala de aula e no *Clube Scratch time*) usando esta ferramenta (em combinação com outras), estava longe de ter compreendido todo o seu potencial. De surpresa em surpresa, os acontecimentos imprevistos foram-se/vão-se sucedendo. As histórias em que o Scratch foi catalizador de reacções e conexões importantes, sempre ligado à acção do Professor, são tantas que não é fácil seleccionar os momentos mais significativos. Seguem-se, pois, apenas algumas Histórias de Conexões e Reacções catalizadas pelo *Scratch* e pelo Professor (HCRSP). Muito ficará de fora ... para ser contado um dia!

HCRSP 1. Ainda mal havíamos começado a trabalhar com o Scratch e eu balbuciado umas coisas sobre um certo *x* e *y* que permitiam conhecer a posição dos objectos programáveis no ecrã e colocá-los onde desejássemos, o Fábio — 5.° ano, 9 anos — apareceu com um projecto feito em casa (o primeiro da turma) em que combinou a Geometria — Sólidos (unidade em que estávamos a trabalhar), a utilização do referencial cartesiano e... o som da sua voz! Eu nem havia ainda percebido que se podia gravar directamente a voz no Scratch e incluir esses elementos (ou outros) nos projectos. Na aula de Matemática, a turma entusiasmada... o Fábio explicando aos colegas tudo o que tinha feito, eu calada a beber com eles e a adivinhar o que estaria para vir com um começo daqueles... http://kids.sapo.pt/scratch/projects/bocas/164 .

HCRSP 2a. *E que tal fazermos um projecto com aquele problema do Caracol que sobe de dia e desce de noite? Se fizerem em Scratch o «filme» da história, conseguem chegar à solução...* Não podia prever o que se seguiu. E só ficarão aqui registados dois momentos. A Sara (5.° ano, 10 anos) produziu um bloco longo de programação que dava erro. Já desesperava quando a fui ajudar: *Sara, parte o bloco em porções mais pequenas... é o que devemos fazer com os problemas, e vai analisando cada segmento tentando descobrir em que local está o erro.* Rapidamente encontrou um erro nos valores usados e corrigiu-o. Uns meses mais tarde, durante a realização de uma prova global (a Sara era uma aluna com algumas dificuldades), exclamou em voz alta: *Oh professora! Estava aqui aflita mas vou usar uma coisa que aprendi no Scratch!* Mais tarde quis saber do que se tratava. *A professora disse para dividir o problema do Scratch porque havia aqui um erro... aquilo do caracol... e eu dividi o problema... lembrei-me de dividir também o problema da área da sala do capítulo que estava no teste... E eu separei, dividi o rectângulo, depois dividi o quadradinho, dividi não, calculei a área de cada um e depois juntei as duas áreas e deu logo a área certa!*

HCRSP 2b. Ainda às voltas com o problema do Caracol, ao olhar para a marcação das linhas no muro (simbolizando os passos) percebi que as distâncias não eram idênticas e perguntei à Bia e à Inês (5.° ano) como haviam feito. *Com centímetros!... Centímetros? Sim, usámos a régua em cima do ecrã! Hummmmmm... e que tal pensar numa forma correcta de proceder que garanta realmente o mesmo valor para as distâncias?*

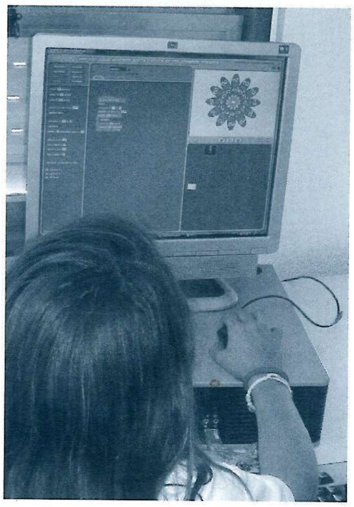


Figura 1

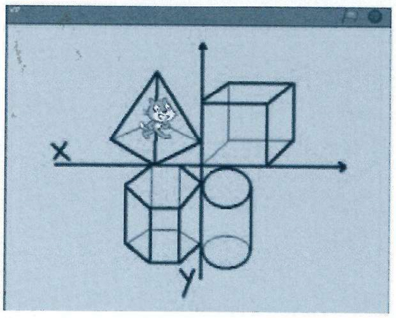


Figura 3

Desafiei-as a encontrar uma forma de corrigir a situação...

Mas como? ... Digam-me lá, ao longo de que eixo é que se distribuem as vossas linhas de marcação? Do y. ... E o y não tem valores marcados sobre ele tal como uma régua?... Ah! Pois tem. ... Então pensem. Se aqui, por exemplo, forem –240 e tiverem de subir 40 passos para a linha ficar a essa distância da primeira, para onde a enviam?... Fica no –280, professora?... Olhem novamente para o eixo ... (uma delas foi buscar ao caderno, sem eu pedir, a ficha de trabalho sobre referencial cartesiano)... *aqui é zero, e aqui?* (fui descendo) *Ah, é –1. E aqui? –2. Então, quando descemos acontece o quê?* Lá perceberam (sem eu referir o termo valor absoluto) que o número aumentava o valor, embora fosse cada vez mais pequenino (por serem negativos). *Então voltemos ao problema... –240... se eu subir 40? ... Ah! Fica no –200. Ok e depois? ... Se colocarmos a outra linha à mesma distância? ... Então... Tira-se 40 e fica –160... não é professora?... Ora bem, estes valores são exemplos: agora coloquem o rato para ver a posição da primeira linha, mantenham o x constante e vão subindo, mantendo sempre a distância.* Avançaram. Passado algum tempo chamaram-me. *Oh professora! A gente fez tudo certinho e esta distância não ficou igual! Veja a conta* (vi... era um erro daqueles...). *Meninas... 4 para 13? Ai professora, pois é... tem um erro. Já perceberam que têm de estar com atenção a fazer os cálculos? Qualquer distracção...* Continuaram. Passado algum tempo chamaram novamente: *Ai professora... e agora? Estamos no –17 e como é que ele anda 40 para cima? Para onde é que vai?* Desafio difícil. Operar com números relativos no 5.° ano é algo ainda um pouco fora do alcance... enquanto estamos apenas nos números negativos (ou nos positivos) a coisa vai... cruzar o zero, passar de negativos a positivos... é algo diferente. Mais uma vez tomei consciência de como este desafio do Caracol tem permitido os mais diversos tipos de situações problemáticas. Sem soluções formatadas ou definições, apenas levando-as a pensar como seria possível cruzar o zero gastando os 17 e passando aos positivos, a Bia propôs algo como: *17 – 40 ? ... Não. É ao contrário... Ah! Tem de ser 40 – 17... Fazem a conta. Dá 23. Mas agora é nos positivos!... Então professora, agora fazemos mais... Agora é sempre mais!... Fazemos 40 mais 23?... Claro!*

(...) tantas histórias mais como estas... e sempre o imprevisto, o improviso, a surpresa, o professor como orquestrador, ele próprio outra (possível) enzima ajudando a facilitar as reacções induzidas pelo trabalho com o Scratch. Catalizadores que funcionam apenas se conectados: as tecnologias e o elemento humano. É isto que o Scratch permite, especialmente se combinado com outras ferramentas e com a mediação oportuna e adequada do Professor. Acresce que, para desenvolver projectos em Scratch por si imaginados ou resultando de desafios, os alunos precisam de outros recursos e de aprofundar com rigor conteúdos «clássicos» (Matemática, Língua Portuguesa, outras línguas, qualquer tema... qualquer assunto). Aprender assim faz mais sentido: o conteúdo surge por necessidade. Depois é possível trabalhar esse conteúdo separadamente, de forma mais clássica com exercícios de consolidação de procedimentos e conectando-o com outros e com o trabalho do aluno, sempre... O referencial cartesiano é disso um bom exemplo. Nunca começo por «ensiná-lo» formalmente para trabalharem no Scratch. Eles aprendem, ao programar, que o *x* e o *y* determinam a posição de cada objecto. Muito antes de saberem o que isso significa ou como funciona, usam-no com mestria e transportam os objectos para onde desejam. Só mais tarde trabalho na aula o conceito e nem me tinha apercebido da importância do que fazemos (o referencial cartesiano é um conteúdo de 7.° ano que antecipo no 5.°) até há alguns dias atrás, quando uma aluna de uma turma com muitas dificuldades (que apenas conheci já no 6.° ano, mas que frequentava em peso o *Clube Scratch time* uma vez por semana) me contou isto: *Ontem a nossa professora de Matemática — 7.° ano — deu o referencial cartesiano e ficou muito espantada porque a nossa turma é fraca mas nós do Clube Scratch time sabíamos tudo o que ela estava a ensinar!*

Nota

1 Sobre esta linguagem de programação, ver números anteriores da Revista.