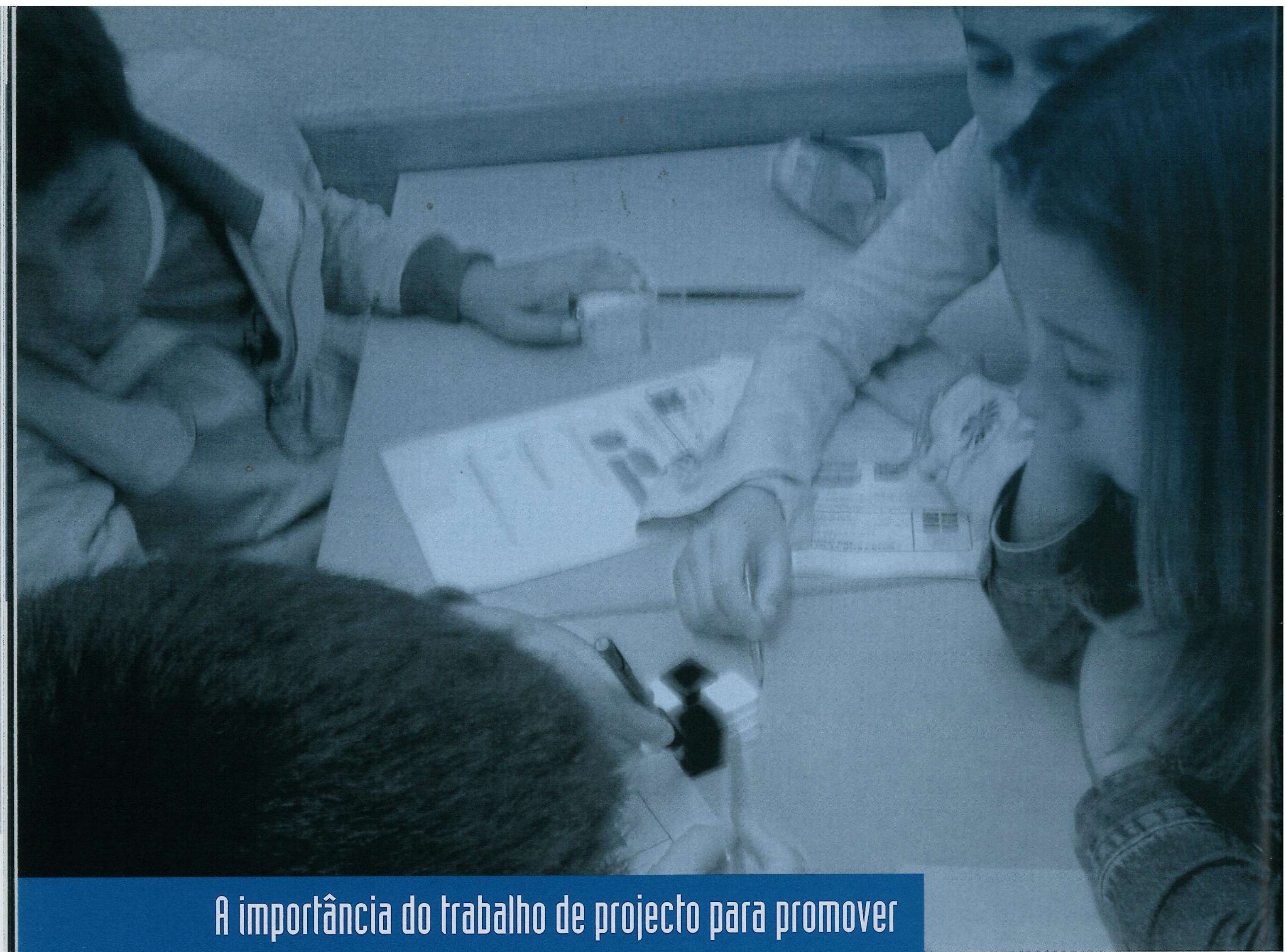


# A importância do trabalho de projecto para promover a competência matemática dos alunos

Ana Paula Mestre e Susana Carreira

## Nota Prévia

Desde há muito que se reconhece a importância de práticas de ensino que tornem os nossos alunos matematicamente competentes e que lhes permitam a mobilização de saberes na sua vida futura. Apesar desta intenção, não tem sido unânime o sentido que se deve atribuir à noção de matematicamente competente. «Ser matematicamente competente na sociedade actual é algo de caracterização complexa mas implica de certeza capacidades e modos de usar pontos de vista matemáticos sobre as situações que não é possível aprender à priori» (Matos, 2005, p. 78).

A ligação da matemática ao real apresenta-se, aos nossos alunos, como algo de pouco palpável. Um olhar mais amplo sobre a realidade, contemplando a inclusão de problemas e «histórias» concretas, permite uma maior identificação dos jovens com a matemática, coloca uma tónica mais apelativa sobre o saber matemático e ajuda à estruturação daquilo a que chamamos de pensamento matemático.

Tendo por base aspectos das vivências dos alunos e apostando na metodologia de trabalho de projecto, desenvolveu-se, no 6.° ano do ensino básico, uma experiência de desenvolvimento curricular denominada «Histórias com a Matemática». O propósito deste trabalho consistiu na concepção de histórias contendo ideias matemáticas, a partir da contribuição dos alunos e com base nas suas experiências, descobertas, conhecimentos e imaginação. Estas histórias foram sustentando e originando a exploração dos conteúdos matemáticos, de uma forma bastante flexível e inter-conectada, uma vez que os conceitos e métodos surgiram ao longo do desenrolar da história, numa perspectiva em que as conexões matemáticas predominaram.

## 1. O Trabalho de Projecto

Um primeiro ponto a realçar sobre a temática do trabalho de projecto prende-se com o facto de não encontramos uma definição única para o descrever. Diversas formulações são propostas por investigadores e teóricos e, devido à sua complexidade, torna-se particularmente difícil enquadrar esta pedagogia numa teoria ou num movimento específico. Importa, contudo, compreender a sua origem, conceitos-chave, fases, objectivos e características.

### A origem do trabalho de projecto

Os embriões da pedagogia do projecto aparecem expressos pelo pensamento pragmático dos norte-americanos, nos anos de 1915 a 1920 — Dewey (1916) e Kilpatrick (1918). Boutinet (1990) menciona que estes pedagogos «procuraram opor à pedagogia tradicional, que se relevava demasiado dispendiosa em relação aos ganhos obtidos, uma pedagogia progressista, ainda denominada de pedagogia aberta, na qual o aluno se tornava actor da sua formação, por intermédio de aprendizagens concretas e significativas para si» (p. 193). Sob este desígnio, Dewey utilizava frequentemente a expressão *learning by doing*. Um pensamento como este é corroborado por defensores da nova educação; refira-se Freinet, Montessori, Decroly, Makarenko que «valorizavam a liberdade da criança, as suas necessidades de actividades, numa palavra, a escola ligada à vida: são experiências que o próprio aluno realiza num meio educativo apropriado que são factores de aprendizagem (Boutinet, 1990, p. 193).

Mas foram as investigações levadas a cabo por William Kilpatrick que vieram a ter uma importância crucial na pedagogia do trabalho de projecto. Este autor procurou sistematizar vários aspectos importantes relativos ao processo de ensino-aprendizagem intrinsecamente ligados ao conceito de «projecto». Identificou três elementos centrais: (i) uma acção, que é passível de se realizar com empenhamento pessoal, (ii) a intencionalidade dessa acção, que pressupõe um objectivo ou propósito, e por último, (iii) a inserção num contexto social.

Kilpatrick foi fortemente criticado por não referir explicitamente nos seus escritos a integração da resolução de problemas no trabalho de projecto, especialmente no contexto educativo americano. Contudo, muitos defendem que a resolução de problemas estará sempre implícita no trabalho de projecto e é indissociável deste. Paulo Abrantes ilustra este pensamento na sua tese de doutoramento, advogando que:

> «O objectivo de um projecto pode ser considerado um problema no sentido em que se está perante uma situação para a qual se pretende encontrar uma resposta sendo necessário desenvolver a estratégia para o fazer. Mesmo quando não está à partida (ainda) formulado como problema, um projecto gera necessariamente problemas que correspondem a questões colocadas no início ou que surgem no desenvolvimento do trabalho» (Abrantes, 1994, p. 79–80).

No entender de Nunes e Ponte (2008), um projecto pode ser dividido em cinco fases. A primeira, denominada de *concepção do projecto*, engloba a formulação de um problema e a definição de objectivos a atingir. Uma segunda fase centra-se na *planificação do trabalho*, pressupõe a definição, distribuição e orientação de tarefas, culminando com a avaliação do trabalho realizado. A terceira fase é de *intervenção ou desenvolvimento*, incluindo momentos de reflexão e discussão com vista à auto-regulação do projecto. O processo de análise deverá ser sistemático, construindo-se e adaptando-se novos materiais, reflectindo-se sobre os obstáculos e sucessos obtidos. A quarta fase refere-se à *finalização e avaliação* dos produtos do projecto. A elaboração de um relatório escrito final com a recolha e análise de dados e os resultados conseguidos é recomendável nesta fase. Por fim, a quinta fase diz respeito à *divulgação e disseminação de resultados*. A divulgação do projecto à comunidade permite que as experiências sejam apropriadas e se tornem num factor de melhoria de acções futuras.

### Características fundamentais do trabalho de projecto

Nas palavras de Paulo Abrantes (1994), destacam-se alguns elementos basilares na pedagogia do projecto: *a actividade intencional; a responsabilidade e a autonomia dos alunos; a autenticidade do projecto; a complexidade e as actividades de resolução de problemas; o carácter faseado e prolongado do projecto.*

Todas estas características não devem ser entendidas como únicas e definitivas e, muito menos, como garantias de resultados particulares. Por isso, Paulo Abrantes defendeu o trabalho de projecto «como uma *filosofia* ou uma *perspectiva pedagógica*, tanto mais que o seu valor educativo reside essencialmente no carácter aberto, flexível e contextualizado das situações de aprendizagem» (Abrantes, 1994, p. 85).

## 2. Relato de uma Experiência

A partir das suas vivências e das suas contribuições autênticas, pretendeu-se conceber com os alunos uma história que permitisse a exploração de conteúdos e conexões matemáticas, envolvendo tarefas experimentais e seguindo uma metodologia de trabalho de projecto. Centrando-se o primeiro capítulo da história no tema de Geometria, exploraram-se áreas, perímetros e sequências e estabeleceram-se diversas conexões matemáticas.

Apresentam-se de seguida algumas das tarefas desenvolvidas na sala de aula, ilustrando-se o trabalho realizado por vários alunos de uma turma.

### Uma história

O protagonista da história é um adolescente chamado Henrique. Ao efectuar o percurso de carro até ao centro comercial, Henrique encontra relações entre a Matemática e o meio circundante. Através da janela, observa algo que lhe desperta a atenção — um caniçal. Na escola e nas aulas de Matemática ele andava a estudar as formas cilíndricas. E gostava de brincar com canas. Chegado ao *shopping*, reconhece o tecto revestido com canas, isolamento habitualmente utilizado nos tectos das antigas casas algarvias. Achou que seria interessante cobrir o tecto do seu sótão daquela forma...

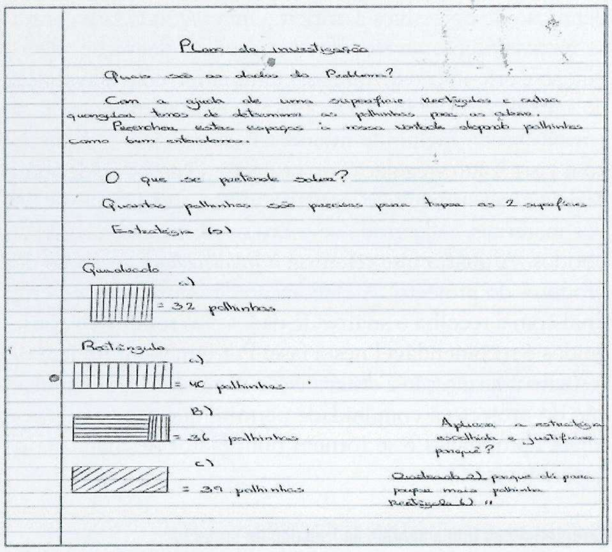



Figura 1. Registo do Grupo A relativo à primeira tarefa

## O problema das canas...

Como forma de introduzir a situação na sala de aula utilizou-se um *PowerPoint* com algumas imagens sugestivas de canas, bambus e cilindros presentes no quotidiano de todos nós. A seguir, foi apresentado o ponto de partida para o episódio da ida ao *shopping*.

Os alunos levaram canas para a aula e o tecto do sótão começou por ser o tampo de uma mesa da sala de aula, de forma rectangular. Numa primeira fase, os alunos simularam o preenchimento dessa superfície. A dada altura, a questão evoluiu para preencher a superfície, desperdiçando o mínimo de canas possível.

Em seguida, a turma foi dividida em grupos de trabalho, de quatro a cinco elementos, e colocaram-se duas situações problemáticas. A primeira, de carácter experimental, propunha que, com o auxílio de materiais manipulativos, se efectuassem diversos ensaios de forma a optimizar o preenchimento de uma superfície. Os alunos receberam duas placas de *musgami*, uma rectangular e outra quadrada e um conjunto de 20 palhinhas. As placas simulariam a superfície do tecto e as palhinhas representavam as canas. Embora esta situação fosse semelhante à tratada no grupo-turma dava-se, agora, a possibilidade de todos os alunos efectuarem ensaios com os materiais disponíveis para resolver o problema. A segunda tarefa subsequente apelava ao trabalho com medidas e valores reais e implicava a realização de cálculos. Davam-se as dimensões do tecto do sótão, pedindo-se para encontrarem o menor número de canas possível para forrar a superfície.

## Desenvolvimento do pensamento matemático

Muito prontamente, começaram os ensaios de preenchimento. A figura 1 ilustra uma das produções realizadas por um dos grupos de trabalho.

Depois de algum trabalho de experimentação, um dos alunos apresentou uma proposta à turma: «Professora, a superfície quadrangular é fácil de preencher pois as palhinhas têm 20cm de comprimento e a placa é de 20cm por 20cm.»

E acrescentou: «O mais complicado será agora preencher a outra superfície, gastando o mínimo de palhinhas possível.»

A actividade decorreu com a apresentação das diferentes estratégias, o que contribuiu para discutir várias possibilidades de resolução.

Ao fim de algum tempo, um grupo apresentou a sua proposta que consistia na melhor forma de optimização encontrada.

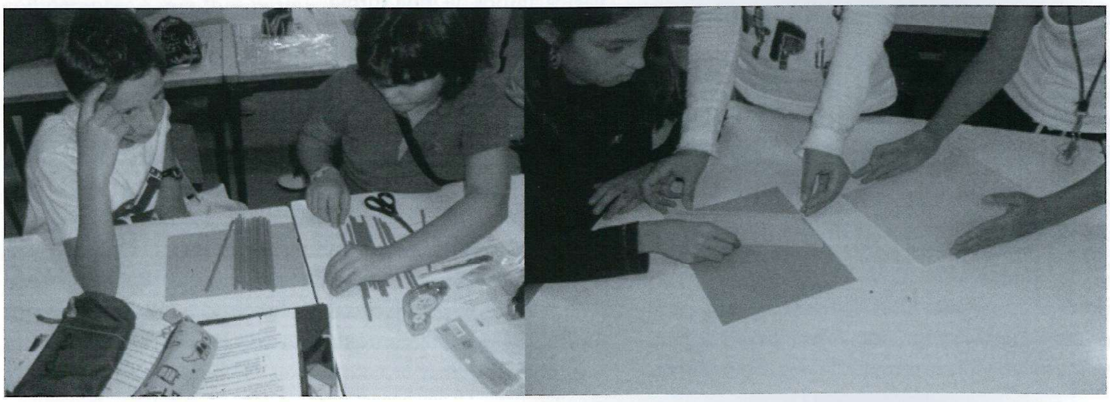
A3: Foi mais complicado, mas depois de algumas tentativas compreendemos... Compreendemos que os bocadinhos das palhinhas....

Professora: Bocadinhos, como assim?

A3: Sim, professora, o comprimento da palhinha é maior do que o comprimento da placa. O comprimento da placa é inferior ao da palhinha. Assim, se cortarmos este bocadinho é possível preencher os restantes espaços com os excessos das palhinhas.

A turma concordou com a exposição deste grupo, constatando que aquela era a maneira mais económica de usar as palhinhas.

Já na segunda tarefa, alguns grupos optaram por seguir um plano de investigação mais minucioso. Mediram uma cana e anotaram as suas medidas. Com os dados, realizaram esquemas e cálculos complementados com explicações.



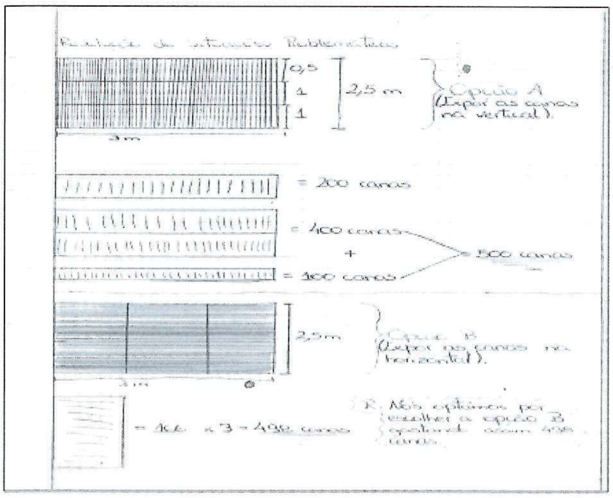


Figura 2. Registo do Grupo B relativo à segunda tarefa

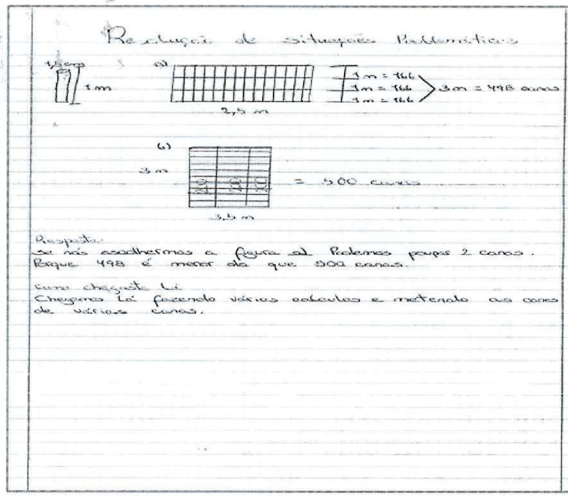


Figura 3. Registo do Grupo C relativo à segunda tarefa

A figura 2 mostra um desses planos de investigação.

O grupo C procurou apresentar o seu plano, exemplificando todos os cálculos efectuados:

C1: Bem, professora.... Nós começámos por desenhar uma cana. (Pega no giz e desenha no quadro uma cana). Depois colocámos as medidas. Tinha de altura 1m e de largura 1,5cm... estão a perceber?

Turma: Sim.

Desenhou no quadro as canas na vertical. Em seguida um colega do grupo predispôs-se a ajudar.

C2: Olhe professora, achámos que com as canas na vertical conseguiríamos colocar duas barras de canas, cada uma contendo 200 canas, e na outra seriam apenas 100 canas. O que, somando tudo, daria um total de 500 canas. Mas, depois, achámos que seria fácil de mais para ficar por aí. Foi então que o [aluno] B1 nos deu uma ideia. Então, achámos que, colocando as canas na horizontal, poderíamos dispor 3 filas de canas completas sem ter que cortá-las ao meio. E, aí... conseguimos fazer filas horizontais de 166, portanto conseguimos fazer três filas com 166 canas cada uma. O que nos deu um total de 498 canas. Comparando a estratégia A com a estratégia B, conseguimos poupar cerca de 2 canas. Não é muito, mas pelos menos são menos do que na situação anterior.

## 3. Conexões Matemáticas

São actualmente muito veementes as referências às conexões matemáticas no desenvolvimento de capacidades e competências matemáticas.

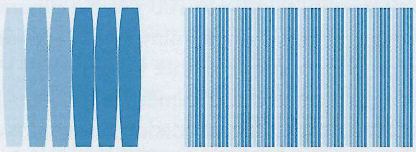
Segundo o NCTM (2000), «pensar matematicamente envolve a procura de conexões, e o seu estabelecimento cimenta a compreensão e os conhecimentos matemáticos. Se não se estabelecerem conexões, os alunos têm de aprender e memorizar demasiados conceitos e desenvolver capacidades de forma isolada. Através das conexões, poderão alargar a sua compreensão, baseando-se em conhecimentos prévios» (p. 324).

O problema das *canas* foi motivo para diversas extensões, criando oportunidades de ligar conhecimentos geométricos e numéricos, mediante a exploração de regularidades e sequências.

### Uma extensão para As Canas: O tecto do Henrique

Henrique decidiu pintar o tecto do seu sótão, tal como se pode ver pela figura acima. Dando-lhe um colorido agradável, pintou as canas com 3 cores diferentes. A sequência de cores obedece à seguinte disposição: 1 de cor azul, 2 de cor vermelha e 3 de verde. Quando termina uma fila de canas, a próxima dá continuidade à sequência, até ao preenchimento de todo o tecto com as 3 cores.

Observa as imagens da sequência de cores utilizadas e responde:



Seguindo a sequência apresentada, ao fim de quantas canas se repetirá a cor verde (azul escuro), a cor vermelha (azul médio) e a cor azul (azul claro)?

Imagina que o Henrique já pintou 50 canas de uma zona do tecto. Qual será a cor da cana número 50, mantendo a sequência escolhida: 1 azul (azul claro), 2 vermelhas (azul médio) e 3 verdes (azul escuro)?

Utilizando as 50 canas e mantendo a mesma sequência de cores, que regularidades podes encontrar? Investiga.

A visualização da imagem permitia que os alunos, de uma forma simples, descobrissem de quantas em quantas canas era necessário repetir as cores verde (azul escuro), vermelha (azul médio) e azul (azul claro). Facilmente constataram que as cores se repetiam da seguinte forma:

- azul (azul claro) — 1, 7, 13, 19, 21, ...

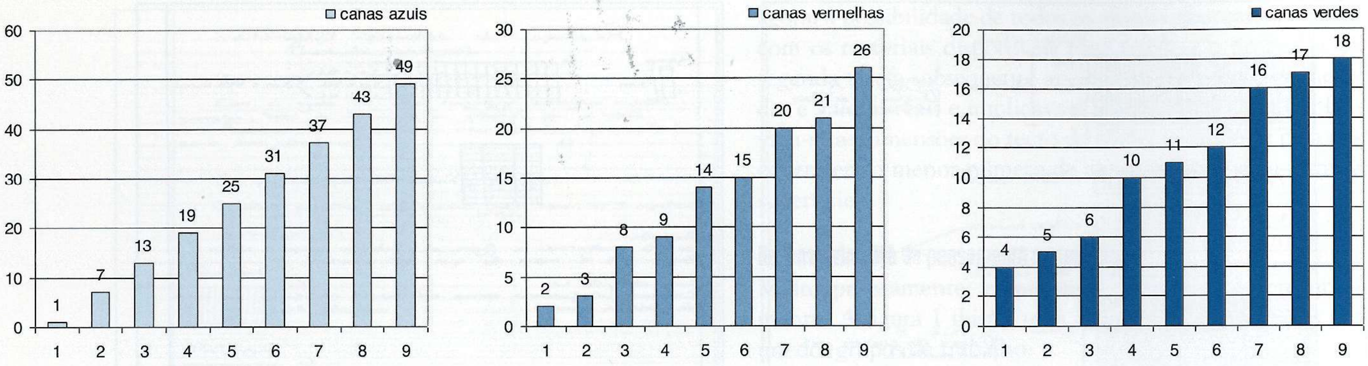



**Figura 4. Uma representação das sequências de canas pintadas, utilizando o Excel**

- vermelha (azul médio) — 2, 3, 8, 9, 14, 15, 20, 21, …
- verde (azul escuro) — 4, 5, 6, 10, 11, 12, 16, 17, 18, …

As três sequências eram suficientemente diferentes para permitirem muitas questões. A situação revelou alguma complexidade quando se tentou descobrir a cor da quinquagésima cana. Observaram-se algumas propriedades interessantes: a sequência verde (azul escuro) é formada por grupos de três números consecutivos, começando no 4 e obtendo-se o grupo seguinte pela adição de 6 unidades ao grupo anterior; a sequência vermelha (azul médio) é formada por grupos de dois números consecutivos, começando no 2 e obtendo-se o grupo seguinte pela adição de 6 unidades ao grupo anterior; a sequência azul (azul claro) começa em 1 e cada um dos seguintes é o resultado de adicionar 6 ao anterior. Portanto, os números, isoladamente ou em «grupos», dão saltos de 6 em 6. Por isso, faz sentido dividir o 50 por 6, isto é, notar que $50 = 6 \times 8 + 2$. Ora isto significa que a 50ª cana vai estar na sequência vermelha (azul médio), que começa no 2. Se, por exemplo, pensássemos na 100ª cana, a sua cor obter-se-ia, dividindo 100 por 6 e olhando para o resto: $100 = 6 \times 16 + 4$. A cana número 100 será de cor verde (azul escuro). E assim por diante (figura 4).

Aproveitando a tarefa da sequência de cores foi possível a exploração de mais regularidades. Eis um dos exemplos apresentados por um aluno (figura 5).

Por ter pensado em várias filas de 10 canas, pelo modo de organização dos dados e pelas descobertas feitas por este aluno, justificou-se plenamente a sua apresentação à turma. Ao explicar o seu processo, deu a conhecer diversas regularidades encontradas.

Este tipo de tarefas, por não serem fechadas e completamente definidas, e por apelarem à experimentação e descoberta, dá aos alunos maior liberdade, contribuindo para que desenvolvam o seu pensamento matemático. Progressivamente, aprendem, por exemplo, a organizar os dados, a estabelecer relações e a encontrar resultados portadores de coerência e relevância matemática.

Segundo os pressupostos em que Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) apoiam a sua perspectiva acerca da Matemática na Educação Básica, «o reconhecimento de regularidades em matemática, a investigação de padrões em sequências numéricas e a generalização através de regras que os próprios alunos podem formular permitem que a aprendizagem da álgebra se processe de um modo gradual e ajudam a desenvolver a capacidade de abstracção. Esta capacidade é essencial no desenvolvimento da competência matemática.» (p. 49).

## 4. Reflexões Finais

A visão tendencialmente negativa manifestada por muitos alunos no ensino básico é fruto da deficiente compreensão dos conceitos matemáticos, constituindo, não raramente, um bloqueio à aprendizagem. Transpor este bloqueio passará por considerar o ambiente e as experiências de aprendizagem em sala de aula e a sua eventual extensão para além da aula de matemática. O tipo de experiências matemáticas próprias do trabalho de projecto possibilitou um envolvimento significativo dos alunos. Traduziu-se por um aumento da autonomia dos alunos, já que a matemática não se apresentava de forma espartilhada e alinhada com os conteúdos, mas decorria da necessidade de mobilizar aprendizagens novas ou anteriores e era tratada no sentido de promover um espírito crítico e investigativo.

A implementação desta pedagogia de trabalho levou a que os alunos assumissem, com grande responsabilidade, as tarefas propostas e favoreceu o seu crescimento em termos de desenvolvimento de competências matemáticas. Em particular, foi visível a evolução da sua capacidade de produzir pensamento matemático, de analisar o mundo real e de interligá-lo com a matemática. O aumento gradual da competência de resolução de problemas contribuiu para um aumento da auto-confiança dos alunos e para um maior à-vontade ao enfrentarem situações problemáticas novas.

Esta abordagem experimental e realista permite que as conexões matemáticas surjam de uma forma natural e não forçada. A oportunidade de encontrar e aprofundar conexões matemáticas, integrando-as com situações e ideias presentes no quotidiano, permitiu aos alunos perceber que, na realidade envolvente, muito se justifica e descreve por relações e conceitos matemáticos. Entenderam que se podem trabalhar diversos conteúdos e tópicos a partir de uma dada situação e que a sua abordagem não tem de ser feita isoladamente e de forma compartimentada.

| | 1ª Coluna | 2ª Coluna | 3ª Coluna | 4ª Coluna | 5ª Coluna | 6ª Coluna | 7ª Coluna | 8ª Coluna | 9ª Coluna | 10ª Coluna |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ª Linha | Az | Vm | Vm | Vd | Vd | Vd | Az | Vm | Vm | Vd |
| 2ª Linha | Vd | Vd | Az | Vm | Vm | Vd | Vd | Vd | Az | Vm |
| 3ª Linha | Vm | Vd | Vd | Vd | Az | Vm | Vm | Vd | Vd | Vd |
| 4ª Linha | Az | Vm | Vm | Vd | Vd | Vd | Az | Vm | Vm | Vd |
| 5ª Linha | Vd | Vd | Az | Vm | Vm | Vd | Vd | Vd | Az | Vm |

Figura 5. A organização dos dados em tabela por um dos alunos.

## Referências


Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática — A experiência do Projecto Mat789*. (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Colecção Teses. Lisboa: APM.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1991). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação — Departamento de Educação Básica.

Boutinet, J-P. (1990). *Antropologia do projecto*. Lisboa: Instituto Piaget.

Dewey, J. (1916/1966). *Democracy and education*. New York: Macmillan Publishing Company.

Kilpatrick, W. H. (1918). The project method. *Teachers College Record*, Vol. XIX, N.° 4, p. 319–335.

Matos, J. F. (2005). Matemática, educação e desenvolvimento social – questionando mitos que sustentam opções actuais em desenvolvimento curricular em matemática. In L.Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Orgs.), *Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas — Encontro Internacional em Homenagem a Paulo Abrantes* (p. 69–81). Lisboa: APM.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Nunes, C. & Ponte, J. P. (2008). Os projectos de escola e a sua liderança. In GTI (Org.), *O professor de matemática e os projectos na escola*, (p. 11–37). Lisboa: APM.



Ana Paula Mestre

EBI Prof. Doutor Aníbal Cavaco Silva, Boliqueime

Susana Carreira

Universidade do Algarve e UIDEF, Universidade de Lisboa


# Matemática à Espreita: A geometria da mão e a biometria

Existem hoje diversos sistemas de verificação de identidade baseados em aspectos biológicos que são únicos de pessoa para pessoa e razoavelmente permanentes. Um dos mais simples baseia-se na geometria da mão. Um dispositivo óptico faz um scanner da mão do indivíduo e armazena um conjunto de dados obtidos a partir da imagem: ângulos de curvatura acentuada (pontas dos dedos e vales de união das bases dos dedos), comprimento dos dedos, largura dos dedos, largura da palma, são alguns dos múltiplos dados que permitem gerar um biocódigo do indivíduo.

A Matemática tem o seu papel nesta forma de identificação. Em Victoria, na Austrália, estuda-se a hipótese de usar leitores da geometria da mão nas escolas para controlar o acesso à entrada (figura 1).

Medir a mão implica torná-la «geométrica» como se evidencia na figura 2. O comprimento de cada dedo é dado pelo comprimento da mediana do triângulo que é definido pela ponta de um dedo e pelos dois pontos da base (os vales entre os dedos). Por seu turno, a largura é dada pelo valor médio dos segmentos perpendiculares à mediana, compreendidos entre o contorno, medidos desde a base até à ponta do dedo.

Por seu turno, o Desenho também faz da mão um elemento muito importante. Considera-se a mão como uma das partes do corpo humano mais difíceis de desenhar. E a geometria dá uma ajuda.

A palma da mão é um pentágono! (figura 3)

Os dedos são definidos por segmentos de recta que concorrem no ponto médio da base do pentágono e seguem proporções relativamente aceites, repare-se que a linha do polegar une o ponto médio da base do pentágono ao segundo vértice mais próximo e não esqueçamos.

Figura 1. Um leitor da geometria da mão

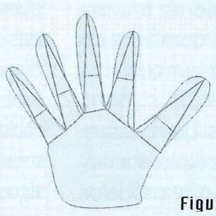


Figura 2

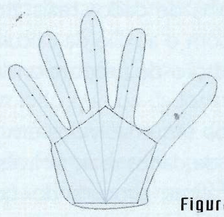


Figura 3