

Video meliora proboque, deteriora sequor  
[Vejo e aprovo o melhor caminho, mas sigo o pior]

—Ovídeo [Metamorfoses, 7, 20-21]

## Arte e Matemática — Conexões

Antônio M. Fernandes

A citação acima marca o tom deste artigo: procurar-se-á ser rigoroso apenas o estritamente necessário, para que as ideias essenciais possam ser veiculadas sem deturpações. O próprio título, contém o termo «arte» de forma abusiva, já que aqui não se tratarão de todas as formas de arte, onde as conexões do tipo que se preconiza podem ser reconhecidas. (Notoriamente não se dirá aqui uma só palavra acerca da Música.)

Várias razões concorrem para esta opção, a ignorância do autor será talvez a mais fácil de constatar e enunciar.

Uma segunda restrição será ainda introduzida: os objectos artísticos são muitas vezes considerados objectos mate-

máticos. Exemplos típicos são as *pavimentações do plano* e as *figuras impossíveis*. Quanto às primeiras, nelas se pode ilustrar uma vasta gama de noções matemáticas, desde a *simetria*, à sofisticada *geometria não comutativa*. Quanto às segundas, Roger Penrose sugeriu o seu estudo e classificação em termos de uma ferramenta matemática importante: a *co-homologia*. Outras conexões deste tipo, envolvendo matemática mais elementar são igualmente observáveis, mas nem dumas nem doutras falaremos aqui. Essas considerações ficarão, talvez, para outra ocasião, quem sabe, contando com a contribuição de outros autores.

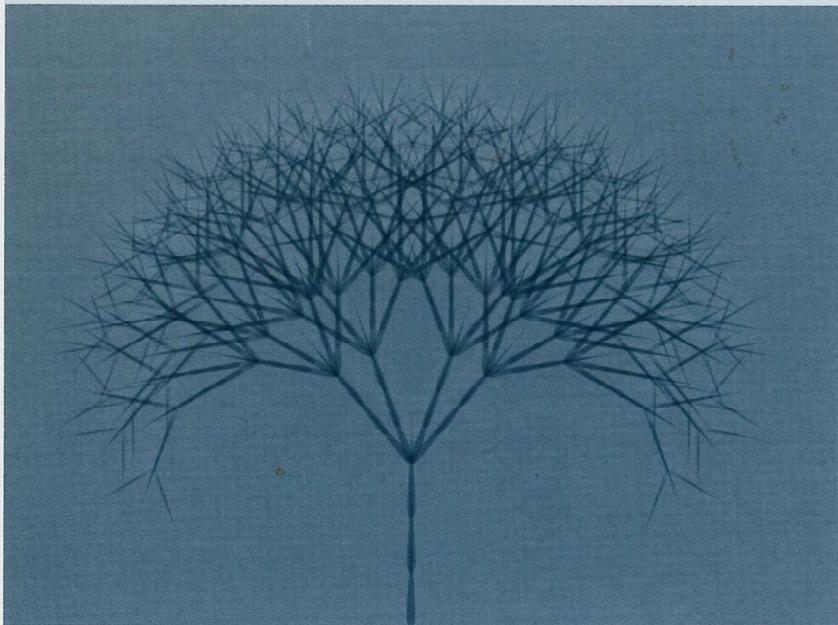


Figura 1. Exemplo de uma árvore gerada por um L-sistema

### L-sistemas

Em 1968, Aristid Lindenmayer (1925–1989), um botânico húngaro, então na Universidade de Utrecht, abordou com uma perspectiva radicalmente inovadora a descrição dos padrões de crescimento de certas populações de algas e bactérias. Iniciava-se nessa ocasião o estudo dos *L-sistemas*.

Do ponto de vista estritamente matemático, um *L-sistema* é simplesmente um triplo  $\mathbb{L} = (\Sigma, \omega, P)$  onde,  $\Sigma$  é um alfabeto, ou seja, um conjunto finito de símbolos;  $\omega$  é uma palavra, ou seja, uma sequência finita de símbolos do alfabeto. Esta palavra especial designa-se de *axioma* ou *estado inicial* do *L-sistema*. (O conjunto de todas as palavras de um alfabeto  $\Sigma$ , denota-se por  $\Sigma^*$ .) Finalmente,  $P$  é um conjunto de regras produtivas.

De modo a tornar mais claro o papel de cada um destes elementos, consideramos um primeiro exemplo. Seja então  $\mathbb{L} = (\Sigma, \omega, P)$  o triplo onde  $\Sigma = \{A, B\}$ ;  $\omega = A$  e  $P$  consiste nas regras  $A \rightarrow AB$  e  $B \rightarrow A$ . Qual é o papel de  $\omega$  e  $P$ ? Já se disse que  $\omega$  representa o «estado inicial do sistema». A partir desse estado inicial esse mesmo sistema «evolui» através da aplicação das regras produtivas, cada uma delas descrevendo uma substituição de símbolos. No nosso caso, da aplicação das regras resulta a substituição simultânea de qualquer «A», pela palavra «AB», e de qualquer «B» por «A». O processo evolutivo que mencionamos é descrito na figura 2.

Continuamos a ilustrar a potencialidade dos *L-sistemas* através de um exemplo com cariz mais matemático: a *sequência de Fibonacci*. Considerando o alfabeto  $\Sigma = \{A, B\}$ , o axioma  $A$  e as regras produtivas  $A \rightarrow B$  e  $B \rightarrow AB$  obtemos, iterando a utilização dessas regras a partir do estado inicial  $A$ , a seguinte sequência de palavras (até à quinta iteração):

Iteração 0:	A
Iteração 1:	B
Iteração 2:	AB
Iteração 3:	BAB

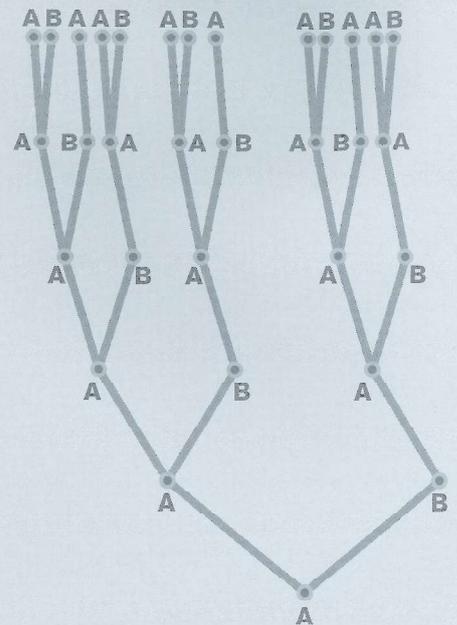


Figura 2

Iteração 4: ABBAB  
 Iteração 5: BABABBAB

Como se devia esperar o resultado é uma sequência de palavras do alfabeto descrito. De que modo se relacionam estas palavras com a sequência de Fibonacci? Essa relação é feita através dos comprimentos dessas palavras. Registrando esses comprimentos ao longo das sucessivas iterações obtemos: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., a sequência de Fibonacci, precisamente.

Como este último exemplo ilustra, não são as palavras que resultam da iteração de um *L-sistema* os objectos que, em última análise, nos interessam. Na maior parte dos casos, o que nos interessa é algum tipo de informação que está relacionada com essas palavras. Ao processo de extracção dessa informação damos o nome de *interpretação* do *L-sistema*.

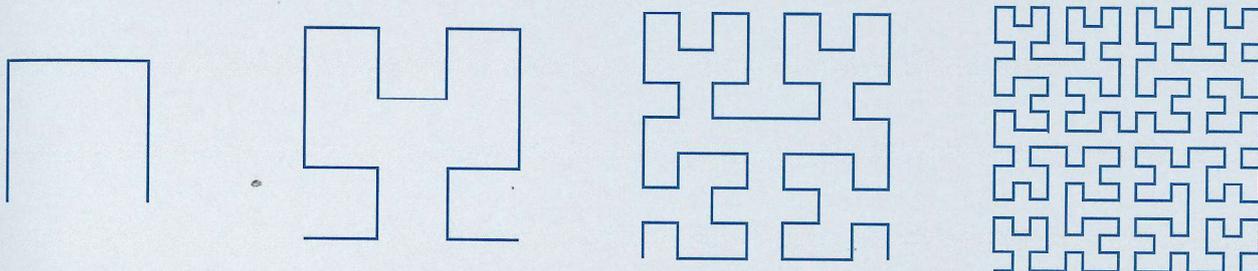
Os *L-sistemas* podem ser usados de forma mais «artística». Para esse efeito, precisamos de os interpretar de modo que descrevam conteúdo gráfico (ou musical, ou outro mas, como já se referiu, destes não nos ocuparemos aqui).

Um terceiro exemplo ilustrará como podemos extrair esse conteúdo. David Hilbert (em 1891) concebeu uma maneira de mergulhar a recta no plano de forma contínua (Giuseppe Peano fez o mesmo, um ano antes.). (Esta afirmação pode traduzir-se de modo mais rigoroso na existência de uma bijecção  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , contínua, i.e., satisfazendo a propriedade: dado  $\varepsilon > 0$ , para obter  $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ , basta considerar  $d_1(x, y) < \delta$  para um certo  $\delta > 0$  [que existe]. Dito de forma menos rigorosa, para obtermos valores suficientemente próximos da função, basta que consideremos valores suficientemente próximos dos argumentos.) Aqui  $d_1$  e  $d_2$  representam as funções «distância» em  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^2$ , respectivamente, que se definem através das relações:

$$d_1(x, y) = |x - y| \text{ e,}$$

$$d_2((x, y), (u, v)) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

Figura 3. As primeiras quatro iterações do L-sistema que produz as aproximações da curva de Hilbert. Desafia-se o leitor a escrever as palavras geradas pelo L-sistema nestas primeiras iterações e a verificar que correspondem, através da interpretação, às figuras acima. [A tarefa torna-se entediante a curto prazo: é por isso que os computadores e as linguagens de programação são interessantes nestas circunstâncias.]



Se a função inversa de  $f$  também fosse contínua, então a recta e o plano seriam *topologicamente equivalentes*. De facto, nenhuma bijecção  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  pode ser contínua. Deste modo, o plano e a recta não são topologicamente equivalentes: um resultado conhecido como *invariância dimensional*.

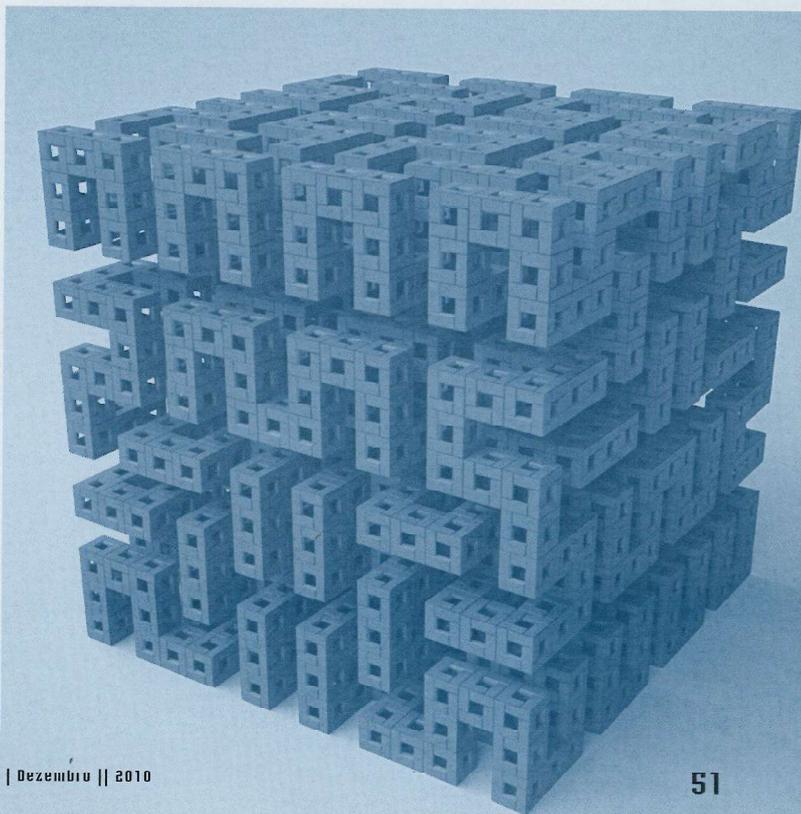
Esta função, conhecida como *curva de Hilbert* pode ser descrita através da interpretação de um L-sistema: consideremos o alfabeto  $\{L, R, F, +, -\}$ , o axioma  $L$  e as regras produtivas  $L \rightarrow +RF - LFL - FR+$  e  $R \rightarrow -LF + RFR + FL-$ . Os símbolos  $F, +, -$  serão interpretados da seguinte forma: o símbolo  $F$  corresponde a deslocarmo-nos em frente, uma distância fixa, desenhando ao mesmo tempo um segmento de recta com correspondente comprimento; ao símbolo «+» corresponde «rodar para a esquerda  $90^\circ$ » e, ao símbolo «-» corresponde «rodar para a direita  $90^\circ$ ». Os restantes símbolos não são interpretados, o que significa que quando os encontramos numa palavra, não lhes corresponde nenhuma acção. (Enfatizamos aqui um aspecto importante: embora certos símbolos não sejam interpretados isso não significa que possamos dispensá-los na descrição de um L-sistema; de facto, eles têm um papel imprescindível na formação das palavras.) Iterando este L-sistema obtemos a sequência de curvas descritas na figura 2, que são aproximações da curva de Hilbert.

Temos vindo a descrever a forma mais simples de um L-sistema. Versões mais sofisticadas (onde existe uma *dependência do contexto*) admitem regras que se modificam consoante o contexto em que as letras surgem nas palavras, ao longo das iterações. Por outro lado, a liberdade quase infinita de produzir interpretações de L-sistemas, confere a estas estruturas uma enorme potencialidade para gerar objectos gráficos abstractos. Objectos, como os que descrevemos aqui, podem ser mais interessantes do ponto de vista matemático (embora a versão tridimensional da curva de Hilbert [figura 3] possua um valor estético inegável), mas noutros casos, como o da capa do número anterior da EeM, as imagens geradas são esteticamente muito interessantes.

### Recursão—um «pincel» matemático

A recursão é um processo fundamental na descrição de objectos matemáticos. Paralelamente pode ser explorado de modo a produzir imagens fascinantes. Não vamos aqui abordar o conceito de forma metódica e rigorosa. Basta-nos a

Figura 3. Representação artística de uma iteração da versão tridimensional da curva de Hilbert



noção de que iterar uma função  $f$  num ponto  $x$  (um caso particular de recursão), corresponde a construir a sequência infinita:  $\langle x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots \rangle$ . Para simplificar a notação, introduzimos a seguinte definição

$$f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)), f^3(x) = f(f(f(x))), \dots$$

à luz da qual iterar uma função num ponto corresponde a formar a sequência (infinita),

$$\langle f^0(x), f^1(x), f^2(x), f^3(x), \dots \rangle.$$

(Se notarmos que as regras produtivas de um L-sistema, determinam uma função que transforma palavras em palavras, facilmente nos convencemos que a iteração de um L-sistema não é mais que a iteração de uma função na palavra que corresponde ao axioma desse mesmo L-sistema.)

Precisamente, utilizando este conceito, podemos descrever imagens especialmente interessantes, impossíveis de obter por outros processos.

O corpo dos números complexos (denotado por  $\mathbb{C}$ ) é uma extensão do corpo dos números reais. A multiplicação e adição complexas são uma extensão das suas congêneres reais e, os números complexos podem representar-se na forma  $\alpha + \beta i$ , onde  $\alpha, \beta$  são números reais e  $i$  é um novo objecto (denominado *unidade imaginária*) cuja principal propriedade é descrita pela igualdade  $i^2 = -1$ .

A representação dos números complexos que mencionamos antes permite-nos identificar cada número complexo  $\alpha + \beta i$  com o ponto do plano de coordenadas  $(\alpha, \beta)$ , facto este que pode ser explorado para definir imagens no plano. Isso mesmo foi feito por Benoît Mandelbrot ao produzir a primeira visualização de um objecto fractal. Para que possamos descrever esse objecto temos que considerar os polinómios de coeficientes complexos da forma  $p_c(z) = z^2 + c$  (onde  $c \in \mathbb{C}$ ). Quando iteramos estes polinómios no ponto  $z = 0$ , obtemos a sequência infinita:

$$\langle p_c^0(0), p_c^1(0), p_c^2(0), p_c^3(0), \dots \rangle = \langle 0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots \rangle.$$

A cada número complexo  $c = x + yi$  pode associar-se um número real que se designa o seu *módulo*, que se denota por  $|z|$  e que se calcula através da seguinte definição:  $|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Quando iteramos um polinómio  $p_c(z)$  em  $z = 0$ , duas coisas podem acontecer: (1) ou existe um número positivo  $k$  tal que para qualquer  $n$  se tem  $|p_c^n(0)| < k$  ou; (2)  $|p_c^n(0)| \rightarrow \infty$ , ou seja, as iteradas possuem módulos arbitrariamente grandes. Pode demonstrar-se que a condi-

Figura 4 Conjunto de Mandelbrot

ção (1) pode ser substituída por uma mais favorável: (1') para qualquer  $n$  tem-se  $|p_c^n(0)| < 2$ .

A figura 4 é resultado da visualização deste processo. Obtém-se da seguinte forma: depois de fixarmos um limite para o número de iterações, digamos  $k$  iterações, os pontos do plano que correspondem a números complexos  $c \in \mathbb{C}$  para os quais se tem  $|p_c^k(0)| < 2$  são coloridos com uma cor, e os que não verificam esta propriedade são coloridos com outra cor.

A figura é assim uma aproximação de um subconjunto do plano conhecido como *conjunto de Mandelbrot*. São muito conhecidas variações mais coloridas deste objecto onde, as cores adicionais são atribuídas em função de uma noção designada por *velocidade de divergência* que, grosso modo, é uma medida de quão rápido  $|p_c^n(0)|$  tende para infinito.

As características de auto-semelhança do conjunto de Mandelbrot tornam-no num objecto esteticamente atraente. Mas, pode fazer-se melhor, e a figura 5 mostra uma variação tridimensional do conjunto de Mandelbrot, cujo valor estético nos escusamos a comentar.

Mas, como generalizar o modo como se obteve o conjunto de Mandelbrot ao espaço? Poderíamos pensar em re-

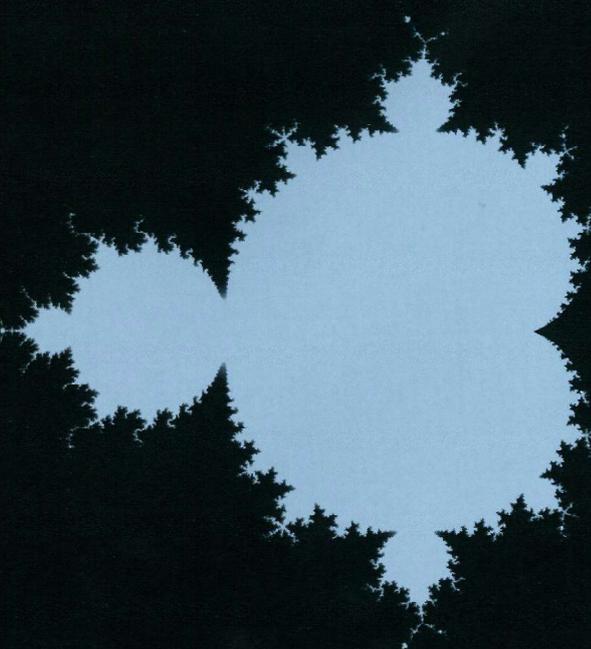




Figura 5

produzir todo o processo, passando do corpo  $\mathbb{C}$  (que também é uma álgebra normada de dimensão 2 sobre  $\mathbb{R}$ ) para um corpo  $\mathbb{K}$  que, enquanto álgebra normada sobre  $\mathbb{R}$  fosse desta vez de dimensão 3, fornecendo-nos assim informação acerca de pontos do espaço. Acontece que não existem muitos tipos de álgebras normadas sobre  $\mathbb{R}$ . Efectivamente, um resultado de Hurwitz estabelece que as possíveis dimensões de tais álgebras são 1, 2, 4 e 8. As duas primeiras dimensões correspondem a  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$ : os corpos dos números reais e dos números complexos. As estruturas que correspondem às dimensões 4 e 8 são constituídas por números hipercomplexos e correspondem aos quatérnios ( $\mathbb{H}$ ) e aos octonídeos ( $\mathbb{O}$ ). Temos:  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}$ , mas, na passagem de  $\mathbb{C}$  para  $\mathbb{H}$  a multiplicação deixa de ser comutativa e, na passagem de  $\mathbb{H}$  para  $\mathbb{O}$  deixa de ser associativa.

Os quatérnios podem representar-se como expressões formais do tipo  $a + bi + cj + dk$  onde os  $a, b, c, d$  são números reais e  $i, j, k$  são unidades hiper-imaginárias. A adição de quatérnios é a generalização óbvia da adição de números complexos. No caso da multiplicação o procedimento é semelhante ao caso complexo, uma vez que conheçamos o modo como operar as unidades hiper-complexas, algo que se

descreve na tabela seguinte que contém as famosas igualdades de Hamilton.

$$\begin{aligned} ij &= k & jk &= i & ki &= j \\ ji &= -k & kj &= -i & ik &= -j \\ i^2 &= j^2 &= k^2 &= -1 \end{aligned}$$

Tal como os complexos se podem identificar com pontos do plano, os quatérnios podem identificar-se com pontos do hiper-espaço de dimensão 4. Por outro lado, a álgebra subjacente a esta estrutura permite que se considerem polinómios sobre os quatérnios, em particular que se considerem polinómios do tipo  $p_c(w) = w^2 + c$  (onde  $c \in \mathbb{H}$ ) que, são precisamente os polinómios do tipo considerado na definição original do conjunto de Mandelbrot. Isso permite-nos definir uma versão a quatro dimensões do conjunto de Mandelbrot considerando os pontos  $c \in \mathbb{H}$  para os quais existe  $k > 0$  de modo que  $|p_c^n(o)| < k$  para todos os possíveis  $n \in \mathbb{N}$ . (O módulo de um quatérnio é definido através de

$$|a + bi + cj + dk| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.)$$

Esta construção, no entanto, gera um hiper-volume. A respectiva visualização só é possível através de fatias tridimen-

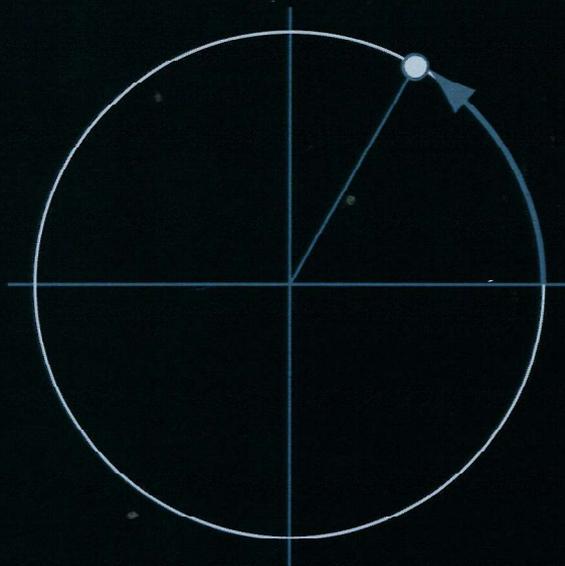


Figura 6A Um número complexo representado no plano de Argand

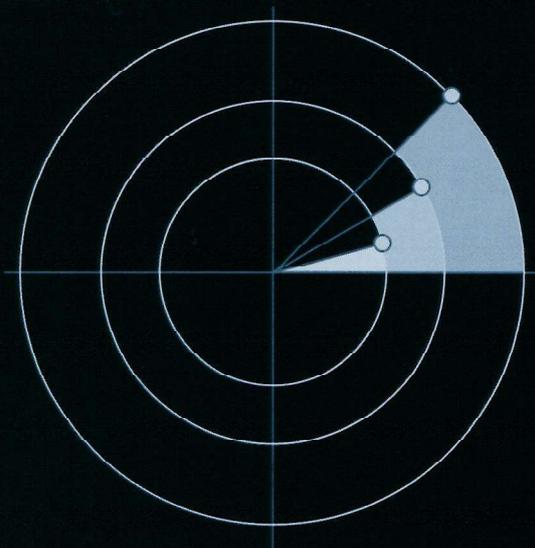


Figura 6B Potências de um número complexo

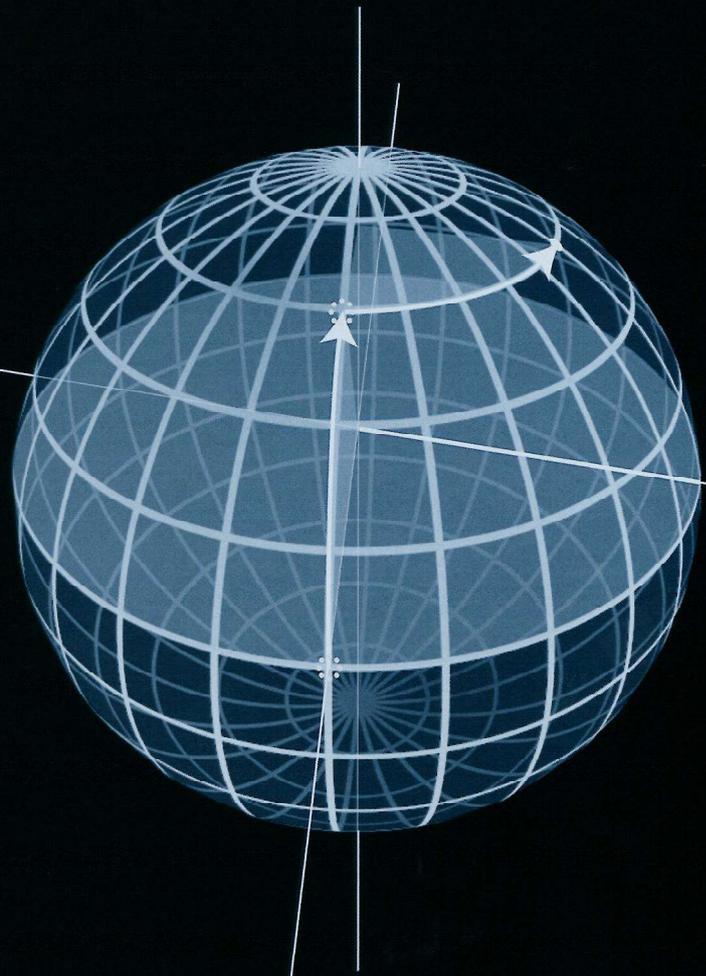


Figura 7

sionais desse objecto. A figura 5, mostra uma dessas fatias, para uma versão *quaterniônica* do conjunto de Julia.

Mas o que dizer de uma versão genuinamente tridimensional (não obtida por via indirecta) do conjunto de Mandelbrot? O facto não podermos impor sobre  $\mathbb{R}^3$  uma estrutura algébrica «semelhante» a  $\mathbb{C}$  não é razão para desistir imediatamente. Em  $\mathbb{R}^3$  existe uma estrutura aditiva dada pela usual adição de vectores:

$$(x, y, z) + (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c).$$

Existe igualmente uma *norma*, definida por

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

A estrutura aditiva e normada dos complexos pode ser «embecida» na estrutura aditiva e normada de  $\mathbb{R}^3$  usando a «identificação»  $z = x + yi \mapsto (x, y, 0)$  que possui as propriedades seguintes:

$$f(z_1 + c z_2) = f(z_1) +_{\mathbb{R}^3} f(z_2);$$

$$\|f(z)\| = |z|.$$

O problema envolve a multiplicação.

Sem multiplicação, não podemos calcular quadrados e, sem isso, os polinómios  $p_c(z) = z^2 + c$  são inúteis neste contexto. Mas isto, em si mesmo, não constitui obstáculo para um matemático. Porque não interpretar «quadrado de ...» de forma conveniente, usando uma função  $\theta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  considerando, desta forma, os «polinómios»  $p_c(z) = \theta(z) + c$ ? Matematicamente não há nada de errado com esta opção, mas se  $\theta$  for uma translacção, i.e., do tipo  $\theta(z) = z + k$  então, a iteração de  $p_c(z)$  no ponto  $o = (0, 0, 0)$  resulta na sequência

$$\langle o, k + c, 2(k + c), 3(k + c), \dots \rangle$$

que só produz uma iteração limitada se  $k = -c$ , ou seja, num único caso. Assim a imagem resultante seria um ponto de

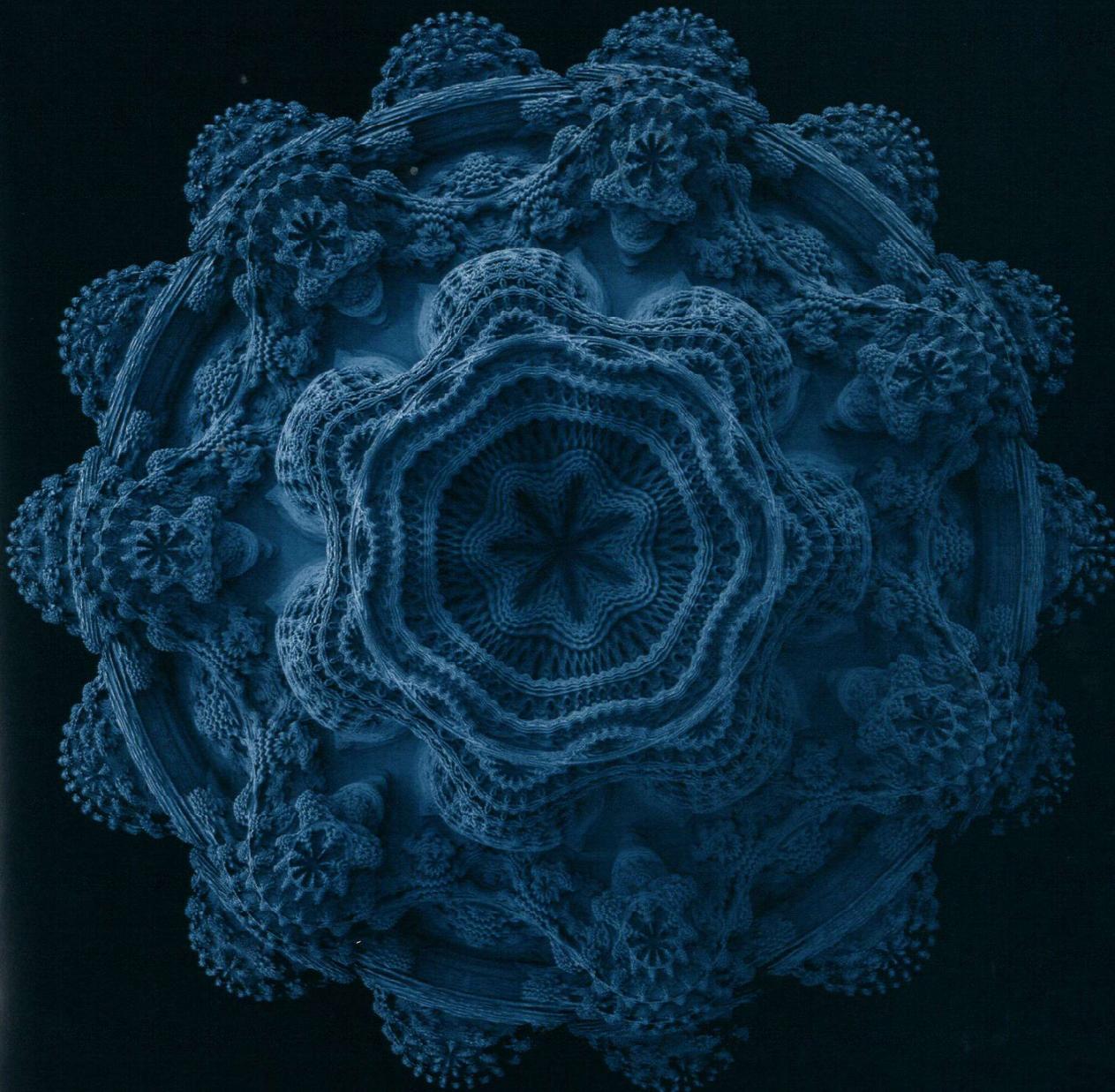


Figura 8 Versão 3D do Conjunto de Mandelbrot

uma cor e o resto do espaço de outra—absolutamente desinteressante! Uma melhor escolha para  $\theta$  foi feita por Daniel White e Paul Nylander que, conceberam  $\theta$  de modo a reproduzir em  $\mathbb{R}^3$  o «efeito geométrico» da álgebra dos números complexos. Um número complexo  $z = x + yi$  pode ser identificado com o ponto  $(x, y)$  do plano ( $\mathbb{R}^2$ ). Os pontos do plano podem, por sua vez (com a exceção de  $(0, 0)$ ) ser descritos na forma  $(r \operatorname{sen}(\alpha), r \operatorname{cos}(\alpha)) = r(\operatorname{sen}(\alpha), \operatorname{cos}(\alpha))$ , um facto que está na base da representação trigonométrica dos números complexos (figura 6a). O efeito de elevar um complexo  $z$  à sua  $n$ -ésima potência é o seguinte: se  $z = r(\operatorname{sen}(\alpha), \operatorname{cos}(\alpha))$  então  $z^n = r^n(\operatorname{sen}(n\alpha), \operatorname{cos}(n\alpha))$  (figura 6b).

Acontece que todo o ponto do espaço possui uma representação trigonométrica semelhante a esta. Mais precisamente, todo o ponto do espaço (excepto  $(0, 0, 0)$ ) possui uma representação do tipo  $r(\operatorname{sen}(\psi) \operatorname{cos}(\varphi), \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi), \operatorname{cos}(\psi))$  (onde  $\varphi, \psi$  são como na figura 7.

Estamos finalmente prontos para proceder à generalização anunciada. Muito naturalmente definimos:

$$\begin{aligned} \theta_n(r(\operatorname{sen}(\psi) \operatorname{cos}(\varphi), \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi), \operatorname{cos}(\psi))) &= \\ = r^n(\operatorname{sen}(n\psi) \operatorname{cos}(n\varphi), \operatorname{sen}(n\psi) \operatorname{sen}(n\varphi), \operatorname{cos}(n\psi)). \end{aligned}$$

O resultado é surpreendente! (Figura 8.)

### Paradoxo e auto-referência

Temos descrito formas de acordo com as quais «arte» pode ser produzida usando conceitos matemáticos. Sabe-se que noções que foram em primeiro lugar exploradas e experimentadas pelos artistas, se tornaram objectos da sistematização matemática: a geometria projectiva é um exemplo extraído (à pressa), entre outros igualmente fundamentais. Talvez menos evidente é o facto de certas noções constituírem tema comum, para a Arte e a Matemática. Mencionaremos dois exemplos: paradoxos e «auto-referência».

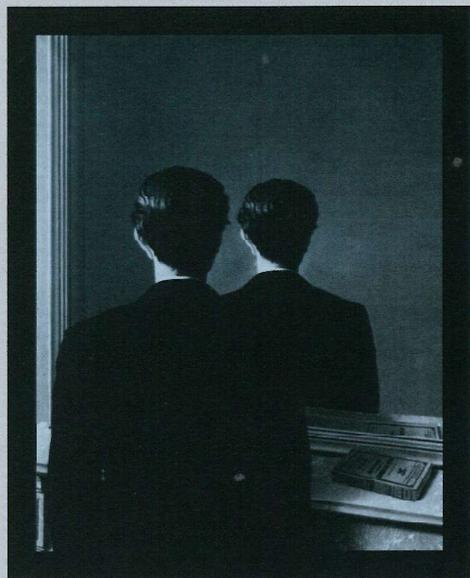


Figura 9. René Magritte — La reproduction interdite. 1937

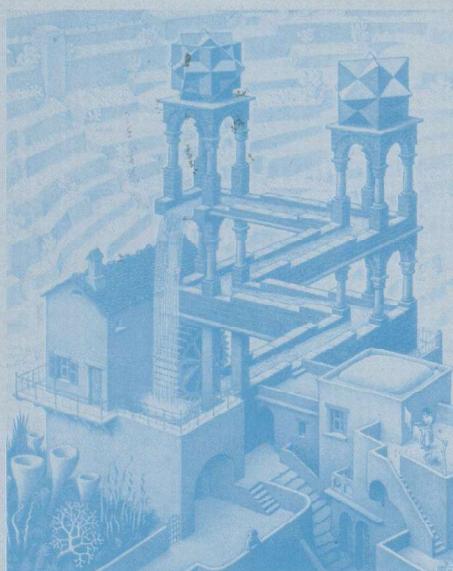


Figura 10. M. C. Escher — Waterfall. 1961

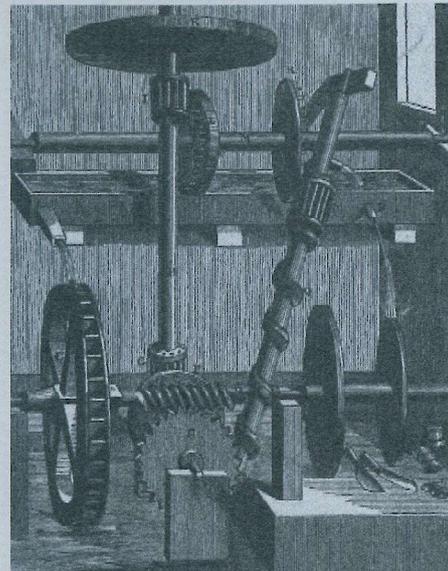


Figura 11. Robert Fludd — Parafuso de Água. 1618

### Paradoxos

A Matemática, como é do conhecimento geral existe, enquanto corpo do conhecimento, na mesma medida em que consegue evitar o paradoxo. Isto significa apenas que o *corpus mathematicum* deve ser livre de paradoxos, mas não significa que a respectiva *praxis* possa viver livre dele. De facto a história revela que os grandes avanços da Matemática se deram a partir de conceitos aparentemente paradoxais, ou mesmo paradoxais quando formulados de forma ingénua.

A Matemática actual encontra-se fundada na noção de conjunto. Com isto deve entender-se que qualquer noção matemática, por mais elaborada e abstracta que seja pode, em última instância, ser descrita à custa da noção de conjunto. Georg Cantor, o fundador da teoria de conjuntos definiu a noção de conjuntos de tal modo que seria sempre concebível, como conjunto, a colecção de todos os objectos que possuíssem uma dada «propriedade»: o conjunto dos portugueses que não gostam de pagar impostos, por exemplo. Esta concepção, aparentemente «inofensiva» é, apesar de tudo, paradoxal. Esta natureza exhibe-se através do famoso *Paradoxo de Russell*. Considerando o conjunto A de todos os conjuntos que não são elementos de si próprios temos, por um lado que, se A é elemento de A então, uma vez que possui a propriedade de não ser elemento de si próprio, resulta que A não é elemento de A. Por outro lado, se A não é elemento de A então, tendo em conta a propriedade que define os elementos de A, resulta imediatamente que A é elemento de A. Acabámos de verificar que A é elemento de A se e só se A não é elemento de A (uma situação evidentemente paradoxal). Dos esforços para contornar este paradoxo surgiu uma das mais (senão a mais) pujante das teorias matemáticas.

Esta «vitalidade» inerente à noção de paradoxo não escapou aos artistas. Apresentamos aqui dois exemplos, um de René Magritte (figura 9), outro de M. C. Escher (figura 10). O exemplo da autoria de Escher recorre a uma ilusão de perspectiva de modo a descrever uma espécie de «movimento perpétuo». Nesse sentido, é de certa forma seme-

lhante ao «Parafuso de água» descrito por Robert Fludd em 1618 (figura 11). Na gravura surge um mecanismo que supostamente deveria assegurar um tipo de movimento perpétuo. Este género de acção viola as leis da Termodinâmica sendo também ele paradoxal, à luz da Física estabelecida.

### Auto-referência

Um segundo «tema» comum à Matemática e à Arte é a «auto-referência». No que respeita à primeira, os exemplos mais paradigmáticos serão constituídos pelos famosos teoremas da incompletude de Gödel. No caso da Arte, apesar de muitos exemplos se poderem aqui descrever a exploração dessa noção (com exemplos particularmente interessantes no caso da Música), no contexto deste artigo apresentamos dois deles da autoria dos «suspeitos» do costume: Escher e Magritte. No caso do «cachimbo de Magritte» (figura 12) o tema é a separação entre a *referência* e o *referente*. Já na obra de Escher o quadro exposto na galeria contém a própria realidade envolvente de que, por outro lado, ele próprio é parte (figura 13).

A auto-referência ocorre quando, numa linguagem (natural ou formal), uma sentença se refere a si própria. Num sentido mais lato quando um predicado se aplica a si próprio (no caso da língua natural, quando um adjectivo se aplica a si próprio: um adjectivo *autológico*). (Por exemplo «comum» é ele próprio um predicado comum.)

Não é incomum ver associadas as noções de «auto-referência» e «paradoxo»: o denominado *Paradoxo de Grelling-Nelson* é obtido através da noção de «adjectivo autológico». (A situação apresenta notáveis semelhanças com o paradoxo de Russel, a que nos referimos anteriormente.)

Em rigor, o paradoxo obtém-se considerando a noção oposta: um adjectivo é *heterológico* se não for autológico. Deixamos ao cuidado do leitor verificar que «heterológico» é heterológico» se e só se «heterológico» é autológico» (uma contradição). (O paradoxo de Russel será certamente uma boa inspiração ...)



*Ceci n'est pas une pipe.*

Figura 12. René Magritte — Ceci n'est pas une pipe. 1968

Mas, existem utilizações mais construtivas desta noção, tal como foi demonstrado pelos resultados de Kurt Gödel. De forma um tanto ou quanto simplista o «primeiro teorema da incompletude» estabelece a existência de «verdades» que não podem ser demonstradas. Não sendo este o lugar para expor estes resultados fundamentais em detalhe é possível, ainda assim, exibir a sua essência através de um «puzzle gödeliano» (descrito originalmente por Raimond Smullyan).

Consideremos uma máquina  $\mathcal{M}$  que, ao executar um certo tipo de programação, produz uma lista de palavras (sequências finitas) usando símbolos do alfabeto  $\neg, I, N, ( e )$ . A máquina trabalha indefinidamente pelo que (potencialmente) produz uma lista infinita de palavras  $\langle W_0, W_1, W_2, \dots, W_n, \dots \rangle$  (onde  $n \in \mathbb{N}$ ). Diremos que uma palavra  $W$  é imprimível se, mais tarde ou mais cedo surge na lista produzida pela máquina, ou seja, se para certo  $n \in \mathbb{N}$  se tem  $W = W_n$ . Neste caso escrevemos  $\vdash W$ . (Se  $W$  não for imprimível escrevemos  $\not\vdash W$ .)

Introduzimos agora um tipo «especial» de palavras: as sentenças. As sentenças são palavras dos tipos que se descrevem a seguir:  $I(W)$ ,  $\neg I(W)$ ,  $PN(W)$  e  $\neg PN(W)$ , onde  $W$  é uma palavra arbitrária. O que é interessante é que o funcionamento da máquina  $\mathcal{M}$ , fornece uma forma de atribuir um valor de verdade a cada sentença: interpretando os símbolos « $\neg$ », « $I$ », « $N$ » como sendo «não», «imprimível» e «norma de...», respectivamente, onde a norma de uma palavra  $W$  é a expressão  $W(W)$ . (Os símbolos « $($ » e « $)$ » não possuem nenhuma interpretação especial funcionam como os usuais parêntesis, destinando-se apenas a facilitar a leitura.)

À luz desta interpretação, todas as sentenças podem ser consideradas verdadeiras ou falsas. Escrevemos  $\models S$  para indicar que a sentença  $S$  é verdadeira e  $\not\models S$  para indicar que é falsa, onde: (1)  $\models I(W)$  se e só se a palavra  $W$  é imprimível; (2)  $\models \neg I(W)$  se e só se a palavra  $W$  não é imprimível; (3)  $\models IN(W)$  se e só se a norma de  $W$ , ou seja, a palavra  $W(W)$

é imprimível e, finalmente; (4)  $\models \neg IN(W)$  se e só se a norma de  $W$  não é imprimível.

Observe-se que as sentenças, à luz desta interpretação, reflectem uma certa auto-referência da própria máquina e, admitindo agora que todas as palavras imprimíveis são verdadeiras, reflecte até uma certa «auto-consciência».

Admitamos então que a nossa máquina  $\mathcal{M}$  é tal que se  $S$  é uma sentença imprimível então, é forçosamente verdadeira, i.e., se  $\vdash S$  então  $\models S$ . Coloca-se a questão: será a recíproca necessariamente verdadeira, i.e., sendo  $S$  verdadeira será ela imprimível pela máquina?

A resposta é negativa!

Se considerarmos a sentença  $S = \neg IN(\neg IN)$  temos duas hipóteses: (1)  $\models S$ , o que significa que a norma da palavra  $\neg IN$  não é imprimível, ou seja, que a palavra  $\neg IN(\neg IN)$  não é imprimível. Neste caso ter-se-ia:  $\models S$  e  $\not\vdash S$ .

A segunda alternativa é: (2)  $\not\models S$ , o que significa que a norma de  $\neg IN$  é imprimível, ou seja que  $\neg IN(\neg IN)$  é imprimível, donde:  $S$  é imprimível. Como estamos a admitir que a nossa máquina só imprime palavras verdadeiras,  $S$  seria então, ao mesmo tempo, verdadeira e falsa, o que é impossível. Assim, (2) não pode acontecer e, conseqüentemente, acabámos de exibir uma sentença verdadeira que não é imprimível.

Esta é a essência do primeiro teorema da incompletude de Gödel, «bastando» para isso substituir «imprimível» por «demonstrável».

Estes resultados modificaram decisivamente o curso da Matemática e até da Filosofia. Dir-se-á até, sem exagero, que modificaram definitivamente o pensamento humano. Simultaneamente revelam que algo que poderia ser considerado, à primeira vista, como uma idiossincrasia linguística, é afinal uma noção matematicamente significativa (dito de outra forma: «há mais matemática em cada objecto ou conceito que, aquela que é à primeira vista imaginável»).

Antônio Fernandes  
Instituto Superior Técnico



Figura 13. M. C. Escher — Print Gallery. 1956