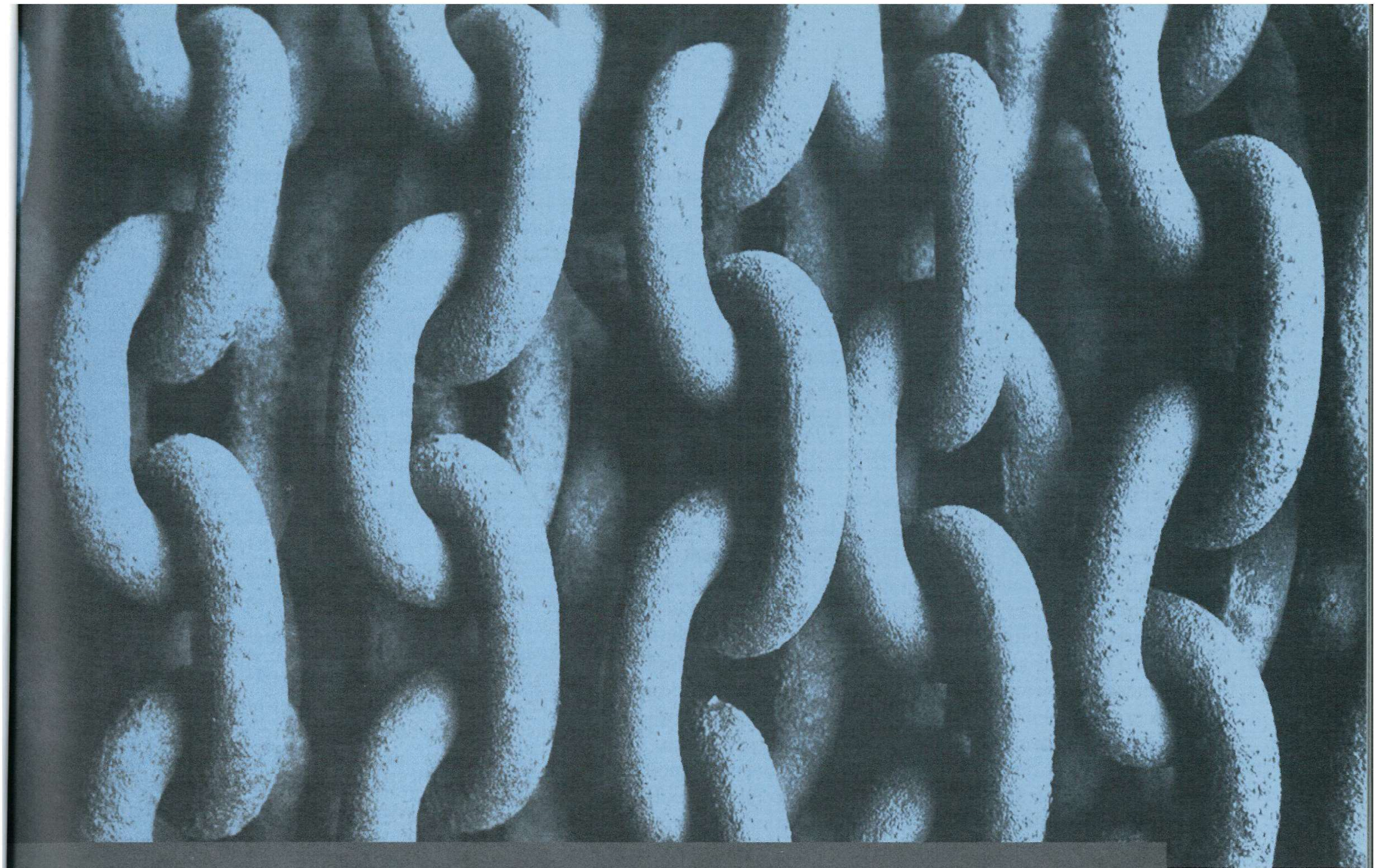


Cadeias de problemas, conexões matemáticas e articulação curricular entre ciclos de ensino — uma experiência em par pedagógico

Margarida Raquel Neves
Nélia Amado
Susana Carreira

Introdução

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) considera que o ensino da Matemática deve ser orientado por duas finalidades fundamentais:

a) Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua mobilização em contextos diversificados;
b) Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência.

A estas finalidades está associado um conjunto de objectivos gerais que contemplam múltiplas dimensões da aprendizagem, tais como: a representação, a comunicação, o raciocínio, a resolução de problemas, as conexões, a compreensão e o uso da Matemática em contextos diversificados.

A resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemática constituem eixos centrais deste programa e importantes orientações metodológicas na estruturação das actividades a dinamizar pelo professor em sala de aula. A resolução de problemas é considerada uma capacidade matemática fundamental; os alunos devem ser capazes de lidar com problemas matemáticos e também com problemas ligados a contextos do seu dia-a-dia e a outros domínios do saber. Trata-se de saber resolver e formular problemas, analisar diferentes estratégias e efeitos de alterações no enunciado de um problema. A resolução de problemas é, não somente, um importante objectivo de aprendizagem como ainda uma actividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos (ME, 2007).

As orientações curriculares presentes neste programa trazem claramente novos desafios ao papel do professor. Neste contexto, o trabalho colaborativo entre os professores reveste-se de uma importância crescente, ao contribuir para gerar momentos de partilha e discussão, que permitam responder a esses desafios.

O presente artigo ilustra uma experiência desenvolvida em par pedagógico entre duas professoras, valorizando a resolução de problemas e as conexões matemáticas e explorando oportunidades de articulação entre tópicos matemáticos dos 2.° e 3.° ciclos.

Breve fundamentação

Ensinar através da resolução de problemas ajuda o aluno a comunicar ideias, a investigar relações e a estabelecer conexões entre conceitos matemáticos, o que favorece o surgimento de relações matemáticas significativas e um conhecimento mais profundo da Matemática. Vale (2000) defende que o ensino da resolução de problemas deve incluir a possibilidade de aprendizagem de conceitos e ideias matemáticas. A perspectiva é a de que estes surjam a partir de problemas através dos quais possam ser compreendidos e explorados.

Neste tipo de abordagem, torna-se essencial dar atenção às tarefas seleccionadas, reflectir sobre as suas potencialidades e criar um ambiente de constante questionamento que leve os alunos a clarificar os seus processos de pensamento, a analisar os erros e a aprimorar as respostas (Lloyd, 1997).

Como se pode perceber, no programa de Matemática coloca-se em destaque a importância de desenvolver a compreensão da Matemática, o significado dos conceitos, algoritmos e procedimentos, o reconhecimento de regularidades e a análise de raciocínios ou estratégias matemáticas (Serrazina & Oliveira, 2010). É neste contexto que faz sentido pensar em cadeias de tarefas, ricas e articuladas, e em considerar a ideia de trajectória de aprendizagem como base de organização do trabalho em sala de aula.

Tarefas matemáticas significativas devem, em geral, encorajar uma variedade de soluções e abordagens, focar conceitos matemáticos relevantes e requerer justificação para as soluções apresentadas. Entre outros recursos a encarar, o computador terá um lugar importante, ao incentivar a curiosidade e encorajar os alunos a descobrir padrões e regularidades e a utilizar diferentes representações matemáticas. Ao aluno está a atribuir-se, indiscutivelmente, o papel de participante activo na construção do pensamento matemático. E o cenário da utilização de recursos tecnológicos é, como há muito se sabe, um dos que poderá conduzir a situações novas e imprevistas, o que vem reforçar a necessidade e a pertinência do trabalho em par pedagógico (Santos, 2000; Almiro, 2005).

Uma experiência em par pedagógico

A experiência que descrevemos foi desenvolvida numa turma do 6.° ano pela primeira autora (professora do 3.° ciclo) e por Maria, professora do 2.° ciclo da mesma escola.

O trabalho em par pedagógico envolveu uma colaboração activa na preparação das aulas, na selecção e análise das tarefas, na utilização a dar ao computador, na discussão acerca das conexões matemáticas possíveis e da articulação vertical entre os tópicos dos dois ciclos. Esta colaboração pautou-se pela existência de objectivos comuns relativamente ao trabalho com os alunos e também de uma perspectiva partilhada do currículo e do processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

As duas professoras partilharam, ao longo de um ano lectivo, a tarefa de selecção de um vasto conjunto de problemas e a sua aplicação em sala de aula.

No 2.° e no 3.° período foram implementadas três cadeias de problemas que previam o estabelecimento de conexões matemáticas e a articulação entre tópicos leccionados no 2.° e 3.° ciclos, com recurso ao computador.

A primeira cadeia — *Sequências numéricas, regularidades e funções* — era composta por quatro problemas: 1) Peças hexagonais; 2) Sólidos com cubos; 3) Sobram sempre cinco!; 4) Uma escada com cubos. A exploração de cada problema englobou dois momentos distintos em sala de aula. O primeiro consistiu na resolução do problema, individualmente, com papel e lápis, seguida da apresentação do processo de resolução e do confronto de ideias com toda a turma. O segundo, em grupos, ocorreu quando se realizou a exploração adicional de cada problema na folha de cálculo. Este foi o momento mais utilizado para abordar novos conhecimentos matemáticos e introduzir conceitos tratados no 3.° ciclo: representação de pontos no plano cartesiano, termo de uma sequência e ordem do termo, função, objecto e imagem, variável independente e variável dependente, representação gráfica e expressão analítica das funções linear, afim e quadrática.

Apresentam-se, na página seguinte, os quatro problemas propostos na 1.ª cadeia.

Passamos a relatar alguns episódios de aulas que surgiram no decurso da exploração dos problemas com recurso à folha de cálculo.

Na questão 4 do problema 1 (peças hexagonais), pretendia-se que os alunos chegassem à expressão analítica da função $y = 3x$ e compreendessem o seu significado no contexto do problema. Para isso, passaram pela construção de uma tabela, representaram pontos no referencial cartesiano, construíram o gráfico e encontraram a expressão.

Episódio: A função de proporcionalidade directa

Maria: Observem as coordenadas dos vários pontos representados no referencial. Podemos afirmar que existe uma situação de proporcionalidade directa?

Grupo 4: Sim.

Maria: Porquê?

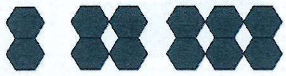
Grupo 4: Na tabela, os números das peças são três vezes os números da figura.

Margarida: E por que será que isso acontece?

Grupo 6: Porque cada figura precisa de mais três peças.

PROBLEMA 1

A Beatriz construiu a seguinte sequência de figuras com as peças hexagonais que retirou do seu baú de brinquedos.



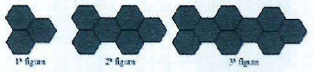
1.ª figura 2.ª figura 3.ª figura

1. De quantas peças hexagonais a Beatriz necessita se quiser construir a 4ª figura da sequência? E a 10ª figura?

2. Desenha a 6ª figura da sequência.

3. Qual é a figura que precisa de 30 peças hexagonais para ser construída?

4. A Beatriz decidiu construir uma nova sequência de figuras utilizando as mesmas peças.



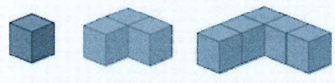
1ª figura 2ª figura 3ª figura

4.1 De quantas peças hexagonais a Beatriz necessita se quiser construir a 4ª figura da sequência? E a 6ª figura?

4.2 Qual é a figura que necessita de 27 peças para ser construída?

PROBLEMA 2

O Carlos construiu vários sólidos geométricos utilizando somente cubos e formou uma sequência, da qual se apresentam os três primeiros termos:



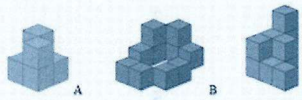
1.º sólido 2.º sólido 3.º sólido

1. Quantos cubos são necessários para construir o 5.º sólido da sequência?

2. Qual é a ordem do sólido na sequência se necessita de 15 cubos para ser construído?

3. Algum sólido desta sequência tem 36 cubos no total?

4. Qual dos sólidos A, B ou C é equivalente ao sólido representado na 6.ª figura da sequência?



A B C

PROBLEMA 3

O Rodrigo tem quase uma centena de berlindes. Foi colocá-los em caixas de 10 e sobraram-lhe 5! Tentou colocá-los em caixas de 15 e sobraram-lhe novamente 5!

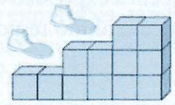
Quantos berlindes tem o Rodrigo?

Campeonato de Resolução de Problemas SUB12
Edição 2007/2008 – Problema 12

PROBLEMA 4

A Raquel pretende construir uma escada, empilhando cubos como se mostra na figura.

Se ela quiser que a altura da escada seja de 7 cubos, quantos cubos irá precisar para construir essa escada? E se a altura for 11 cubos?



Campeonato de Resolução de Problemas SUB12
Edição 2008/2009 – Problema 5 (Adaptado)

Margarida: E isso acontece sempre? Cada figura precisa de mais três peças do que a figura anterior para ser construída?

Alunos: Sim. [responderam a maioria dos alunos da turma]

Maria: Recordam-se de, na aula passada, quando resolvemos as questões 1, 2 e 3 deste problema, termos referido tratar-se de uma situação de proporcionalidade directa?

Alunos: Sim.

Maria: O acréscimo, por figura, era sempre igual! E de quantas peças hexagonais?.

Alunos: Duas.

Margarida: Agora o acréscimo é de...? [Pausa]

Alunos: Três.

Margarida: Será que o gráfico que contém os pontos é uma recta ou uma curva?

Grupo 2: Uma recta.

Margarida: Porquê?

Grupo 2: Porque é de proporcionalidade directa.

Margarida: Vamos confirmar então. Cliquem sobre um dos pontos, pressionem o botão do lado direito do rato e, em seguida, seleccionem adicionar linha de tendência.

Os alunos foram seguindo as orientações dadas.

Margarida: Coloquem o cursor sobre a recta e pressionem o botão do lado direito do rato. Seleccionem formatar linha de tendência e, em seguida, mostrar equação do gráfico.

A certa altura, visualizaram o gráfico no ecrã (figura 1). Seguidamente, Maria colocou uma nova questão à turma.

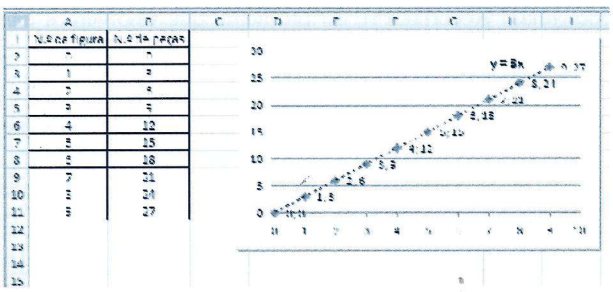


Figura 1. Tabela, coordenadas, gráfico e expressão analítica da função y = 3x.

Número da figura	Número de peças	Número de cubos
1	2	1
2	4	3
3	6	5
4	8	7
5	10	9
6	12	11

Figura 2. Tabela construída no quadro

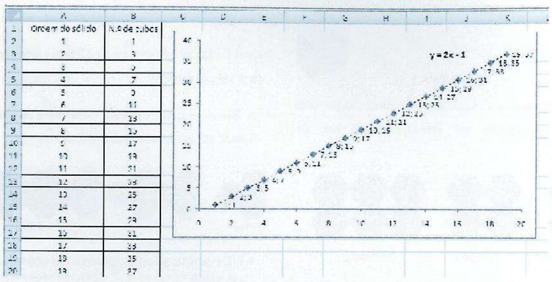


Figura 3. Gráfico da função $y = 2x - 1$

Maria: Por que razão aparece o três na expressão da recta $y = 3x$?

Grupo 1: Porque aumenta de três em três.

Maria: E se o número de peças aumentasse quatro de cada vez? Como é que aparecia a expressão da recta?... y igual a ... [Aguardou que algum aluno respondesse].

Grupo 4: Quatro.

Grupo 1: Não, é $4x$!.

Grupo 4: Porque é que não pode ser só 4?

Grupo 1: Porque as figuras não têm todas quatro peças.

Margarida: Isso mesmo.

Maria: Observem de novo o gráfico. A recta $y = 3x$ contém o ponto (0,0)?

Alunos: Sim.

Maria: Posso afirmar que o gráfico representa uma situação de proporcionalidade directa?

Alunos: Sim.

Margarida: Porquê?

Grupo 7: Porque tem o zero.

Margarida: E o gráfico é uma recta ou uma curva?

Grupo 5: É uma recta.

O segundo episódio ocorreu após os alunos terem construído na folha de cálculo uma tabela de valores para responder às questões do problema 2 (sólidos com cubos).

Episódio: O conceito de função afim

Margarida: Recordam-se do problema que resolvemos das peças hexagonais?

Alunos: Sim.

Margarida: O gráfico que obtivemos era uma recta ou uma curva?

Alunos: Uma recta.

Maria: E o que tinha essa recta de especial?

Grupo 6: O zero.

Margarida: Passava na origem do referencial. E porquê, alguém sabe?

Grupo 5: Porque era de proporcionalidade directa.

Margarida: E este problema que estamos a resolver, será de proporcionalidade directa?

Grupo 7: Não.

Maria: Porquê?

Grupo 2: No problema das peças era sempre vezes dois ou vezes três.

Maria: E neste problema o que é que acontece?

Grupo 2: Nenhum número a multiplicar pela figura dá o número de cubos.

Um grupo de alunos, após consultar a resolução do problema das peças hexagonais, nos seus apontamentos, afirmou:

Grupo 1: Professora, o número de cubos é igual ao do das peças se tirarmos um.

Maria: Expliquem melhor a vossa ideia.

Aluno: Posso ir ao quadro explicar?

Maria: Sim.

O aluno dirigiu-se ao quadro e construiu uma tabela (figura 2). O diálogo gerou-se em seguida.

Aluno: O número de peças é vezes dois o número da figura e o número de cubos é o número de peças menos um.

Maria: Muito bem! E que números são estes? [Pausa] 2, 4, 6, 8, 10?

Alunos: Os pares.

Maria: E estes? 1, 3, 5, 7, 9, 11?

Alunos: Os ímpares.

Margarida: Qual foi a expressão que apareceu na recta que representámos no gráfico do número de peças hexagonais?

Maria: Consultem os vossos apontamentos.

Grupo 4: $y = 2x$.

Maria: O grupo 1 afirmou que o número de cubos era igual ao número de peças menos um. Todos concordam? Observem a tabela!

Alunos: Sim.

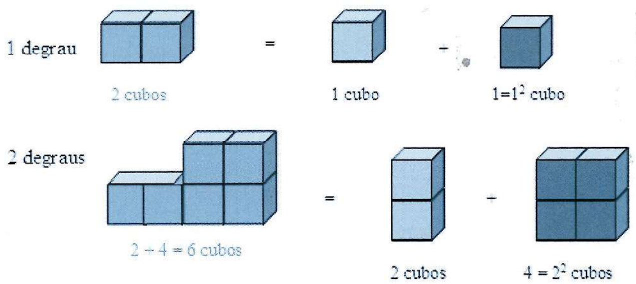


Figura 4. Esquema de contagem dos cubos por decomposição

Maria: E a expressão que obtivemos no problema das peças foi $y = 2x$?

Alunos: Sim.

Maria: Alguém sabe qual poderá ser a expressão que dá o número de cubos?

Grupo 5: O número de cubos é igual ao número de peças menos um.

Margarida: Exactamente. Logo a expressão é...?

Maria: y igual a ...[Pausa]

Grupo 1: $y = 2x - 1$.

Maria: Muito bem! É isso mesmo. Sinal de mais para o grupo 1!

A conclusão obtida pelo grupo 1 foi confirmada com a visualização do gráfico da função $y = 2x - 1$ na tela branca (figura 3).

Antes do final da aula, houve ainda oportunidade para introduzir o conceito de função afim.

Maria: O gráfico representa uma situação de proporcionalidade directa?

Alunos: Não.

Margarida: Muito bem. No entanto o gráfico é uma recta, dizemos que representa uma função afim.

Grupo 3: Sempre que é uma recta é afim?

Margarida: Sim. Mas irão aprofundar este assunto no oitavo ano.

Maria: Neste momento, apenas é importante que tomem conhecimento que nem todos os gráficos que são rectas traduzem uma situação de proporcionalidade directa.

A resolução do problema 3 (sobram sempre 5!) constituiu uma outra oportunidade para a comparação entre funções: $y = 10x$ e $y = 10x + 5$. Os alunos representaram os gráficos das duas funções na folha de cálculo e ocorreu uma discussão interessante acerca do significado dos parâmetros presentes nas duas expressões, tendo em conta o problema.

O último episódio que apresentamos surgiu durante a exploração do problema 4 (uma escada com cubos). Foi sugerido aos alunos um esquema de contagem dos cubos (figura 4). Com base no esquema, construiu-se, no quadro, uma tabela (figura 5).

Seguidamente, os alunos ligaram os computadores e fizeram a tabela na folha de cálculo. Foi-lhes pedido que seleccionassem as duas primeiras colunas da tabela e criassem o gráfico da respectiva função. O episódio desenrola-se a partir daqui.

Episódio — O gráfico de uma função quadrática

Maria: O gráfico é uma recta ou uma curva?

Alunos: Uma recta.

Maria: Por que é que aparece $y = x$?

Alunos: Porque o número de degraus é igual à altura da escada.

Margarida: Seleccionem agora os valores da primeira coluna e os da terceira coluna e construam o gráfico.

As duas professoras circularam pela sala, auxiliando os alunos, até que todos conseguiram construir o gráfico da função $y = x^2$. Maria colocou questões:

Maria: O gráfico é uma recta?

Número de degraus	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Altura das escadas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Número de cubos que restam	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
Total de cubos	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132

Figura 5. Tabela construída no quadro

Alunos: Não, é uma curva.

Maria: Por que será que isto acontece?

Grupo 2: Porque não aparece x.

Margarida: Não aparece x, como?

Grupo 2: É um x com um 2 em cima.

Maria: Querem dizer que aparece x ao quadrado?

Grupo 2: Sim. Se fosse só x era uma recta.

Margarida: E $y = x + 2$ também era uma recta?

Grupo 3: Sim, só que não passava no meio.

Maria: Quando o gráfico de uma função é uma curva e a função é do tipo $y = x^2$, ela classifica-se como ... [Maria fez um sinal a Margarida]

Margarida: Função quadrática.

Maria: Irão estudar este assunto quando chegarem ao nono ano. [Pausa] Atenção turma! Outra coisa nova que aprenderam hoje é que nem todos os gráficos de funções são rectas. [Pausa] Também podem aparecer curvas.

Conclusão

A exploração adicional dos problemas, com recurso à folha de cálculo, possibilitou introduzir novos conceitos matemáticos, recorrer a várias representações, estabelecer conexões entre tópicos matemáticos, formular e testar conjecturas, bem como, generalizar. Contribuiu para que os alunos desenvolvessem o seu pensamento matemático, percebendo que a Matemática pode ser construída.

No decurso desta experiência o currículo foi interpretado e recriado pelas duas professoras, em torno de propósitos comuns. Os próprios problemas possibilitaram estabelecer várias conexões matemáticas entre conceitos e articular tópicos abordados nos 2.º e 3.º ciclos. A exploração dos problemas implicou analisar questões, investigar diversas estratégias de resolução, bem como comunicar e discutir essas estratégias. Note-se que, numa fase inicial, os alunos usaram as suas concepções anteriores sobre como realizar a tarefa mas, numa fase posterior, após a reflexão e a comparação dos diferentes processos deram passos cruciais para o desenvolvimento de uma nova concepção (Serrazina & Oliveira, 2010). Através do recurso ao computador, os alunos envolveram-se activamente na realização das tarefas, experimentando, explorando, investigando, escolhendo e decidindo, revendo e avaliando os resultados alcançados.

O trabalho na resolução dos problemas envolveu sempre três períodos de acção: 1) abordagem inicial ou preparação; 2) desenvolvimento; 3) revisão global. Inicialmente, os alunos tentaram resolver individualmente o problema, recorrendo a processos distintos de resolução que foram apresentados por escrito e oralmente; seguiu-se o momento da discussão colectiva que incidiu sobre os vários processos de resolução utilizados; posteriormente, procedeu-se à validação dos resultados, ao estabelecimento de generalizações e à formulação de novas questões que foram aprofundadas com recurso à folha de cálculo.

Muitos dos conceitos matemáticos emergiram da exploração dos próprios problemas, tendo sido possível estabelecer uma variedade de conexões matemáticas, além de numerosas ligações entre tópicos do 2.º e do 3.º ciclo do ensino básico.

Referências

Almiro, J. (2005). Materiais manipuláveis e tecnologia na sala de aula de Matemática. In GTI — Grupo de Trabalho e Investigação (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular*, (pp. 275–315). Lisboa: APM.

Lloyd, C. T. (1997). Mathematics is process education. In A. L. Costa & R. M. Liebmann (Eds.), *Envisioning Process as Content: Toward a Renaissance Curriculum*, (pp. 95–106). Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC. (disponível *online*)

Santos, E. (2000). O computador e o professor: um contributo para o conhecimento das culturas profissionais dos professores. *Quadrante*, 9(2), p. 55–81.

Serrazina, L. & Oliveira, I. (2010). Trajectórias de aprendizagem e ensinar para a compreensão. In GTI — Grupo de Trabalho de Investigação (Org.), *O professor e o programa de matemática do Ensino Básico* (pp. 43–59). Lisboa: APM.

Vale, I. (2000). *Didáctica da matemática e formação inicial de professores num contexto de resolução de problemas e de materiais manipuláveis*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: APM.

Margarida Raquel Neves,
E.B. 2,3 D. Afonso III, Faro

Nélia Amado,
FCT da Universidade do Algarve

Susana Carreira,
FCT da Universidade do Algarve