Um olhar sobre a construção de conexões matemáticas no estudo das Sucessões

Helena Paradinha
Tamara Leuca

O matemático Hung-Hsi Wu, professor na Universidade da Califórnia em Berkeley, na conferência realizada em Janeiro de 2010 no departamento de educação da FCUL, defendeu a importância de os alunos captarem a essência da Matemática: «(...) a Matemática é uma tapeçaria na qual os conceitos e as capacidades se interligam, formando um todo (...)» (Wu, 2008, p. 5). Após a conferência, a que ambas assistimos, conversámos sobre as nossas motivações para explorar o tema das conexões em diferentes etapas do nosso percurso profissional. Partilhámos a nossa experiência como alunas que estudámos em países e décadas diferentes, e o facto de termos identificado conexões matemáticas tardiamente. Enquanto professoras gostamos de poder proporcionar aos nossos alunos experiências que relacionem representações matemáticas e respectivos processos, de modo a quebrar o isolamento entre temas matemáticos.

As orientações curriculares para o ensino — aprendizagem da matemática no ensino secundário têm vindo a dar maior ênfase às conexões. Neste artigo incidiremos sobre as conexões entre tópicos matemáticos e entre diferentes representações matemáticas.

Segundo as normas (NCTM, 2008), os alunos devem:

- Reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas;
- Compreender a forma como as ideias matemáticas se inter-relacionam e se constroem umas a partir das outras para produzir um todo coerente;

Um dos aspectos que se alterou das Normas de 1991 para 2008 foi que, para todos os níveis de ensino, os quatro temas transversais deram lugar a cinco, sendo as representações o quinto tema agora introduzido. Para além de valorizar as múltiplas representações de um conceito, esta decisão é fundamentada, segundo Jones (1999), em três argumentos:

— mover-se com flexibilidade entre diferentes representações é uma base para criar conceitos e pensar matematicamente;

— a forma como são representadas as ideias matemáticas pelos professores tem impacto na forma como a matemática é aprendida;

— os alunos necessitam de prática na construção das suas próprias representações para se tornarem bons resolvedores de problemas.

Referem ainda que: «grande parte do poder da matemática advém da capacidade de observar e operar com objectos sob diferentes perspectivas.» (NCTM, 2008, p. 423) e «Quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente.» (NCTM, 2008, p. 75)

Investigadores em Educação Matemática, defendem que as múltiplas representações são um suporte para a compreensão de conceitos e relações matemáticas. Representações distintas focam, geralmente, aspectos diferentes de relações ou conceitos complexos. Como tal, para os alunos conhecerem em profundidade um conceito matemático necessitam de uma diversidade de representações que suportem a sua compreensão.

Por outro lado, valorizar as diferentes representações usadas pelos alunos pode revelar aspectos da compreensão dos conceitos que de outra forma não emergiriam (Aspinwall e Shaw, 2002).

No entanto, segundo Athanasios, Iliada e Nikos (2006), a maioria dos alunos do ensino secundário e universitário apresentam grande dificuldade para se moverem da forma flexível no conjunto das representações duma dada função e em seleccionar as representações mais apropriadas para a resolução de problemas. Os resultados das investigações neste domínio mostraram que a utilização de software matemático sugeriu pistas para ajudar os alunos a superar com sucesso estas dificuldades.

Schultz (2000) refere-se às múltiplas representações enunciando a representação verbal, por tabela, por gráfico, algébrica e por matriz. Com base num estudo, em sala de aula, este autor procura responder às seguintes questões: Qual das representações promove melhor a compreensão conceptual? Que representação generaliza melhor os conteúdos matemáticos? Que representação se aplica melhor para encontrar soluções aproximadas? Que representação se aplica melhor para encontrar soluções exactas? Que representação é melhor para um tipo dado de tecnologia? Que representação se adequa melhor ao nível de aprendizagem e ao conforto do estudante?

Nas indicações metodológicas do programa de Matemática A para o 11.° ano pode ler-se: «As sucessões aparecem com uma forma de organizar possíveis resoluções para situações problemáticas que são apresentadas com base em aspectos da realidade (social) e em aspectos do estudo das diversas ciências (Matemática incluída)» (Silva *et al.*, 2002, p. 8). No entanto, «A resolução de problemas permite chegar ao conceito de sucessão, aceder à compreensão de propriedades importantes de sucessões particulares e especialmente úteis, bem como à necessidade de elaboração de representações formalizadas» (Silva *et al.*, 2002, p. 8). A procura de padrões é uma actividade importante na construção de conexões matemáticas.

Sendo as sucessões reais funções de variável natural, cujo contradomínio está contido em IR, as sequências infinitas de números reais estudadas no ensino básico não são mais do que os contradomínios das sucessões reais. Tornando-se cada vez mais conscientes das conexões entre diversos tópicos estudados no ensino básico e diferentes áreas, os estudantes desenvolvem a capacidade de aplicar os conhecimentos sobre as sequências no estudo das sucessões, olhando para a matemática como um todo integrado.

No capítulo Sucessões Reais, propusemos[1] às duas turmas do 11° Ano do Curso Científico — Humanístico de Ciências e Tecnologias um conjunto de tarefas que enfatizam as conexões entre vários tópicos da Matemática no ensino — aprendizagem das sucessões. De entre as tarefas realizadas seleccionámos duas que envolvem conceitos de geometria ou de álgebra e múltiplas representações (geométrica, gráfica, analítica, verbal, pictórica) de forma a estudar: o papel das conexões na aprendizagem das sucessões; as representações utilizadas pelos alunos e as dificuldades manifestadas pelos alunos face às tarefas.

A Tarefa 1 permitiu aos alunos explorar o método descoberto por Arquimedes para chegar a um valor aproximado de π.

Um dos objectivos da tarefa foi a introdução dos conceitos de sucessão limitada, majorantes e minorantes.

Um dos grupos de trabalho, estabeleceu algumas relações entre amplitudes de ângulos e medidas dos lados como se pode observar na figura seguinte (Figura 1).

Estabelecendo conexões com conceitos já estudados observa-se que alguns alunos do grupo calculam o lado do quadrado aplicando o teorema de Pitágoras, enquanto outros aplicam conhecimentos de trigonometria. O grupo avança para o cálculo da área do pentágono dividindo-o em triângulos e tenta classificar os triângulos quanto aos lados. A seguir os alunos do grupo relacionam os ângulos, tentando chegar a uma generalização:

Filipe: Temos 360 a dividir por 5.

Carlos: Agora divide-se isso por dois. Isso dá 54. Este ângulo aqui é 54.

João: Ah, Ok. Mas porquê temos que relacionar?

Ana: Para chegar ao termo geral.

Filipe: Olhem, o $\cos 45° = \sin 45°$ que é $\sqrt{2}/2$. Então temos $4(\cos 45°)(\sin 45°)$.

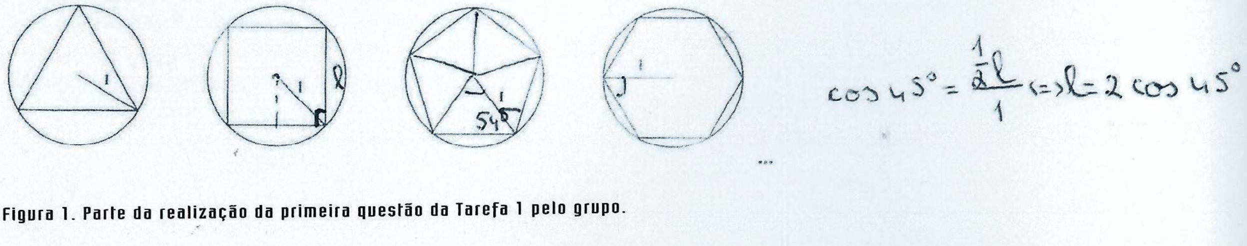


Figura 1. Parte da realização da primeira questão da Tarefa 1 pelo grupo.

Tarefa 1

1. Observa a seguinte sequência de polígonos regulares inscritos numa circunferência de raio 1.

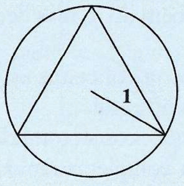


Fig. 1

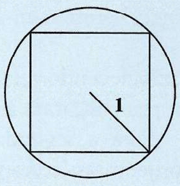


Fig. 2

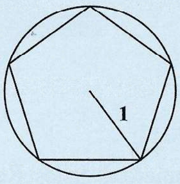


Fig. 3

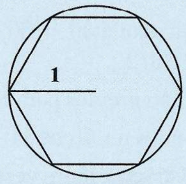


Fig. 4

...

a) Mostra que ao valor exacto da área do triângulo equilátero é de $3 \cos 30° \sin 30°$.

b) Calcula a área exacta de cada polígono da figura e seguidamente para polígonos com 10, 12, 60, 100 e 180 lados. Regista os valores numa tabela, apresentando também um valor aproximado arredondado às décimas de milésimas na última coluna.

n	Valor exacto da área	Valor aproximado da área
3	$3 \cos 30° \sin 30°$	1.2990
...		

c) À medida que o n cresce de que valor se aproxima a área? Justifica a tua resposta.

2. Considera agora os polígonos regulares circunscritos a uma circunferência de raio igual a um, como mostra a figura.

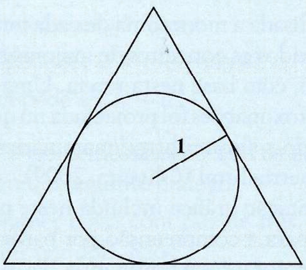


Fig. 1

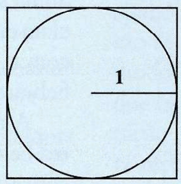


Fig. 2

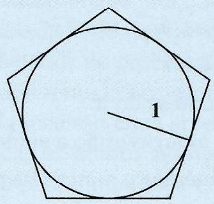


Fig. 3

...

a) Mostra que ao valor exacto da área do triângulo equilátero é de $\frac{3}{\operatorname{tg} 30°}$.

b) Calcula a área exacta de cada polígono da figura e seguidamente para polígonos com 10, 12, 60, 100 e 180 lados. Regista os valores numa tabela, apresentando também um — valor aproximado arredondado às décimas de milésimas na última coluna.

n	Valor exacto da área	Valor aproximado da área
3	$\frac{3}{\operatorname{tg} 30°}$	5.1962
...		

c) Para que valor se aproximam as áreas à medida que o n aumenta? De que forma as aproximações dos polígonos circunscritos diferem das aproximações obtidas no ponto 1 para os polígonos inscritos? Explica a tua resposta.

Adaptado de: National Council of Teachers of Mathematics (2008), http://illuminations.nctm.org

Percebendo que deve haver uma relação entre o número de lados e a amplitude dos ângulos que os ajudará a elaborar uma expressão para todos os polígonos, continuam a procurar relações entre os ângulos e os lados para elaborar uma expressão semelhante à do triângulo:

Filipe: Eu acho que aqui vai dar 5 vezes qualquer coisa.

João: Pois, eu também acho.

Carlos: Olhem aqui vai dar $6(\cos 60°)(\sin 60°)$.

Ana: Aqui é 30°, ..., aqui é 45°. Aqui...

Carlos: É 54°. Ana, percebes?

Ana: Não estou a perceber. Esta expressão é para o triângulo.

Carlos: Sim. Olha aqui é $30 = 60/2$.
Depois $45 = 90/2$.

João: Mas ainda não fizemos para $n = 5$?

Carlos: Então, vamos ter $5(\cos 54°)(\sin 54°)$.

João: Então isto vai ser sempre vezes o número de lados. Reparem numa coisa...aqui será sempre a dividir por dois.

Carlos: Portanto vai ser

$$n\left(\cos\frac{180° - \frac{360°}{n}}{2}\right)\left(\frac{180° - \frac{360°}{n}}{2}\right)$$

Na segunda parte da primeira questão, o grupo observa que os valores aproximados das áreas tendem para π. Concluem assim que a sucessão das áreas se aproxima de π de forma crescente, nunca atingindo este valor. Os alunos tentam substituir mais uns valores na expressão analítica elaborada, para testar a conjectura estabelecida em relação às aproximações ao valor de π. O grupo encontra a justificação para esta aproximação, estabelecendo conexões com a área do círculo de raio 1 e tenta relacionar esta aproximação com as amplitudes dos ângulos dos polígonos:

Filipe: Tem alguma coisa com o π.

Ana: Olham, isso aqui é o π.

Filipe: Vai se aproximando-se do π.

Carlos: Do π, é? Então as áreas estão a aumentar.

Filipe: A área esta a aumentar e nunca chega a π.

João: Só quando chega ao infinito. É engraçado.

Carlos: É, não é? Agora faz para 360, para ver se ainda se aproxima mais?

João: Pois, aproxima-se, porque a área do círculo de raio um é π.

Carlos: Pois, isso aqui aproxima-se cada vez mais de 90. Quando for 90?

Filipe: A medida que n cresce, o ângulo aproxima-se cada vez mais de 90, então...

Carlos: A área vai se aproximando cada vez mais de π.

Na segunda questão, verifica-se que o grupo tenta passar logo para as expressões das áreas exactas, baseando-se no que fizeram na questão anterior. Dispondo de pouco tempo, o grupo avançou e escreveu a expressão para o termo geral:

João: Aqui, em vez de multiplicar é dividir.

Ana: Já sei, aqui será 4 a dividir por tan 45°.

Carlos: Então o termo geral será

$$\frac{n}{\tan\left(\frac{180° - \frac{360°}{n}}{2}\right)}.$$

Analisando o comportamento dos termos da sucessão, verifica-se o seguinte diálogo:

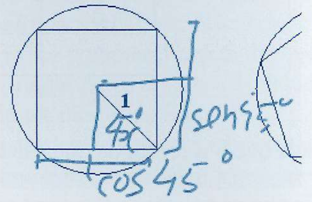
Filipe: Então, de que valor se aproximam as áreas?

Ana: Aproximam-se também do π, mas decrescendo.

Estabelecendo relações entre conceitos estudados, todos os grupos chegaram à expressão geral.

Para a segunda questão conjecturando e testando as conjecturas, conseguiram completar rapidamente a tabela, generalizando o valor exacto da área para n lados, e chegar ao termo geral.

Numa fase de discussão com toda a turma, pediu-se aos alunos para mostrarem as estratégias elaboradas para chegar à generalização. Um dos grupos explicou a estratégia elaborada para calcular a área do quadrado ilustrada.



Depois de analisada a monotonia de cada uma das sucessões, foram introduzidos os conceitos de majorantes e minorantes duma sucessão, com base nesta tarefa. Uma ilustração mais clara destas aproximações foi projectada no quadro (Figura 2) com o apoio do *software*: http://matematicadinamica.com/ficheiros/geometria.html (Oliveira, 2009).

A representação gráfica incluída neste programa foi outro benefício para a compreensão por parte dos alunos, dos conceitos de majorantes e minorantes das sucessões.

As expressões analíticas foram construídas para todos os valores da variável natural n, sem considerar os primeiros dois termos. Assim, o termo geral obtido verificava-se para $n \geq 3$. Na discussão em grande grupo, levantando esta questão, os alunos perceberam que para que o termo geral fosse válido para todos os valores de n teria que ser alterada a expressão, substituindo-se n por $n + 2$.

A Tarefa 2 tinha como objectivo a construção de expressões analíticas para as sucessões apresentadas.

Tarefa 2

Indica um termo geral para cada uma das seguintes sucessões, considerando que se mantém a lei de formação. Se for possível encontra vários processos que te conduzam a outros termos gerais.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, \ldots$

b) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

c) $0, 0, 0, 0, \ldots$

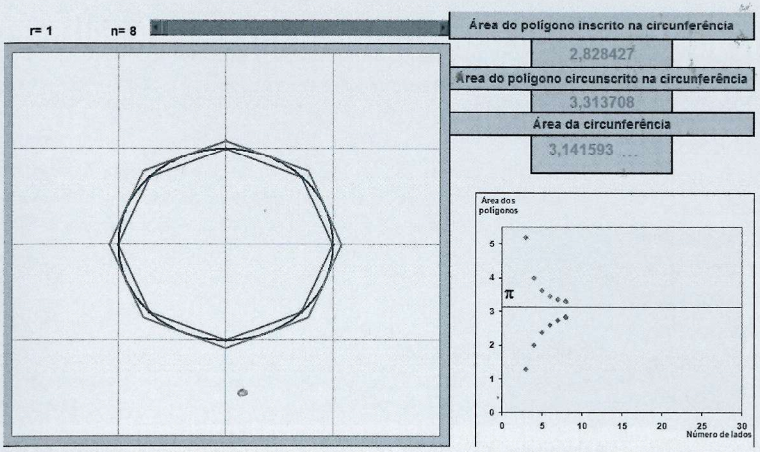


Figura 2

a) $x_n =$ ~~...~~ sen 30º ou cos 30º

b) $a_n = (-1)^{n-1}$

c) $a_n = 0 \times n$ ou $a_n = n - n$

Figura 3

Um dos grupos, apresentou o seguinte (Figura 3). Na passagem da representação numérica da sucessão para a analítica, os alunos relacionaram a ordem com o termo e introduziram no termo geral da última sucessão a variável natural, como faziam no caso das funções. Evidencia-se neste discurso, o estabelecimento de conexões com as funções e a elaboração de algumas expressões equivalentes:

Ana: O último pode ser $0 \times n$ ou não é?

Carlos: Também pode ser $n - n$?

Relativamente à primeira sucessão que os alunos acharam desafiante, ocorreu o seguinte diálogo.

Filipe: Tem qualquer coisa com raiz de três. Tem qualquer coisa a dividir por dois, não?

Ana: Não sei!

Filipe: Zero a dividir por dois, zero. Menos um a dividir por dois, menos um meio, menos dois a dividir por dois, menos um.

Carlos: Eu vou escrever qualquer coisa sobre dois.

Filipe: O que é aquela coisa não sei.

A conexão com as funções trigonométricas apoiou o grupo na elaboração do raciocínio:

Ana: Olhem, pode ser co-seno ou seno. E tem de ser sempre de 30.

Carlos: Vou escrever: $\cos(30°)$ é igual à raiz de três sobre dois. E depois?

Numa outra turma na mesma tarefa o Afonso expôs as expressões trigonométricas,

$$v_n = \cos\frac{n\pi}{6} \text{ e } v_n = \cos(30°)$$

que traduziam a sequência. O Joaquim pediu para apresentar a sua expressão afirmando que era diferente da do Afonso. Assim, escreveu no quadro, $v_n = \sin(90° - 30°n)$. Maria imediatamente pediu a palavra e afirmou: «Mas é a mesma coisa!» e justificou a sua convicção. Maria escreveu: $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ e afirmou: «Trata-se de uma das relações entre as razões trigonométricas». Explicou a sua teoria ajudando os colegas a reconheceram-na como tal.

Reflexão sobre a nossa experiência

Observou-se que os alunos durante a realização das tarefas passam por várias etapas, até chegarem à representação simbólica. A variedade de representações e a ordem como são utilizadas, depende do problema matemático em si e do modo como é apresentada aos alunos. Nos problemas em que os termos da sucessão eram apresentados pela representação geométrica, os alunos normalmente passavam desta representação para a numérica e depois para a analítica. Verificou-se em alguns casos que os alunos tentaram passar logo da representação geométrica para a simbólica. Se num problema os termos da sucessão eram apresentados através de uma representação numérica, os alunos tinham tendência de passar para a representação analítica, elaborando em algumas tarefas uma diversidade de expressões analíticas por vezes equivalentes, outras vezes não válidas.

No estudo da monotonia da sucessão, as representações analítica e gráfica são as que os alunos aplicam mais vezes. Para o estudo das sucessões limitadas, os alunos recorrem mais vezes às representações geométrica e gráfica. As conexões entre estas representações permitiram em várias situações obterem múltiplas perspectivas do problema, chegando com maior facilidade às soluções do problema. Os alunos que construiram estas conexões conseguem compreender com maior profundidade os conceitos matemáticos.

As representações geométricas facilitaram o estudo da monotonia das sucessões e permitiram descobrir novos tipos de relações, como aconteceu na Tarefa 1.

A representação geométrica facilita a elaboração dos raciocínios, mas a mesma deverá ser utilizada em conexão com outras representações para conseguir generalizar uma determinada situação problemática.

A abordagem analítica das sucessões contribuiu para evidenciar a relação entre a ordem e o termo da sucessão. Esta representação, permitiu aos alunos chegarem às propriedades abstractas das sucessões. A abordagem analítica permitiu aos alunos fazer, com rigor, o estudo da monotonia duma sucessão. As conexões entre a representação analítica e gráfica permitiram esclarecer as dúvidas em relação à monotonia. É importante mencionar que a expressão algébrica sugerida na Tarefa 1, permitiu aos alunos estabelecerem conexões entre a representação geométrica e a representação analítica dos termos da sucessão. Os alunos compreenderam a forma como as ideias matemáticas se inter-relacionam e construiram um modelo matemático para as áreas dos polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência de raio 1.

As maiores dificuldades apresentadas pelos alunos devem-se à falta de integração dos conceitos estudados, de construção de conexões entre diversos tópicos matemáticos incluindo as várias representações. Outra dificuldade manifestada pelos alunos foi o de se moverem de uma representação para a outra. A construção de conhecimento deve ser feita estabelecendo conexões entre representações, o que não se verificou no caso do João, aluno que se limitava à representação numérica. O grupo tentou em várias etapas ajudar o João a superar as dificuldades, recorrendo às representações verbal, geométrica ou gráfica. Algumas dificuldades apresentadas pelos alunos foram superadas pela análise das conjecturas elaboradas, na discussão em grupo, na turma e também com o apoio do professor. A interacção entre os alunos e as conexões estabelecidas facilitaram a ultrapassagem das dificuldades.

As dificuldades apresentadas pelos alunos na construção de conexões sugerem a necessidade de implementar na sala de aula tarefas de natureza diversificada que envolvem várias representações e que possibilitam o estabelecimento de conexões entre elas. É importante também implementar tarefas que englobam vários conceitos matemáticos e conteúdos estudados que permitem a integração dos conceitos e processos na construção de conexões.

Observámos que cada aluno tem a sua própria forma de pensar e devemos valorizar os raciocínios de cada um, sem ignorar as resoluções menos comuns que, por vezes, são as mais importantes. As produções do aluno podem fornecer informação importante sobre o seu raciocínio, as dificuldades que ele manifesta e ainda como pode ser ajudado para as ultrapassar. Pensamos que as aprendizagens realizadas pelos alunos serão essenciais para os tornar mais confiantes ao enfrentar novos problemas.

Ao reflectir sobre a experiência de sala de aula acima descrita partilhamos interrogações e aspectos a que vamos ficar mais atentas. Destacamos a forma de como podemos desenvolver nos alunos as capacidades de:

— estabelecerem conexões entre diferentes representações;

— construirem as suas próprias representações;

— seleccionarem representações adequadas aos problemas propostos.

Como professoras sentimo-nos gratificadas se agora (e futuramente) mais alunos nos digam o que um explicitou: Professora, finalmente agora já faz sentido... .

Nota

1 Trabalho desenvolvido no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática em 2010 da Universidade de Lisboa de Tamara Leuca, nas turmas de Helena Paradinha, sob a orientação de: Professora Doutora Leonor Santos e Professora Doutora Suzana Napoles.

Referências bibliográficas:

Aspinwall, L e Shaw K. (2002). Representations in Calculus: Two constrasting Cases. *Mathematics Teacher*, Set 02, 434–439.

Athanasios, G., Iliada, E., Nikos, M. (2006). *Are registers of representation and problem solving processes on functions compartmentalized in students, thinking? Revista Latinoamericana de Investigação en Matemática Educativa, número especial Comité Latinoamericano de Matemática Educativa* (pp.197–224). México: Universidad Autonoma del Estado de México.

Jones, A. (1999). *The Fifth Process Standard: An argument to Include Representation in Standards 2000.* (http://www.math.umd.edu/~dac/650old/jonespaper.html em 10/08/2006).

Leuca, T. (2010). *Conexões no ensino e aprendizagem das sucessões.* (Relatório da Prática de Ensino Supervisionada do Mestrado em Ensino da Matemática, Universidade de Lisboa).

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar.* APM e IIE.

NCTM (2008). *Princípios e normas para a Matemática Escolar* (2ª ed.). (M. Melo, Trad.). Lisboa: APM. (Obra original em inglês, publicada em 2000).

Oliveira, M. (2009). *Aplicações computacionais dinâmicas.* Acedido em 19 Abril, 2009, de www.matematicadinamica.com.

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M., & Lopes, I. M. (2002). *Programa de Matemática do Ensino Secundário. Matemática A 11ºAno.* Lisboa: Ministério da Educação — Departamento do Ensino Secundário.

Schultz, J. E. & Waters, M. S. (2000). *Concern has been growing about the role of representations in teaching mathematics. Discuss with your colleagues.* (Vol. 93, 6, pp.448–453). Easa: Copyright.

Wu, H. (2008) *The Mathematics K-12 Teachers Need to Know.* Acedido em 30 Janeiro, 2010, de http://math.berkeley.edu/~wu/Schoolmathematics1.pdf

Yerushalmy, M. (2000). *Understanding teachers' understanding of algebra taught With the support of graphing technology.* Israel: Faculty of Education, University of Haifa. Final research report. Submitted to the Spencer Foundation Small Research Grants.

Helena Paradinha
Esc. Sec. Vergílio Ferreira,Lisboa
Tamara Leuca
Esc. Sec. 2+3 Passos Manuel, Lisboa