Problemas e Conexões, com Tecnologia

Adelina Precatado

Nos «Princípios e Normas para a Matemática Escolar», do NCTM, refere-se para os anos 9–12, que «Quando os alunos conseguem ver conexões entre diversas áreas e conteúdos matemáticos, desenvolvem uma visão da Matemática como um todo integrado». Neste artigo valorizo a resolução de problemas e a utilização de tecnologia porque penso que podem facilitar a observação por parte dos alunos de conexões entre diversas ideias e tópicos matemáticos e contribuir para que observem esta visão da Matemática como um todo integrado. Apresento três problemas, abordados sobre mais do que uma perspectiva e onde penso que a tecnologia desempenha um papel significativo.

Problema 1: O Triângulo rotativo

Este problema é apresentado em http://nrich.maths.org/266, sob a forma de uma aplicação interactiva e com o seguinte enunciado:

Os círculos interiores são tangentes um ao outro e tangentes também ao círculo exterior. Se alterarmos o raio dos círculos interiores ou se mudarmos a posição destes círculos, como varia o perímetro do triângulo definido pelos centros dos três círculos?

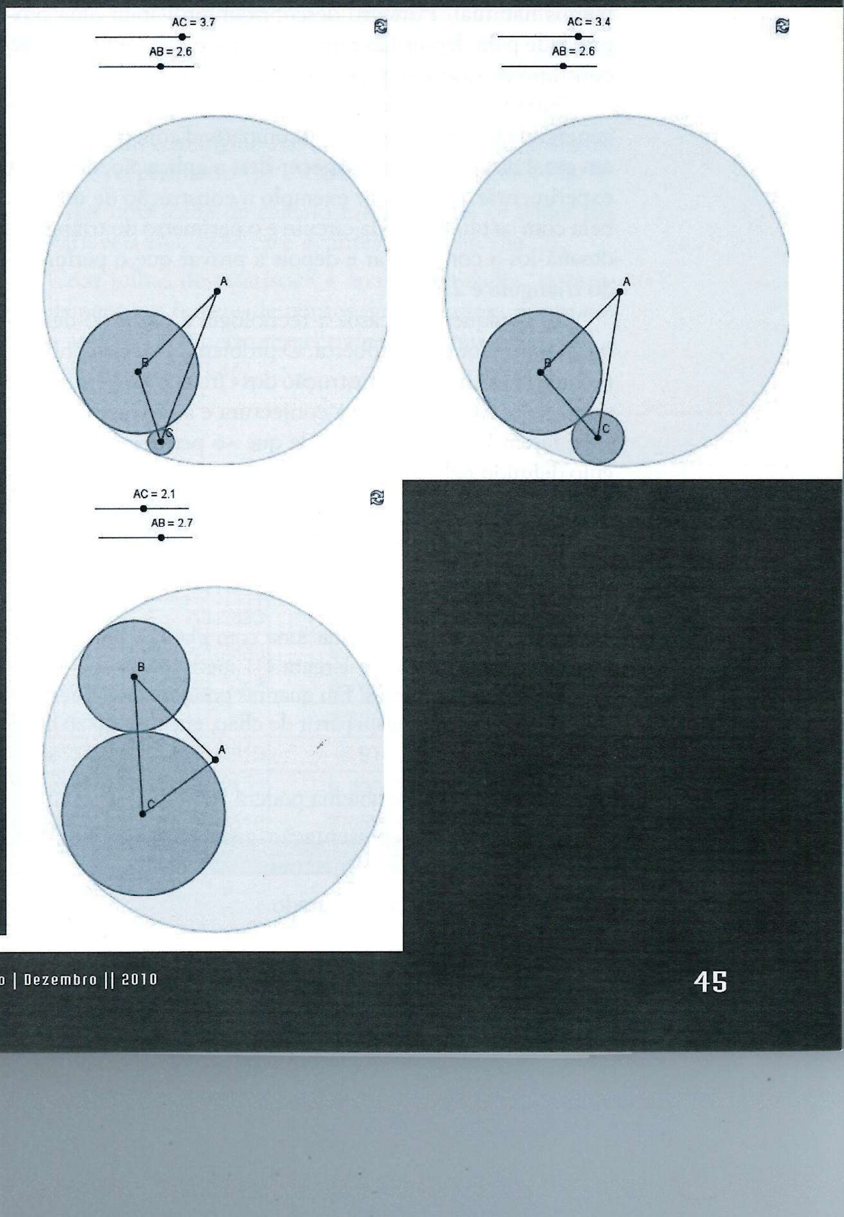


Figura 1. Triângulo rotativo

Apresentei-o a alguns dos meus alunos , no final do 10° ano, na forma: construir, com um programa de geometria dinâmica, os círculos nas condições apresentadas «círculos interiores tangentes um ao outro e tangentes também ao círculo exterior». Estes alunos estavam habituados e manipulavam razoavelmente o Geogebra, por isso, à partida, pareceu-lhes fácil o que lhes estava a pedir. Na verdade não foi assim, depois de algum desespero, fui-lhes dando umas «dicas» que os levaram a perceber que nos pontos de contacto os círculos têm uma tangente comum, perpendicular tanto ao raio do círculo exterior como ao círculo interior e que lhes permitiu, depois, provar que o perímetro do triângulo é igual ao dobro do raio do círculo maior.

De facto, sendo R o raio do círculo maior, r_1 e r_2 os raios dos outros círculos, então o perímetro do triângulo será $(R - r_1) + (R - r_2) + (r_1 + r_2) = 2R$. A partir daqui a construção torna-se fácil. Tal como foi colocado, o desafio revelou-se, para alguns alunos, interessante, talvez porque menos habitual. Primeiro descobriram/provaram uma propriedade para depois fazerem uma construção, um pouco ao contrário do que acontece a maioria das vezes.

Outra forma de abordar o problema, mais simples para a generalidade dos alunos e mais compatível com o tempo que em geral dispomos, será fornecer-lhes a aplicação, deixá-los experimentar, sugerir por exemplo a construção de uma tabela com os raios de cada círculo e o perímetro do triângulo, desafiá-los a conjecturar e depois a provar que o perímetro do triângulo é $2R$.

Em qualquer dos casos a tecnologia é parte do desafio ou o facilitador da descoberta. O problema *conecta* conhecimentos para chegar à construção dos círculos tangentes. Por outro lado, a experiência, a conjectura e a prova articulam-se e fazem sentido. A prova de que «o perímetro do triângulo definido pelos centros dos três círculos é igual a 2 vezes o raio do círculo maior» tornou-se indispensável para fazer «a simples construção».

Problema 2: A escada

Uma parede tem à frente uma zona com plantas, limitada por um muro com 1 metro de largura e 1 metro de altura. Temos uma escada com 3 metros. Em quantas posições diferentes será possível colocar a escada a partir do chão, encostando ao muro e chegando à parede?

Uma abordagem do problema poderá ser:

— Construir uma representação geométrica da situação, deslocar a escada e conjecturar.

— Provar o que foi conjecturado.

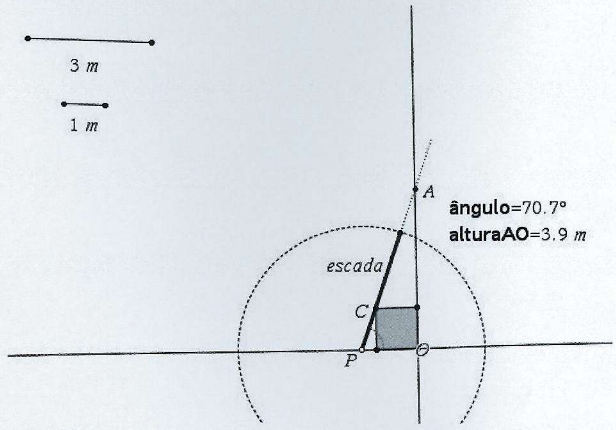


Figura 2. A escada

Na figura 2 apresenta-se uma abordagem possível . É uma simulação com a calculadora Ti-nspire, facilmente construída pelos alunos ou em alternativa fornecida pelo professor e que permite experimentar, deslocando o ponto P, e procurando as possíveis posições da escada.

Nos dois slides da figura 3 apresenta-se parte da resolução apresentada por dois alunos do 11° ano. Os alunos experimentaram e encontraram a resposta, com o Geogebra. Depois resolveram o problema algebricamente e recorreram à calculadora gráfica para encontrarem as raízes da equação

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\beta} + \frac{1}{\cos\beta} = 3.$$

Para o mesmo problema outros alunos recorreram à semelhança dos triângulos FDE e FGB.

Fazendo $\overline{CG} = x$, estudaram a igualdade

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{3} = \frac{x}{x+1}.$$

e determinaram os valores possíveis para $x + 1$.

Concluíram que só há duas posições possíveis, para ângulos da escada com o solo de aproximadamente 34° e 56°, sendo esta última posição a que permite uma altura maior, de aproximadamente 2,5m.

Também neste problema o uso da tecnologia foi importante, não só para possibilitar a experimentação, mas também como meio auxiliar para encontrar as soluções aproximadas .

Quando temos tempo para deixar que os alunos procurem o caminho para a resolução de um problema e não os encaminhamos demasiado, raramente todos resolvem da mesma forma e a apresentação à turma e/ou a discussão permite muitas vezes fazer conexões entre ideias e entre temas matemáticos diferentes já estudados.

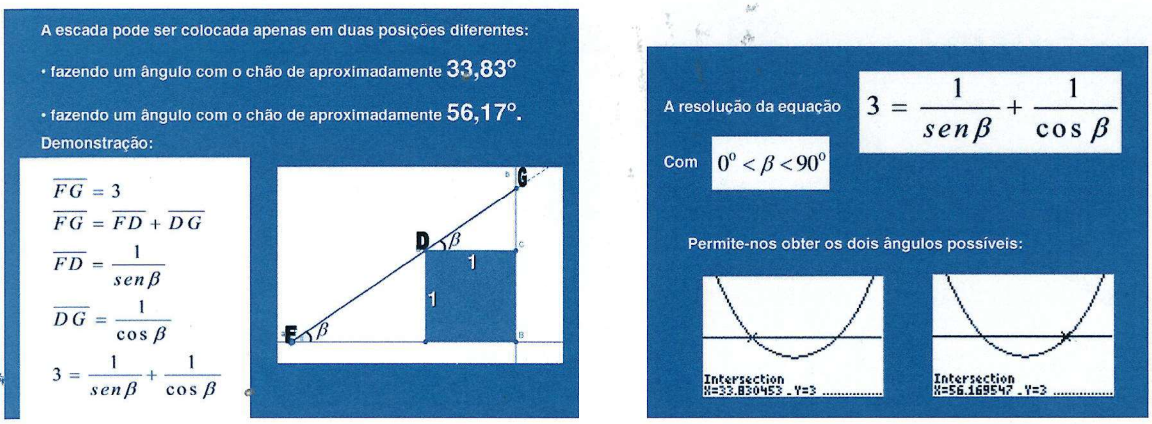


Figura 3. Resolução do problema da escada

Problema 3: Funções no triângulo isósceles

ABC é um triângulo isósceles, com $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$ cm. Seja x a medida, em cm, da base do triângulo ABC e α a amplitude, em graus, do ângulo BAC. Quais são as características do triângulo de área máxima? Como varia a área do triângulo em função de x e em função de α? Como varia o perímetro do triângulo em função de x e em função de α?

Este problema foi adaptado de http://illuminations.nctm.org. É um problema simples, quer do ponto de vista do enunciado quer do ponto de vista da construção/experimentação com geometria dinâmica.

Se deixarmos que os alunos recolham e analisem os dados relativos à base, ângulo, perímetro e área e que depois procurem as funções que modelam esses dados encontraremos um conjunto diversificado de funções — polinomiais, irracionais, trigonométricas. Para além disso, teremos oportunidade de relacionar a construção, a experiência, a recolha e tratamento dos dados, a conjectura e a procura das funções que modelam as diversas situações (área ou o perímetro em função do ângulo ou da base). Podemos ainda fazer o confronto entre estes modelos e os dados recolhidos através da sobreposição dos gráficos das funções com as nuvens de pontos e ainda usar derivadas para provar, por exemplo, que o triângulo de área máxima é mesmo o triângulo rectângulo.

Calculadoras e *software* de computador estão cada vez mais próximos , começamos a pensar que apenas usamos o «pequenino ecrã» porque não são permitidos computadores nos exames.

Para este problema, deixo o que poderia ser uma exploração com a calculadora ou *software* Ti-nspire:

1. Construir o triângulo ABC e medir o lado BC, o ângulo BAC, o perímetro (p) e a área (a) do triângulo. (fig. 4)
2. Criar uma folha de cálculo e «Capturar» os dados das variáveis BC, BAC, p e a, antes definidas. (fig. 5)
3. Criar folhas de estatística e analisar os dados, nomeadamente as nuvens de pontos que permitem relacionar a área e o perímetro respectivamente com a base BC e com o ângulo BAC.

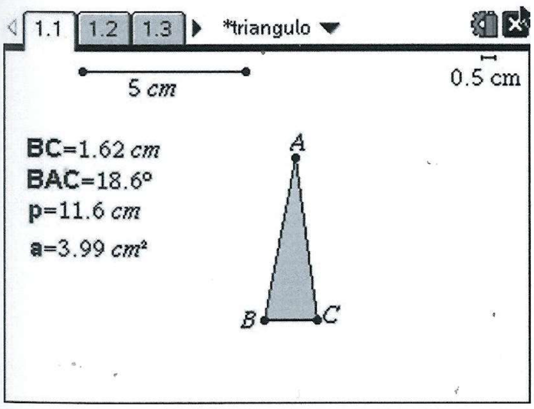
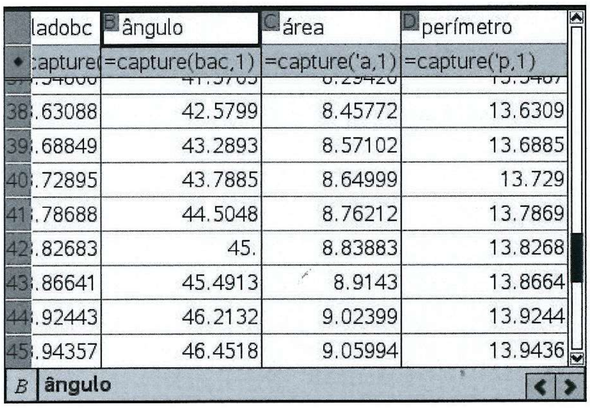
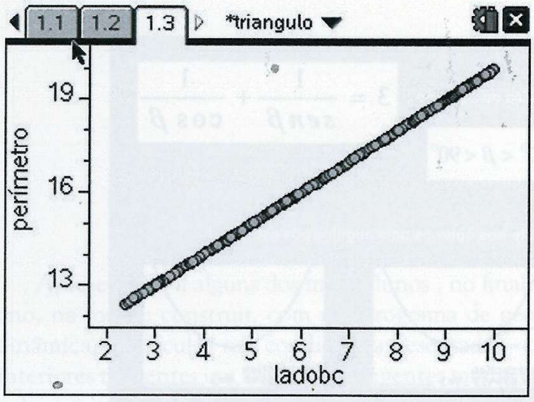


Figura 4

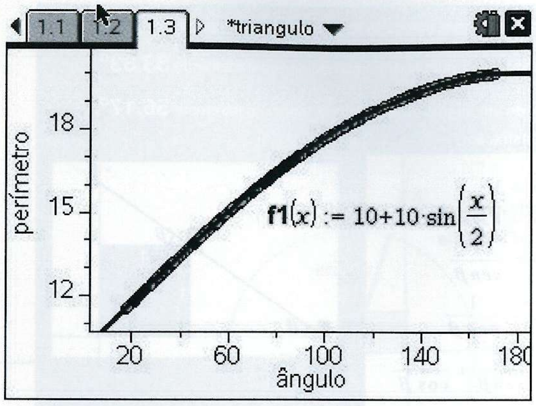


ladobc	ângulo	área	perímetro
:apture(	=capture(bac,1)	=capture('a,1)	=capture('p,1)
.63088	42.5799	8.45772	13.6309
.68849	43.2893	8.57102	13.6885
.72895	43.7885	8.64999	13.729
.78688	44.5048	8.76212	13.7869
.82683	45.	8.83883	13.8268
.86641	45.4913	8.9143	13.8664
.92443	46.2132	9.02399	13.9244
.94357	46.4518	9.05994	13.9436

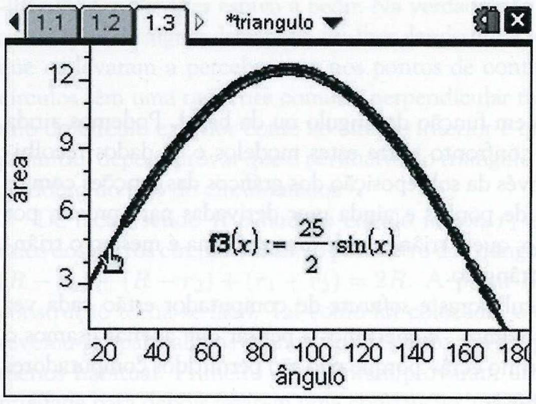
Figura 5



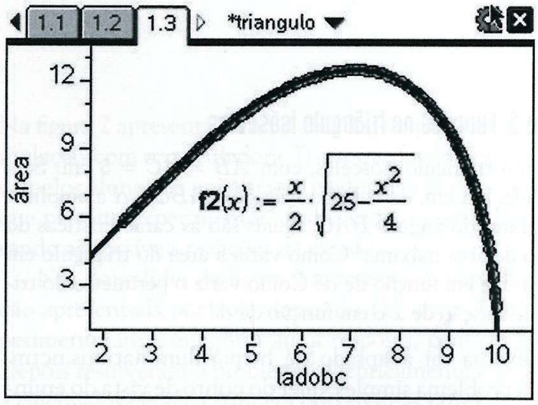
Figuras 6



Figuras 7



Figuras 8



Figuras 9

4. Traduzir a área do triângulo em função de x (medida de BC) e confirmar que essa função se ajusta à respectiva nuvem de pontos. Fazer o mesmo para a área em função do ângulo BAC e para o perímetro em função do lado ou do ângulo. (Fig. 6 a 9)

Poderemos ainda pedir aos alunos que generalizem para o triângulo isósceles de base x, lados iguais l, e ângulo oposto à base α. Obteremos para a área e perímetro, em função de x e de α, respectivamente:

$$a(x) = \frac{x}{2}\sqrt{l^2 - \frac{x^2}{4}}; \quad a(x) = \frac{l^2}{2}\operatorname{sen}\alpha;$$

$$p(x) = 2l + x \quad \text{e} \quad p(x) = 2l\left(1 + \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right).$$

Em síntese, parece-me que a resolução de problemas e a oportunidade de usar ferramentas diversificadas nomeadamente as tecnológicas são importantes para que os alunos estabeleçam conexões entre ideias e temas matemáticos. Para que isto aconteça é também indispensável algum tempo, o tempo para trabalhar em sala de aula, o tempo para o professor poder ajudar os alunos com as tais «dicas» e desafios em vez de responder à velha pergunta «stora o que é que é para fazer?» Mas, é preciso, também, menos alunos nas turmas, pelo menos algumas vezes. Reivindiquemos o desdobramento (perdido) em Matemática!

Nota: Os problemas apresentados neste artigo foram trabalhados na escola e numa sessão prática do ProfMat 2009, com a colega Teresa Moreira.

Referências

Materiais do Projecto T3 da APM

NCTM (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Adelina Precatado

E. S. de Camões, Lisboa