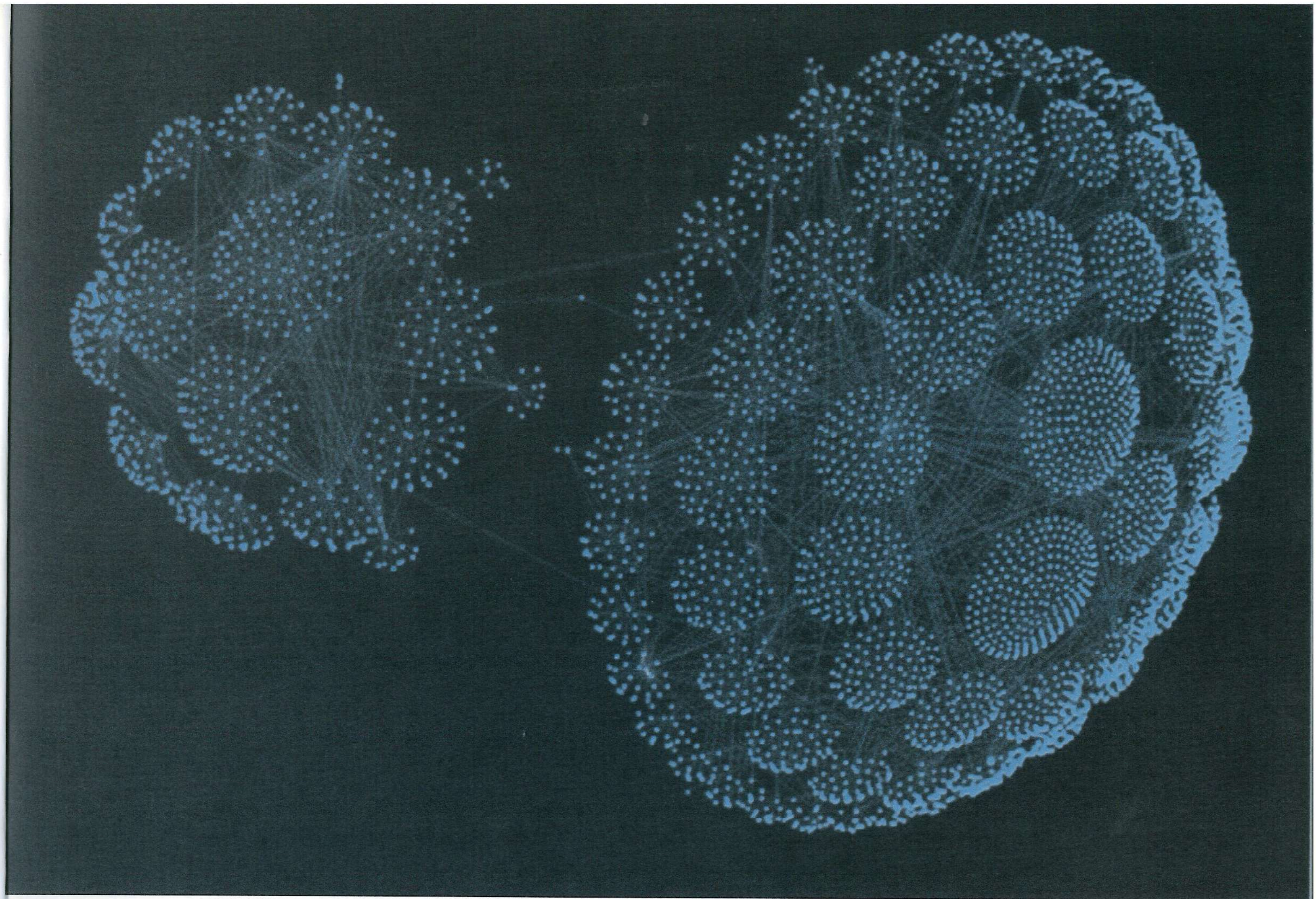


Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática

Rita Borromeo Ferri

Resumo: No ensino e aprendizagem da Matemática é importante que os alunos não vejam a Matemática como uma disciplina na qual só aprendem fórmulas e cálculos. Com efeito, a Matemática e a prática matemática fazem parte do mundo real em diversas profissões. Muitas vezes os alunos, desde o 1° ciclo até ao secundário, não chegam a perceber o papel que a matemática desempenha no mundo real. Portanto, faz parte do papel do professor estabelecer conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. Neste artigo pretendo dar um exemplo concreto para o 1° ciclo. Mostrarei que a matemática pode ser relacionada com o mundo real e que não tem de ser muito complicado fazê-lo no quotidiano escolar.

1. O resto do Mundo + Matemática = Modelação Matemática?!

Em primeiro lugar, gostaria de caracterizar o termo «modelação matemática». Na discussão didáctica a modelação matemática significa, de uma forma pragmática, resolver problemas da vida real com a ajuda de modelos matemáticos. O que é que isto quer dizer, concretamente? A modelação matemática é um processo que liga *o mundo real* e a *matemática* nos dois sentidos: da realidade para a matemática e — isto é importante — no sentido contrário, da matemática para a realidade. Este é o aspecto chave com o qual pretendo caracterizar as «conexões com o mundo real». Podemos falar de conexões com a realidade quando um problema de modelação é apresentado na sala de aula de tal forma que os alunos deixem as estruturas matemáticas internas para estabelecerem conexões com objectos reais e com as suas próprias experiências, fazendo associações.

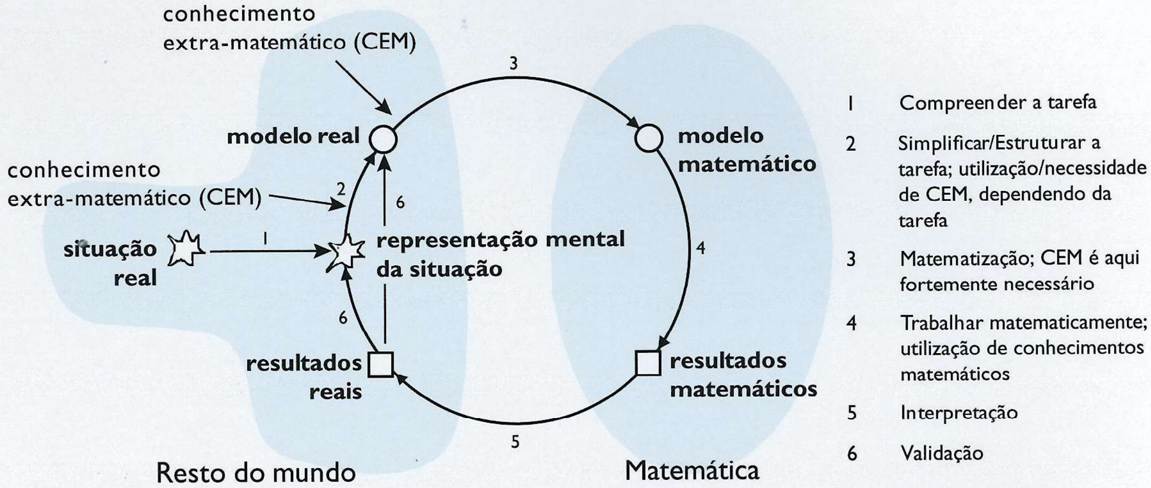


Figura 1. Ciclo de Modelação [Borromeo Ferri, 2006]

Ilustro, em seguida, o processo de modelação com o seguinte ciclo da modelação (Borromeo Ferri, 2006) e também com uma tarefa que foi trabalhada por alunos do 3° ano, sobre a qual voltarei a falar.

Olhando para este processo de modelação «ideal», parece ser muito complicado para os alunos executá-lo — mas não é. A *situação real*, tal como é designada no ciclo apresentado (figura 1), pode ser expressa de formas muito diferentes, por exemplo, com um texto escrito ou com uma imagem, porque faz parte da realidade. Para alunos do 3° ano foi criada, por mim e por alunos[1] universitários, uma imagem especial de uma situação da vida real. Chamámos a este problema «O homem e a casa» porque as questões a colocar aos alunos seriam:

1. Que altura tem o homem na realidade?
2. Qual a altura da casa na realidade?

Uma proposta adicional seria: Pensa numa questão relativa à fotografia (figura 2) e procura responder-lhe.

Decidimos que o tema «humano»seria muito interessante para alunos do 3° ano e que competências matemáticas, como medir e estimar são importantes neste contexto. Assim, tentámos desenvolver uma tarefa-com-foto, que inclui pessoas de diferentes alturas: uma criança e um adulto (em primeiro e segundo planos) um cão e, claro, uma casa. Trabalhar com fotografias como tarefas nas aulas de matemática é, em geral, muito importante porque ajuda os alunos a visualizar a situação de forma adequada. Relativamente ao problema «O homem e a casa», os alunos têm que trabalhar explicitamente com a foto, o que significa que a fotografia não é apenas decorativa. Mais do que isso, a fotografia tem um carácter visual e os alunos vêem as conexões com a realidade.

Os aspectos anteriormente descritos mostram o que significa uma *representação mental da situação*, ou seja, o segundo passo no ciclo da modelação. Os alunos têm que compreender a tarefa e o que têm de fazer com ela, mas eles próprios criam as suas próprias associações no que respeita aos elementos da realidade apresentados. A um nível muito inconsciente eles começam a simplificar e a estruturar a tarefa e constroem o chamado *modelo real*, isto é, o terceiro passo do ciclo. Nesta fase, os alunos poderiam realizar algumas acções: estimar a altura do rapaz da fotografia e compará-la com a sua própria altura. A conclusão do aluno poderia ser uma altura de 150 cm. Além disso, os alunos podem medir a altura do homem na fotografia, que é sensivelmente 6.9 cm e, claro, a altura do rapaz na fotografia que é cerca de 4.2 cm. O mesmo pode ser feito com a casa. Na fotografia, a casa tem 8.7 cm de altura e o homem que está de pé junto à casa mede cerca de 2.1 cm de altura. Ambos os dados podem ser comparados e relacionados uns com os outros. Estas acções e considerações são importantes na transição para a Matemática e, portanto, para a construção do *modelo matemático*. Um modelo[2] possível poderia ser: primeiro calcular a altura real do homem que está mais à frente (x), o que leva a medir a diferença entre as alturas do homem e do rapaz: $6.9 - 4.2 = 2.7$. O tamanho da cabeça do rapaz é, aproximadamente, 1 cm na fotografia e a altura da cabeça de uma criança na realidade é cerca de 17 cm. Portanto, o homem da imagem é maior do que a criança em 2 cabeças e meia, pelo que altura do adulto pode ser calculada da seguinte forma: $x = 150 + 17 + 17 + 9$. Agora a altura da casa (y) tem de ser determinada em conexão com o resultado obtido para a altura do homem (x). A parede da casa tem o seu ponto mais alto a cerca de 8.7 cm e o segundo homem junto à casa mede 2.1 cm na fotografia. Assim, o quociente pode ser

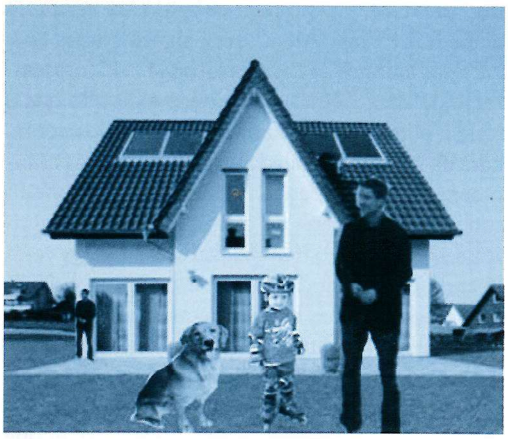


Figura 2

calculado para saber quantas vezes o segundo homem cabe na altura da parede da casa: 8.7:2.1 = 4.14 ...

A altura da casa é facilmente calculável multiplicando a altura do homem em frente à casa (x) pelo quociente determinado: 193 × 4.14.

É claro que os alunos têm que usar diferentes tipos de competências matemáticas quando trabalham matematicamente: estimar, medir, calcular com números decimais (na Alemanha isto faz parte do currículo do 5° ano), chegando a *resultados matemáticos* que constituem o 5° passo do ciclo de modelação: x = 193 cm = 1.93 m; y = 799.02 cm ≈ 7.99 m.

Depois, os resultados obtidos têm de ser interpretados para resultados reais. Isto significa dizer que a altura do homem é cerca de 1.90 m e que a casa mede cerca de 8 m de altura, na realidade. Obter os resultados reais não é o fim do ciclo da modelação. Um passo importante é agora a *validação*, isto porque a comparação entre a matemática e a realidade é um aspecto central na modelação. Por exemplo, se um resultado hipotético fosse 3.10 m para a altura do homem e se os alunos não tiverem oportunidade de reflectir sobre isto, a modelação não faz sentido. Através da validação as conexões com o mundo real podem ser estabelecidas explicitamente. Esta é uma parte fundamental do papel do professor na implementação da modelação na prática da sala de aula desde o início. Depois de ter descrito o ciclo de modelação e as suas etapas ao longo da tarefa «O homem e a casa» volto à questão que coloquei no início desta secção: O resto do Mundo + Matemática = Modelação Matemática?!

Se tivermos boas tarefas de modelação que apresentem um problema ou uma situação da realidade e se a matemática for necessária para resolver esse problema, então podemos falar de modelação matemática. Mas isto não é a história toda, porque os problemas de modelação podem ser de muitos tipos diferentes. Por isso existem alguns critérios, que tornam claro que resolver tarefas de modelação não é o mesmo que a bem conhecida resolução de problemas. Nas actividades de modelação matemática, os alunos aprendem a percorrer todo o ciclo da modelação. Este é um dos critérios principais para uma boa tarefa de modelação. Mas há outros aspectos que devem ser mencionados. Estes critérios podem ser observados do 1° ciclo ao secundário e foram desenvolvidos por mim, pelos meus alunos universitários e por professores nas escolas, com base em muitas experiências envolvendo a construção de tarefas de modelação e a sua implementação na sala de aula:

1. *Significado da tarefa de modelação*

   É necessário que os alunos possam lidar com a tarefa e que nela encontrem sentido quando trabalharem sobre ela.

2. *Contexto realista adequado à idade*

   Cada pessoa tem a sua visão da realidade e as suas próprias experiências, o que se torna muito heterogéneo numa turma. A vida quotidiana de uma criança de 8 anos numa escola de 1° ciclo é muito diferente da de um jovem de 18 anos do ensino secundário. Por isso, há aspectos que têm de ser tidos em conta na escolha de uma tarefa de modelação para que interesse a um determinado grupo etário.

3. *Provocação de questões*

   A tarefa de modelação deve dar oportunidade aos alunos de colocar novas questões. Estas questões podem referir-se tanto ao nível matemático como ao nível extramatemático da tarefa.

4. *Estimulação de formas holísticas de aprendizagem*

   «Aprender com todos os sentidos» é também possível com tarefas de modelação, em particular, para aqueles problemas complexos de modelação, que são geralmente resolvidos fora da sala de aula.

5. *Nível de linguagem adequado*

   A tarefa de modelação deve ser formulada de modo que os alunos a possam compreender, tendo em conta o seu nível de ensino. Frases pouco claras impedem os alunos de construir representações mentais de um dado contexto numa tarefa.

Também Maaß (2007) apontou algumas características que podem ser tidas como típicas para as tarefas de modelação. Para esta autora as tarefas de modelação são:

- Abertas
- Complexas
- Realísticas
- Autênticas
- Problemas
- Resolúveis através do processo de modelação

2. 90 minutos de modelação matemática no 3º ano — considerações didácticas e foco de observação

Mostrarei, seguidamente, como o problema «O homem e a casa» pode ser implementado na prática de sala de aula e como a aula pode ser estruturada (tabela 1). Importa frisar que esta turma de 3° ano não estava familiarizada com a modelação matemática, por isso um dos focos de observação foi sobre a forma como os alunos lidam com este problema e como as relações com a realidade podem ser estabelecidas.

Na Alemanha uma aula tem normalmente a duração de 45 minutos, mas depende da decisão da escola, pelo que são comuns aulas de Matemática com 90 minutos. Em particular, para a implementação da modelação matemática na prática de sala de aula são recomendáveis os blocos de 90 minutos. O tempo não é apenas necessário para a resolução do problema mas também para apresentação dos resultados, para a validação e discussão. Voltarei a estes aspectos mais à frente quando descrever em detalhe os alunos do 3° ano a trabalhar no problema.

Para além do problema «O homem e a casa» levámos outros materiais para a sala de aula: *flipcharts* para apresentação das soluções, fitas e réguas, para os alunos usarem se assim o desejassem.

Na tabela 1, pode ver-se a estrutura da aula com a distribuição dos tempos e comentários didácticos.

Enquanto os alunos trabalharam no problema de modelação, nós tivemos vários focos de observação:

1. Acções e reacções dos alunos no que respeita à sua primeira experiência num problema de modelação.
2. Formas como as conexões com o mundo real apareceram durante a discussão.
3. Como foram usadas as competências matemáticas.
4. Como é que o ciclo de modelação foi percorrido pelos alunos.

No que respeita às acções e reacções dos alunos no trabalho com o problema de modelação tornou-se claro que todos estavam muito motivados porque nunca tinham resolvido um problema destes anteriormente. No início todos os grupos estavam um pouco atrapalhados relativamente à forma como resolver este problema — não foram fornecidos quaisquer números para as alturas do homem ou do rapaz na foto.

A maioria dos alunos usou os materiais e fê-lo muito bem. Um grupo mediu a altura da porta da sala de aula para ter uma ideia da altura do homem à frente na foto. Deste modo, mostraram que são capazes de relacionar tamanhos e de tirar conclusões, dado que a porta da casa na foto é da mesma altura da porta da sala de aula, na vida real. Portanto, os alunos fizeram *conexões com a vida real*. Um exemplo de uma conexão da vida real, entre muitas outras, foi formulado por Finn. Ele disse: «O homem da foto é da altura do meu pai que mede 1.85 m». Além disso, alguns grupos estimaram a altura dos andares da casa na fotografia. Consideraram que o tecto de uma divisão é um pouco mais alto que o homem ou que a porta, que tinham medido anteriormente. Assim, a altura da casa foi calculada por alguns grupos usando a adição como uma competência matemática: primeiro piso + segundo piso + empena da casa. Outros grupos usaram a multiplicação porque o homem da foto cabe três vezes na altura da casa. Outros ainda usaram a divisão e, por último, um grupo usou fracções embora estas não sejam ensinadas de forma sistemática antes do 5° ano, na Alemanha. Uma série de competências matemáticas foram usadas pelos alunos para resolver o problema.

Durante a resolução do problema tornou-se visível que alguns grupos não validaram os seus resultados matemáticos e, portanto, não passaram por todas as fases do ciclo de modelação. Por exemplo, um grupo calculou a altura da casa em 4.50 m. Então foi necessária uma intervenção do professor, bastando perguntar aos alunos se a casa pode ser realmente duas vezes mais alta do que o homem da fotografia. Os alunos voltaram ao seu modelo real e modificaram o seu modelo matemático, obtendo um resultado adequado para a altura da casa.

A seguir ilustram-se e discutem-se os resultados de alguns grupos seleccionados.

Processo de modelação do grupo 3 (figura 3):

A: O homem mede 1.78

R: a porta mede 2.12 m e depois calculamos menos 23 cm e depois obtivemos 1.78 m

A: A casa é 4 vezes mais alta que o homem

$4 \times 1.78 = 7.12$

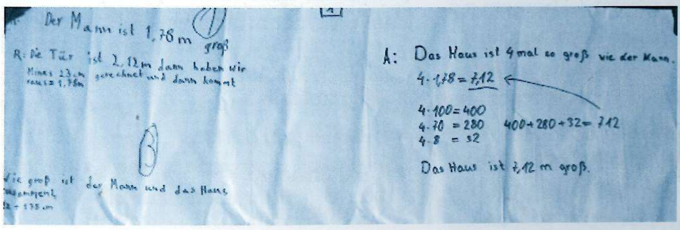
$4 \times 100 = 400$

$4 \times 70 = 280$

$4 \times 8 = 32$

$400 + 280 + 32 = 712$

A altura da casa é 7.12 m.



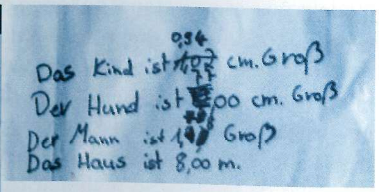


Figura 3

Fases	Tempo	Actividades do professor/ intervenções	Considerações relativas aos alunos/ actividades dos alunos	Objectivo
Introdução	0-15 min	Introdução do problema «O homem e casa»; clarificação do problema com os alunos e apresentação de materiais disponíveis, constituição de grupos de 4 alunos usando cartões coloridos (desta maneira os alunos que habitualmente não trabalham juntos podem ficar misturados).	Os alunos colocam questões sobre a tarefa, porque se sentem confusos sobre o formato da tarefa (não são dados números); os alunos já se encontram em grupos de 4.	Os alunos têm o primeiro contacto com o problema e devem ficar motivados para trabalhar com o grupo.
Trabalho de grupo no problema	30 min	O professor vai acompanhando o trabalho dos diferentes grupos; o professor intervém adequadamente.	Os alunos trabalham em grupo, usam os materiais e escrevem as suas soluções no *flipchart*.	Os alunos estabelecem conexões com a realidade e usam as suas competências matemáticas; competências sociais também são promovidas.
Em grande grupo	5 min	O professor pede aos alunos que se sentem de frente para o quadro.	Os alunos podem estar um pouco agitados depois do trabalho de grupo.	Os alunos devem ter uns minutos para se concentrarem.
Apresentação	25 min	O professor pede aos grupos para apresentarem os seus resultados. Aos grupos que não estão a apresentar são dadas «instruções de audição». Isto significa que eles têm que estar atentos aos aspectos centrais das soluções dos outros grupos para as comparar com as suas (este é um método simples que gera uma atmosfera calma enquanto decorrem as apresentações).	Vários grupos põem o seu *flipchart* no quadro e explicam as suas soluções. Os alunos seguem as instruções de audição e comparam as soluções dos outros grupos com as do seu grupo para posterior discussão.	Os alunos apresentam e comunicam as suas soluções.
Validação e discussão	15 min	O professor começa a discussão com uma intervenção do tipo: «Temos diferentes soluções. Qual estará certa?» O professor será aqui apenas um moderador da discussão.	Os alunos discutem as soluções e também os processos de resolução. Clarificam a autenticidade das soluções.	Os alunos têm a possibilidade de reflectir sobre os seus resultados matemáticos e de como estes podem ser ou não realistas.
Síntese e *feedback*	5 min	O professor sintetiza os resultados da discussão e deixa claro que os problemas de modelação não conduzem a um resultado único mas a vários resultados que têm que ser confrontados com a realidade. O professor pede aos alunos *feedback* sobre a aula e sobre o problema de modelação.	Os alunos dão *feedback* ao professor.	

Tabela 1

Qual a altura da casa mais o homem?

712 + 178

A criança mede 94 cm

O cão mede 77 cm

O homem mede 1.78

A casa mede 8.00 m.

Os alunos constataram que o homem em 2° plano na foto é da altura da porta da casa. A partir daí, mediram a porta da sala de aula (2.12m). Com base nesse valor a altura do homem foi estimada. Para chegar à altura da casa, os alunos pensaram quantas vezes a altura do homem em 2° plano na foto caberia na altura da casa (4 vezes). Um dos rapazes do grupo multiplicou por 4 a altura do homem (4 × 1.78).

Processo de modelação do grupo 1 (figura 4):

Cálculo:

A criança 1.50

A criança mede 3 quartos da altura do homem.

Portanto, homem mede 2.00 m.

A casa é 4 vezes mais alta que o homem

Portanto, a casa tem 8 m de altura.

Um aluno deste grupo mediu a sua própria altura e assim obteve a altura da criança da foto. Considerando que a criança da foto mediria 3/4 da altura do homem, os alunos chegaram à conclusão de que o homem «real» mediria cerca de 2.00 m. Os alunos aperceberam-se que os dois homens da foto deveriam ser da mesma altura. A altura da casa foi calculada com base na ideia de que a casa será quatro vezes mais alta do que o homem que está em 2° plano na foto.

Síntese dos resultados de todos os grupos:

	Altura do homem	Altura da casa
Grupo 1	2.00 m	8.00 m
Grupo 2(a)	2.02 m	7.50 m
Grupo 2(b)	1.70 m	4.50 m
Grupo 3	1.78 m	7.12 m
Grupo 4	2.12 m	7.49 m
Grupo 5	2.13 m	7.07 m

Todos os resultados são mais ou menos realistas. Olhando para a altura do homem podem ver-se resultados entre 1.70 m e 2.13 m. Devido ao facto de terem considerado a al-

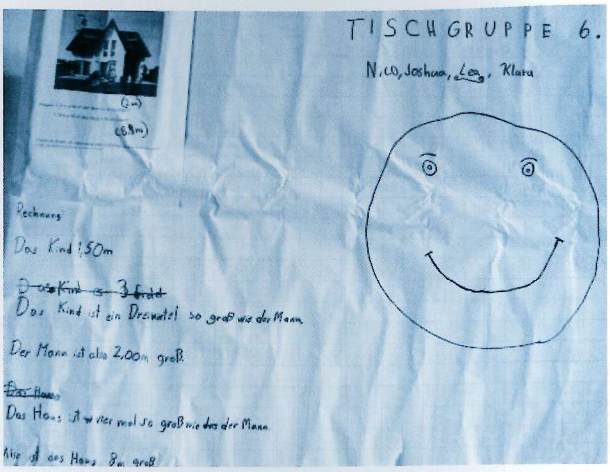


Figura 4

tura da porta da fotografia, os grupos 4 e 5 obtiveram os resultados 2.12 e 2.13 m que não são muito vulgares na vida real. Para a altura da casa foram encontrados valores realistas pelos 5 grupos. O grupo 2(b) cometeu um erro no seu modelo matemático e por isso obteve um valor improvável: 4.50 m. Este resultado foi criticamente discutido com o professor durante a fase de validação. Um aluno mencionou, por exemplo, que a altura de 4.50 m é irrealista porque um jogador de basquetebol mede, por vezes, 2 m de altura. Assim, a fase de validação e de discussão com os alunos é extremamente importante para lhes demonstrar que estas tarefas não têm apenas um resultado e, em particular, que o resultado matemático tem que ser interpretado e validado face à realidade.

Acima de tudo, este problema de modelação foi muito motivador para os alunos apesar de ser a primeira vez que lidavam com uma tarefa aberta como esta. Mas há um outro aspecto que foi importante. Os alunos revelaram, no seu *feedback*, que utilizaram «eles próprios» a matemática — eles aplicaram matemática. Outros alunos referiram que adquiriram uma sensibilidade para as diferentes alturas na realidade, em particular, para a altura de vários edifícios, uma vez que poderão usar figuras de referência, como pessoas, para as calcular.

3. Estabelecendo conexões com a vida real — uma possível noção para a prática da sala de aula

Com um exemplo concreto mostrei como um problema de modelação, já no 3° ano, pode ser um ponto de partida para o estabelecimento de conexões com o mundo real na prática da sala de aula. Do meu ponto de vista, é importante começar nos primeiros anos (ver também Blum & Borromeo Ferri, 2009) com a modelação matemática e com o recurso a tarefas que cumpram tanto quanto possível os critérios mencionados, de modo a que os alunos ganhem sensibilidade para problemas abertos e resultados diferentes (ver secção 1).

Da minha experiência em muitos *workshops* e conversas com professores, considero importante que os professores tenham muitos problemas de modelação disponíveis para implementarem a modelação na sala de aula. Na Alemanha existem já algumas colecções com problemas de modelação para o ensino básico e secundário. Contudo, a utilização destas tarefas na aula de Matemática nem sempre acontece embora a modelação matemática seja uma das principais competências presentes nos Princípios Educativos Alemães. A criação de problemas de modelação não deve ser difícil para os professores e eu testemunho que os professores sabem criar problemas de modelação.

Portanto, dar uma «receita» para estabelecer conexões com a vida real não é um procedimento adequado, mas será útil oferecer uma noção que envolve várias sugestões:

Sugestão 1: Comece com problemas de modelação não demasiado complexos e pense em temas que poderão ser interessantes para os seus alunos.

Sugestão 2: O trabalho de grupo nas aulas de matemática é uma metodologia que usa com frequência? A modelação matemática é uma actividade de grupo e, simultaneamente, promove competências como a argumentação e a comunicação. Pense como pode melhorar as actividades em grupo na aula para que os alunos trabalhem eficazmente no problema e sejam capazes de apresentar os seus resultados.

Sugestão 3: No início da implementação de problemas de modelação na aula procure discutir com os seus alunos os resultados e pratique com eles a validação dos memos. Mais tarde, os alunos fá-lo-ão por si, sem a sua ajuda, porque saberão que têm de perguntar a si próprios: Será este resultado matemático realista? Se eles fizerem isto, estão no bom caminho para compreenderem o que é a modelação matemática e, além disso, estabelecerem conexões com o mundo real.

Sugestão 4: É sempre importante pensar numa perspectiva a longo prazo. Estabelecer conexões com o mundo real é uma coisa, conservá-las é outra. Portanto, é necessário implementar problemas de modelação não como acontecimentos especiais nas aulas de matemática mas fazer deles actividades normais para si e para os seus alunos. Não só as competências de modelação melhorarão como as competências matemáticas também. Ao fazer isto, pode dialogar com os seus alunos sobre o ciclo de modelação, de forma a que eles pensem sobre os seus processos a um meta-nível. Isto já é possível no final do 4° ano e daí em diante.

Penso que esta possível noção pode ser muito útil e gostaria de obter o seu *feedback* sobre a sua forma de estabelecer conexões com o mundo real na sua prática de sala de aula.

Nota

1 Os meus agradecimentos a Eike Deutschmann, Jette Irle, Franziska Kirchner, Simon-Claudio Lemmel, Henrike Puskeppel e Alice Schwennicke (futuros professores de Matemática, estudantes da Universidade de Hamburgo).

2 O modelo apresentado é uma das formas possíveis de resolver a tarefa.

Referências bibliográficas

Blum, Werner und Borromeo Ferri, Rita (2009). Modellieren — Schon in der Grundschule? In: Peter-Koop, Andrea, Lilitakis, Georg und Spindeler, Brigitte (Eds.), Lernumgebungen — Ein Weg zum kompetenzorientierten Mathematikunterricht in der Grundschule. Offenburg: Mildenberger, 142–153.

Borromeo Ferri, Rita (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38 (2) S. 86–95.

Maaß, Katja (2007). Mathematisches Modellieren. Aufgaben für die Sekundarstufe I. Cornelsen: Skriptor.

Rita Borromeo Ferri
Universidade de Hamburgo, Alemanha

Tradução: Ricardo Amado Correia
Revisão: Ana Luísa Paiva e Susana Carreira

Matemática à espreita

A ideia de que a Matemática está presente em muitas situações e em muitos aspectos do que nos rodeia, inspirou esta pequena secção que, nesta revista temática sobre conexões, está «à espreita» nas páginas 63 e 90.

Gostaríamos que esta ideia fosse inspiradora para os nossos leitores encontrarem e partilharem outras «matemáticas à espreita» que poderão ser pontos de partida de tarefas matemáticas ou enriquecer uma aula pela sua exploração e/ou aprofundamento.