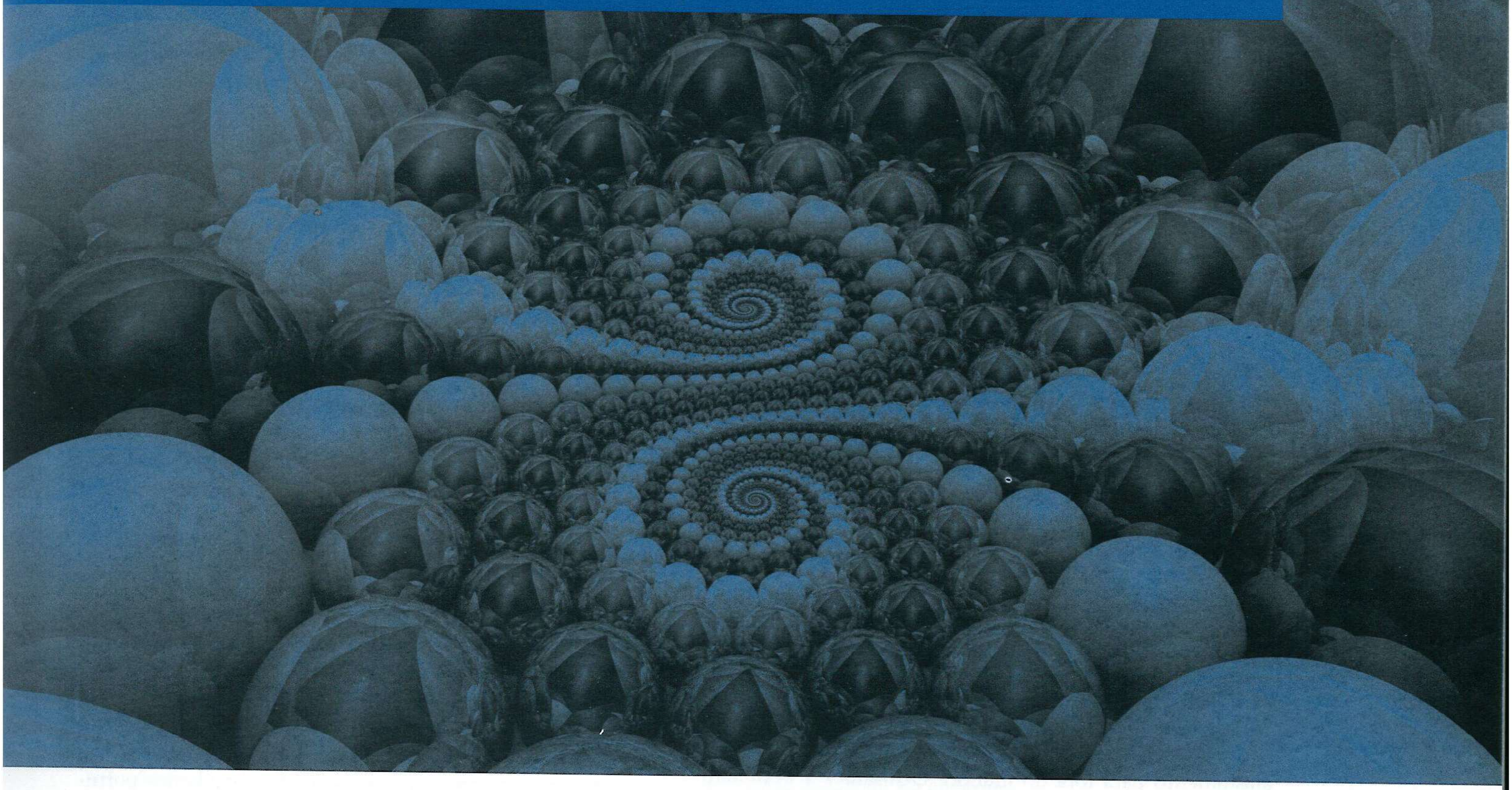
Conexões matemáticas — Ligar o que se foi desligando

Susana Carreira



A Matemática como um meio e como um sistema

Uma das principais razões pelas quais a ênfase nas conexões matemáticas tem vindo a tornar-se um apelo insistente nos currículos de Matemática escolar consiste na necessidade de contrariar visões e percepções estreitas da Matemática e do trabalho em Matemática, que degeneram em resultados indesejáveis — compartimentação, fragmentação, isolamento, mecanização, incompreensão. Boaler (2003), num artigo que publicou no *Educational Studies in Mathematics*, vai mesmo ao ponto de afirmar:

> Com efeito, poderíamos argumentar que é a estreiteza com que a matemática é encarada que tem mantido o sistema do insucesso educativo, em que apenas alguns chegam a atingir a perícia ou a fluência em matemática (Boaler, 2003, p. 10).

Os estudos que levou a cabo em diversas escolas do Reino Unido e dos Estados Unidos da América são reveladores de um conjunto de concepções enraizadas em alunos e professores, algumas das quais consistentemente observadas em trabalhos de investigação anteriores: os alunos vêem a Matemática como uma colecção de procedimentos desconexos e padronizados; tentam absorver um conjunto de métodos que lhes permitam resolver as questões dos testes; esforçam-se por memorizar esquemas de resolução de tarefas de determinados tipos, procuram reproduzir procedimentos e esbarram com o malogro de nem sempre perceberem quando devem ou não aplicar esses procedimentos.

A questão subsequente colocada por Boaler é a de saber se o acto de estabelecer conexões matemáticas corresponde a algo que deve ser incluído no *conhecimento matemático* dos alunos ou se, em vez disso, deve ser algo que tem de estar presente na *prática matemática*, ou seja, uma acção que eles precisam de fazer e de pôr em prática regularmente.

> Os alunos que têm uma compreensão profunda podem estabelecer conexões no decurso do seu trabalho, pois o conhecimento e a prática estão intrincadamente ligados, mas o acto de estabelecê-las não é definido pelo conhecimento que possuem (Boaler, 2003, p. 12).

Em suma, o acto de criar conexões pode ser entendido como uma acção que se estende para além do conhecimento, escapando, designadamente, à distinção entre conhecimento processual e conhecimento conceptual. Neste sentido, a criação de conexões em matemática, no contexto da aprendizagem escolar, corresponderá a um traço de uma prática matemática, muito mais do que a um elemento do conhecimento matemático a ser adquirido.

Este tipo de perspectiva, que sublinha inequivocamente o carácter do trabalho a desenvolver em matemática ou, se preferirmos, a actividade de *fazer* matemática na esfera da aula de matemática, pode ser complementada por uma outra distinção proveniente da filosofia da Matemática. Roland Fischer (1993), num artigo do livro intitulado *Math Worlds*, teoriza a natureza dupla da matemática, olhando-a como um *meio* e como um *sistema*. A Matemática constitui um *meio* através do qual os indivíduos explicam e controlam situações complexas presentes em ambientes naturais ou artificiais e um mecanismo com o qual são capazes de comunicar acerca das referidas situações. Ao mesmo tempo, a Matemática constitui um *sistema* de conceitos, regras, procedimentos, algoritmos que os seres humanos interiorizam e que se tornam parte intrínseca do modo de pensar dos indivíduos, formando a nossa forma de conceber o mundo e a nossa relação com este, moldando as relações económicas, sustentando uma sociedade computorizada, tecnológica, etc. Ao pensarmos na Matemática como um *meio*, salientamos sobretudo o seu carácter de ferramenta; ao tomarmos a Matemática como um *sistema*, consideramos principalmente o modo como a Matemática organiza e constrói modos de pensar e de actuar, materializando relações, muitas vezes de uma forma que não é questionada mas simplesmente assumida.

Actualmente, parece evidente que o papel primordial atribuído à Matemática pela sociedade reside na sua capacidade de oferecer um *meio* poderoso para resolver problemas. Curiosamente, a ênfase neste lado da Matemática tem uma manifestação a que podemos chamar de modelação matemática, a qual, segundo Fischer, conduz ao nosso afastamento para fora do mundo. Utilizamos a Matemática para explicar e controlar alguma coisa que existe algures, desenvolvendo construções que colocamos de permeio entre nós e aquilo que queremos explicar e controlar. O real torna-se um objecto de estudo, a ser investigado e moldado; o indivíduo afasta-se desse objecto e a Matemática tende a funcionar tanto melhor quanto maior for essa distância. Exemplos paradigmáticos deste processo de afastamento para fora do real encontram-se na economia. Uma possibilidade de matematização das relações económicas assenta em alguns pressupostos fundamentais — um deles é a divisão do mundo económico em consumidores, produtores e mercadorias. Vários outros se podem ir adicionando, numa espécie de axiomática ideal para abrir o espaço à intervenção da Matemática: o consumidor visa maximizar a utilidade (o que permite definir a função procura), o produtor visa maximizar o lucro (o que permite definir a função oferta), a oferta e a procura encontram-se no mercado (o tal que parece anónimo mas que realmente não é) e teoricamente existirá um ponto de equilíbrio ideal que será a condição do «bem estar social». Se, por um lado, reconhecemos a Matemática a funcionar como um *meio*, sendo uma ferramenta para prever lucros, estabelecer preços, etc., por outro, observamos a Matemática a funcionar como um *sistema*, introduzindo um modo de pensar assente em regras como a da consistência do «egoísmo individual» que desembocam numa axiomática para descrever a preferência ou escolha do indivíduo entre duas mercadorias: uma relação de ordem não reflexiva, não simétrica e transitiva.

Da resolução de problemas à actividade matemática

A integração da resolução de problemas no ensino da Matemática não é, como todos sabemos, uma recomendação nova ou uma orientação curricular inédita no nosso país. José Manuel Matos (2008), num artigo publicado nas Actas do XII Simpósio da SEIEM, que se realizou em Badajoz, sublinha bem como a resolução de problemas no ensino da Matemática é um dos grandes factores identitários da Educação Matemática em Portugal, a partir da década de 1980. Todavia, o que vamos constatando, década após década, é a dificuldade em torná-la efectiva, porventura porque a face da Matemática como *sistema* continua a ser aquela que recebe maior apreço no contexto da prática educativa, apesar de muitos indicadores internos e externos denunciarem a importância de trabalhar a Matemática como *meio*. Com efeito, os resultados dos alunos portugueses são particularmente fracos na resolução de problemas; reconhece-se essa debilidade internamente e também quando são comparados com alunos de outros países; sabe-se que os alunos portugueses conseguem atingir um desempenho mais razoável em procedimentos e questões rotineiras. À semelhança do que se lê nas palavras de Boaler, os alunos portugueses mostram dificuldade em relacionar informações e em raciocinar eficazmente sobre contextos e situações multi-facetadas, que envolvem vários tipos de dados e requerem raciocínio analítico para lidar com os dados envolvidos. De facto, no teste do PISA de 2003, relativo à resolução de problemas em áreas curriculares transversais, a média dos estudantes portugueses situou-se no nível 1 de desempenho, ou seja, o nível *básico de resolução de problemas*. Neste nível, os alunos apenas conseguem resolver problemas simples (OECD, 2004).

Actualmente, sobrevêm duas forças convergentes no sentido de tornar a resolução de problemas numa parte integrante do currículo de Matemática. Uma provém da investigação em Educação Matemática e a outra refere-se a movimentos de reforma curricular que têm apontado explicitamente a resolução de problemas como forma de trabalhar a Matemática na sala de aula, tal como patenteia o recente programa de Matemática do ensino básico. Na verdade, como afirma Matos (2008), esta última força tem sobressaído mais, dado que a investigação no campo da resolução de problemas sofreu um notório abrandamento nos últimos dez anos. Não obstante, começam a revelar-se sinais de uma nova vitalidade, em boa parte pelas conexões que esta área de investigação vai criando com outras, como a integração das tecnologias no ensino da Matemática, os aspectos afectivos do ensino e da aprendizagem, as estratégias didácticas e os temas curriculares específicos e, ainda, a inclusão da modelação matemática na aprendizagem desta disciplina.

Recentemente, a investigação tem vindo a apontar a necessidade de considerar novas perspectivas teóricas que rompam com um certo isolamento que o trabalho sobre a re-

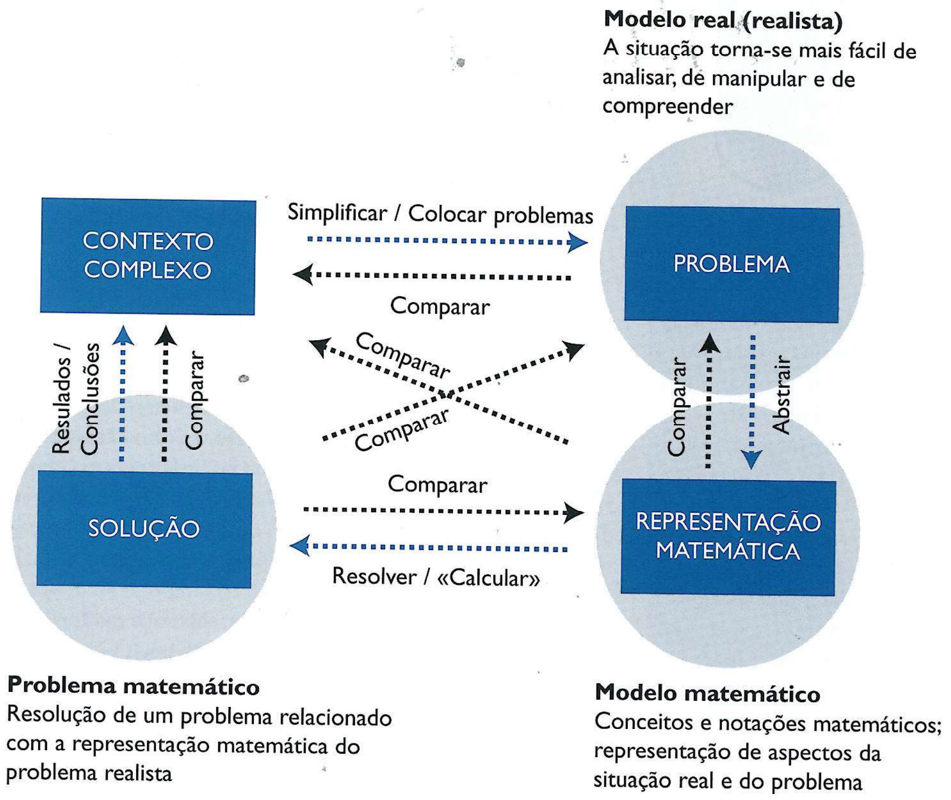


Figura 1. Um esquema da actividade matemática — a resolução de problemas como um elemento de conexão

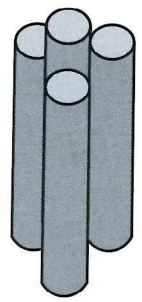


Figura 2. Espargos são cilindros

solução de problemas foi acusando. Isto passa pela conceptualização da resolução de problemas como uma faceta da prática matemática que toca e se difunde noutros aspectos da actividade matemática escolar. Lester e Kehle (2003) são claros proponentes desta visão, ao sugerirem que se pense de forma *diferente* sobre a resolução de problemas de Matemática. A ideia central é a de que a resolução de problemas deixe de ser a unidade central — sob a qual podemos albergar a compreensão de conceitos, a metacognição, a aprendizagem de estratégias, as aplicações da Matemática, etc. — mas que passe a constituir parte essencial de uma nova unidade a que os autores chamam de actividade matemática. Por actividade matemática deve entender-se uma mescla entre tarefa, pessoa, compreensão matemática, compreensão não-matemática, aprendizagens novas, utilização de aprendizagens prévias, uma imagem mais próxima daquilo «que acontece em salas de aula activas» (Lester e Kehle, 2003, p. 517). Assim, um possível esquema de actividade matemática seria semelhante ao apresentado na figura 1.

Colocar o foco na actividade matemática, em vez de o fixar na resolução de problemas, sugere uma importância redobrada das conexões matemáticas. Mas, acima de tudo, aproxima e integra processos como a interpretação e a construção de significados, a utilização de representações, a análise de padrões, a construção de modelos e a exploração e aplicação de conceitos matemáticos.

Actividade matemática e conexões

A ideia que se segue tenta ilustrar alguns dos elementos essenciais da actividade matemática, integrando a resolução de problemas como uma das linhas de força mas abrindo espaço a um conjunto de outros elementos cruciais para lidar com uma situação real[1]:

O Sr. Arlindo vende molhos de espargos, enrolados num cordel com 20 cm de comprimento, a 4 euros cada molho.

O Sr. Eugénio enrola os molhos de espargos num cordel com 25 cm de comprimento e vende cada molho a 5 euros.

Parece-te que ambos estão a vender os espargos ao mesmo preço?

Sobre os espargos que são vendidos pelos dois vendedores nada se sabe; podem ser muito diferentes em qualidade, em frescura, em tamanho, em origem, etc. Portanto, a pergunta colocada remove-nos imediatamente de uma situação genuína de escolha entre produtos. Por outras palavras, uma parte da interpretação está implicitamente a ser feita, mas requer a consequente explicitação: tratar os espargos como «objectos ideais», matematizáveis. Suponhamos que os espargos são «aproximadamente» cilindros; suponhamos que os cilindros são «suficientemente» iguais em altura e diâmetro. Deste modo, chegamos a uma certa «representação» de espargos (Figura 2).

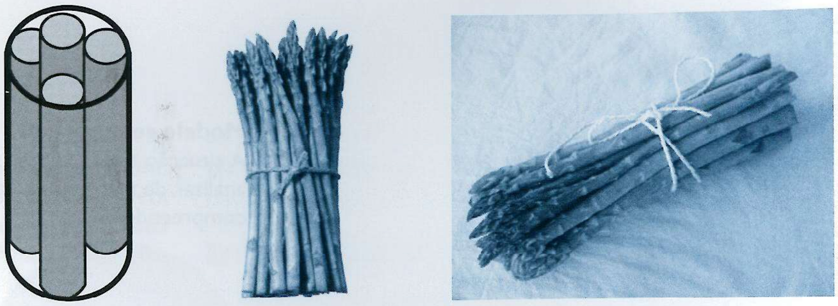


Figura 3. Um molho de espargos é um cilindro

Ora, os espargos são atados em molho com um cordel. Portanto, ficam todos juntos, encostados uns aos outros, e esse molho pode ser «representado» por um novo cilindro que circunscreve o conjunto dos espargos (Figura 3).

E surge o primeiro problema: Como se arrumam os espargos (aproximadamente cilindros) dentro do molho? Como se dispõem?

Os cilindros que encontramos por esse mundo fora são tubos, lápis, cigarros (passe o exemplo pouco pedagógico)... Podemos observar como estes objectos se empilham ou se arrumam em molhos. Uma primeira interpretação para o problema em análise é a de que os cilindros se dispõem de uma determinada forma porque é aquela que ocupa menos espaço. E assim, chegamos a um problema de empacotamento ou de empilhamento. E construímos um primeiro modelo de empacotamento, como se vê na figura 5.

Começa portanto a abrir-se um espaço para uma certa matematização. Todos os círculos têm o mesmo raio, organizam-se de modo a ficarem tangentes uns aos outros, as camadas sucessivas têm uma estrutura hexagonal: 1 espargo, 6 espargos, 12 espargos... O cordel que rodeia os espargos é «quase» uma circunferência, mas não coincide com uma circunferência (figura 6).

Chegamos, então, à representação da linha que corresponderá ao cordel. Trata-se de uma linha que é uma espécie de hexágono de «cantos arredondados».

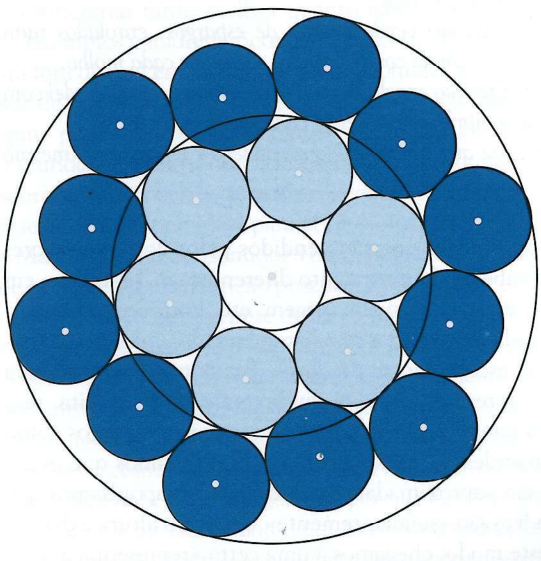


Figura 6. O cordel não forma uma circunferência

Interessa obviamente estabelecer uma relação entre o comprimento da linha e o diâmetro dos cilindros. Alguma geometria e o reconhecimento de um padrão triangular (triângulos equiláteros de lados iguais ao diâmetro de cada cilindro), leva-nos a concluir que a parte rectilínea do cordel mede $6nd$, sendo d o diâmetro de cada círculo e n o número de camadas em torno do círculo interior. A parte curva do cordel mede exactamente um comprimento igual ao perímetro de um círculo (seis vezes um sexto do perímetro). (Ver figura 8).

E de volta aos molhos de espargos, sabemos quanto medem os cordéis em cada caso (20 cm e 25 cm). Como «serão», afinal, os molhos de espargos de cada um dos vendedores? Terão ou não o mesmo número de espargos?

Um outro problema vem colocar-se: de que tamanho são os espargos «normais»? Como não é de admirar, os espargos passam por uma normalização para serem comercializados. Uma informação rápida obtida na Internet mostra como são embalados, classificados e porventura congelados (Figura 9). Percebe-se que existem vários comprimentos (L) a considerar e vários diâmetros (D). Mas, ao que parece, um diâmetro entre 6 e 22 mm será normal.

Passemos a definir a função que exprime o comprimento do cordel à custa do diâmetro médio do espargo ($C(d)$),

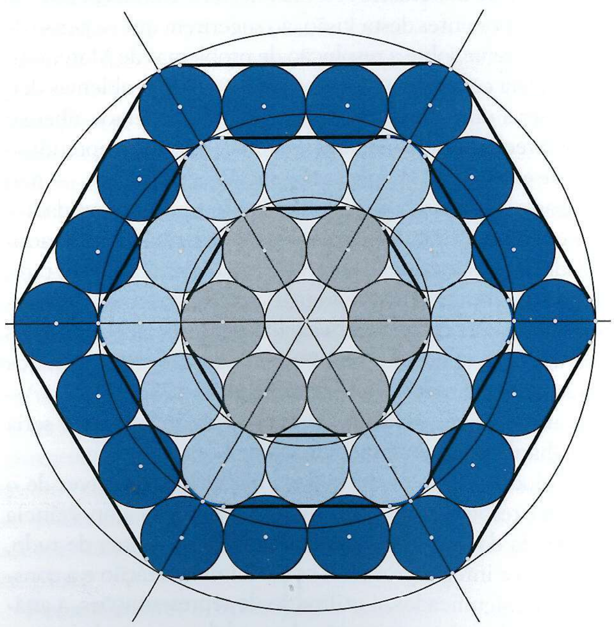


Figura 7. O cordel forma uma linha composta por segmentos de recta e arcos de circunferência

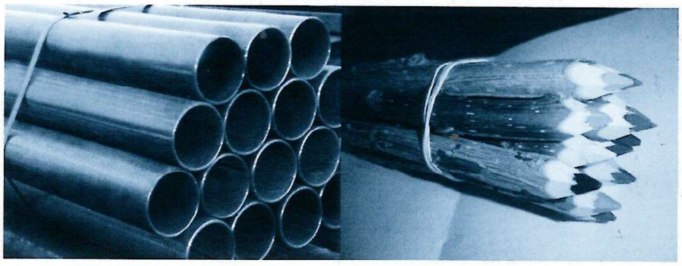


Figura 4. Protótipos de cilindros encostados uns aos outros

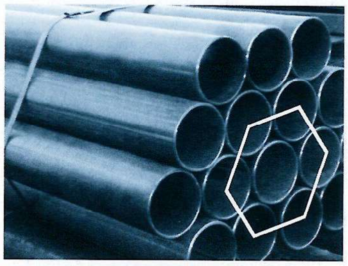


Figura 5. Cilindros empacotados

admitindo que as diferenças entre os diâmetros, num mesmo molho, não são relevantes.

$C(d) = 6nd + \pi d = (6n + \pi)d$, sendo n o número de camadas em torno do espargo interior.

Por outro lado, o número de espargos no molho é dado por (usando a soma de uma progressão aritmética de razão 6):

$N = 3n^2 + 3n + 1$, sendo n o número de camadas em torno do espargo interior.

Na medida em que estamos a lidar com funções que dependem de n, podemos definir:

Parâmetro: diâmetro da base do espargo.

Variável independente: número de camadas de espargos.

Variáveis dependentes: número de espargos por camada, número de espargos no molho, comprimento do fio.

O recurso ao Excel permitirá realizar simulações para gerar molhos de espargos, atribuindo um valor ao diâmetro da base do espargo. Admitamos, para simplificar, que o Sr. Arlindo e o Sr. Eugénio vendem espargos do lote médio (10 a 16 mm). Algumas experiências no Excel levam-nos aos resultados descritos na tabela 1:

Uma conclusão possível é a de que o Sr. Arlindo vende molhos de 19 espargos, com um diâmetro médio de 13 mm e o Sr. Eugénio vende molhos de 19 espargos com um diâmetro médio de 16 mm. Neste caso, a diferença de preços justificar-se-á pelo maior volume dos espargos vendidos pelo Sr. Eugénio.

Ainda outra possibilidade será o Sr. Eugénio vender molhos de 37 espargos de 11 mm de diâmetro. O preço mais elevado dos espargos será devido ao maior número de unidades nos molhos do Sr. Eugénio (tabela 2).

diâmetro (cm)	camada	espargos/ camada	total no molho	comp fio (cm)
1,3	1	6	7	11,9
	2	12	19	19,7 (Arlindo)
	3	18	37	27,5
	4	24	61	35,3
	5	30	91	43,1
	6	36	127	50,9
diâmetro (cm)	**camada**	**espargos/ camada**	**total no molho**	**comp fio (cm)**
1,6	1	6	7	13,7
	2	12	19	23,3 (Eugénio)
	3	18	37	32,9
	4	24	61	42,5
	5	30	91	52,1
	6	36	127	61,7

Tabela 1

diâmetro (cm)	camada	espargos/ camada	total no molho	comp fio (cm)
1,1	1	6	7	10,7
	2	12	19	17,3 (Eugénio)
	3	18	37	23,9
	4	24	61	30,5
	5	30	91	37,1
	6	36	127	43,7

Tabela 2

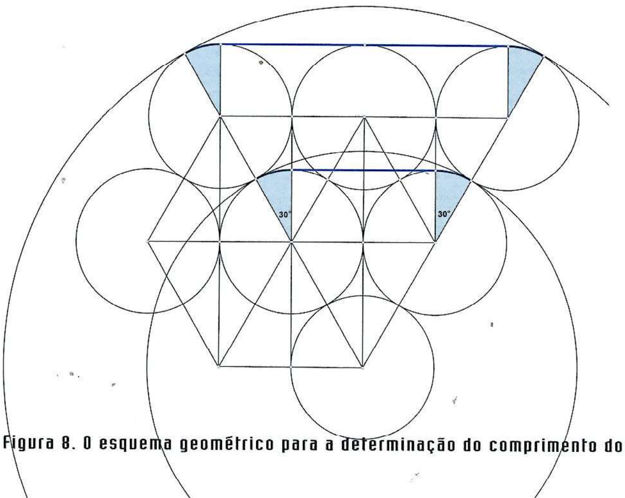


Figura 8. O esquema geométrico para a determinação do comprimento do cordel

Espargos congelados (tamanho)
L: 11 cm D: 6-10 mm;
L: 15 cm D: 10-16 mm;
L: 17 cm D: 16-22 mm

Figura 9. Dimensões dos espargos

Em qualquer das hipóteses, será difícil avaliar se estão ou não a vender os espargos ao mesmo preço. Aquilo que se compra ao Sr. Arlindo ou ao Sr. Eugénio é realmente diferente. Poderá passar a ver-se como uma questão de utilidade, isto é, depende da preferência do consumidor (por espargos mais finos ou mais grossos).

Mas se repararmos na imagem seguinte (figura 10), surge outra possibilidade: a de que os molhos de espargos não sejam regulares . E se os espargos dos dois vendedores são iguais mas o Sr. Eugénio acrescenta ao molho regular mais um ou dois espargos? E se nenhum dos molhos é efectivamente regular? Pessoalmente, prefiro comprar ao Sr. Eugénio porque ele é mais simpático mas em tempos de crise a simpatia não é tudo.

Figura 10. Um molho com 8 espargos (mais 1 do que um molho regular)

O papel das conexões

É bastante frequente pensarmos nas conexões matemáticas em termos de relações interessantes e significativas que se podem estabelecer entre tópicos curriculares: as conexões entre geometria e funções, entre sequências e funções, entre geometria e álgebra, entre números e álgebra, entre probabilidades e números, etc., etc. Trata-se de uma possível abordagem ao conceito de conexões matemáticas e configura, sem dúvida, uma preocupação válida. Importa, no entanto, perguntar se as conexões não são muito mais do que isto, se não são sobretudo uma característica essencial da actividade matemática, um elemento estruturante do fazer matemática e do pensar matematicamente. Provavelmente, nenhum verdadeiro problema é exclusivamente um problema de funções ou de geometria ou de vectores ou de expressões algébricas. Paulo Abrantes, entusiasta e defensor da actividade matemática genuína na aula de Matemática, deu-nos um precioso ensinamento sobre as conexões matemáticas que alunos e professores podem construir, trabalhar e explorar em torno de uma situação, no seu livro «A viagem de ida e volta».

Em diferentes ocasiões, já argumentei que uma distinção entre problemas abertos e fechados ou situações abertas e fechadas é francamente falível, não tanto porque sejamos incapazes de distinguir entre um exercício e uma tarefa de investigação ou outras eventuais modalidades, mas antes porque o «fechado» é muitas vezes sinónimo de não se querer abrir e de se ficar por ali. Desenvolver conexões matemáticas é, fundamentalmente, não querer ficar por ali e perceber que as coisas se ligam, não são uma colecção de ideias separadas, «não são como ervilhas soltas dentro de um saco» para usar as palavras de Vygotsky. Em certo sentido, as conexões matemáticas são o verdadeiro currículo, aquele que nenhum documento oficial pode fielmente exprimir porque corresponde a inúmeros caminhos possíveis e a tantas outras formas de tratar a Matemática, os conceitos, as ideias, as tarefas e as questões na sala de aula. Em todo o caso, a actividade matemática como território de conexões implica olhar para a Matemática simultaneamente como um sistema e como um meio.

Nota

1 Esta situação foi proposta como tarefa na acção de formação «Orientação e desenvolvimento de projectos educativos em Matemática II», da responsabilidade do DEFCUL e da DGIDC, dinamizada pela formadoras Leonor Santos, Ana Maria Boavida, Hélia Oliveira e Susana Carreira, em Fevereiro de 2008.

Referências

Boaler, J. (2003). Exploring the nature of mathematical activity: Using theory, research and ‹working hypotheses› to broaden conceptions of mathematics knowing. *Educational Studies in Mathematics*, *51*, p. 3–21.

Fischer, R. (1993). Mathematics as a Means and as a System. In S. Restivo, J. P. Van Bendegem & R. Fischer (Eds.), *Math Worlds: Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education* (pp. 113–133). New York: State University of New York Press.

Lester, F. K. & Kehle, P. E. (2003). From Problem Solving to Modeling: The Evolution of Thinking About Research on Complex Mathematical Activity. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 501–517). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Matos, J. M. (2008). A resolução de problemas e a identidade da educação matemática em Portugal. In González, R., Alfonso, B., Machín, M. & Nieto, L. J. (Eds.), *Investigación en educación matemática XII*, (pp. 141–158). Sociedade Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

OECD (2004). *Problem Solving for Tomorrow's World: First Measures of Cross-Curricular Competences from Pisa 2003*. Paris: OECD Publications [disponível em http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/25/12/34009000.pdf].

Susana Carreira
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e UIDEF da Universidade de Lisboa