Conexões Matemáticas no Ensino Secundário

Jaime Carvalho e Silva

Félix Klein

O actual programa de Matemática A para o Ensino Secundário (2003), tal como o seu antecessor directo (1995), preconizam uma grande atenção às conexões na sala de aula:

«As Conexões entre os diversos temas são consideradas fundamentais neste programa, para que os estudantes possam ver que os temas são aspectos complementares de uma mesma realidade.»

E o programa chama repetidamente a atenção para a importância das conexões. Por exemplo:

«a Geometria (...) deixa perceber verdadeiras conexões entre os vários temas da Matemática, da Álgebra à Análise e à Estatística.»

O que significa esta palavra «conexão»? Porque aparece ela no programa? Trata-se de mais uma das «novas metodologias» tão elogiadas por uns e tão criticadas por outros?

Consultado o dicionário Priberam da Língua Portuguesa encontramos como significados de conexão, enlace ou vínculo entre pessoas ou entidades, ligação, coerência, nexo, analogia. Significa então que se estabelece uma ligação de algum tipo entre dois temas matemáticos diferentes, ou entre um tema matemático e um tema não matemático. Que se pode ganhar com isso?

Um dos trabalhos mais antigos onde encontramos referência ao uso de conexões matemáticas no ensino é de 1908 e foi escrito pelo célebre matemático Felix Klein, o primeiro presidente do ICMI-Comissão Internacional de Instrução Matemática. No primeiro volume do seu livro «Matemática Elementar de um ponto de vista superior», logo na página 2 da introdução, pode ler-se:

«O meu objectivo consiste em mostrar-vos sempre *as conexões entre problemas de diferentes áreas*, o que não acontece de forma suficiente na generalidade dos manuais, e, mais especificamente, sublinhar a relação destes problemas com a matemática escolar.»

Esta é uma afirmação muito forte. Mas Felix Klein dá vários exemplos concretos no seu pequeno livro, tais como

«O problema da divisão da circunferência em partes iguais está intimamente relacionado com a teoria dos números, embora seja raro que se estabeleça esta ligação nas escolas.»

«No ensino escolar é abordada outra questão importante de teoria dos números: o calculo de π, durante o estudo da quadratura do círculo.»

Determinar «os números pitagóricos» reduz-se a «analisar o modo como a circunferência unitária atravessa o conjunto denso dos pontos racionais, e em particular determinar quais desses pontos contém.»

«o aluno deve ser habituado, logo desde o início, à interpretação geométrica e intuitiva no plano complexo.»

E por aí adiante.

A recta multifacetada

Vejamos alguns exemplos de conexões matemáticas no Ensino Secundário. O Programa de Matemática A sugere que:

«Se os estudantes estão a explorar, por exemplo, um problema de geometria poderão estar a desenvolver a sua capacidade de visualizar, de fazer conjecturas e de as justificar, mas também poderão estar a trabalhar simultaneamente com números, calculando ou relacionando áreas e volumes, a trabalhar com proporções na semelhança de figuras ou a trabalhar com expressões algébricas.»

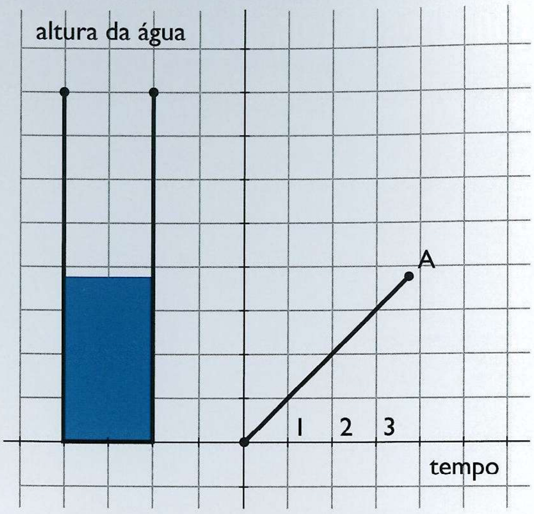

Figura 1

Com efeito, os problemas e os conceitos de Geometria são uma fonte excelente de trabalho tanto geométrico como algébrico como de funções, tanto de ligações fora da Matemática. Muitos conceitos de geometria podem ser ligados uns aos outros e a temas não matemáticos. Por exemplo, a proporcionalidade começa logo a ser discutida no 3° ciclo e tem inúmeras ligações com temas não matemáticos. Para citar apenas um, consideremos o Direito. No glossário da União Europeia pode ler-se:

«*Proporcionalidade (Princípio da)*
(...) o princípio da proporcionalidade regula o exercício das competências exercidas pela União Europeia. Visa delimitar e enquadrar a actuação das instituições da União. Por força desta regra, a actuação das instituições deve limitar-se ao que é necessário para atingir os objectivos dos tratados. Por outras palavras, a intensidade da acção deve estar relacionada com a finalidade prosseguida.»

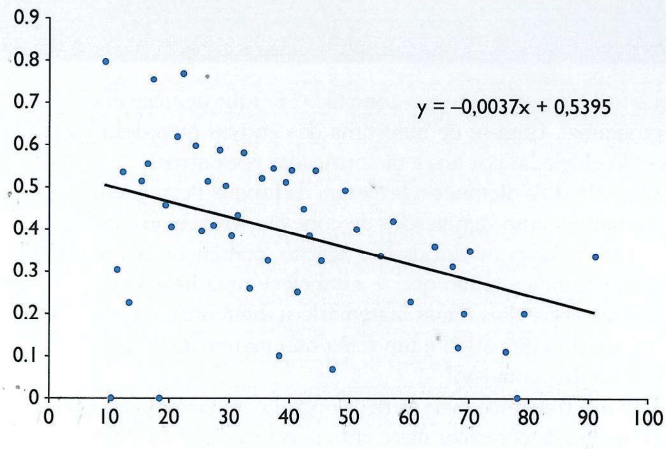

Figura 4

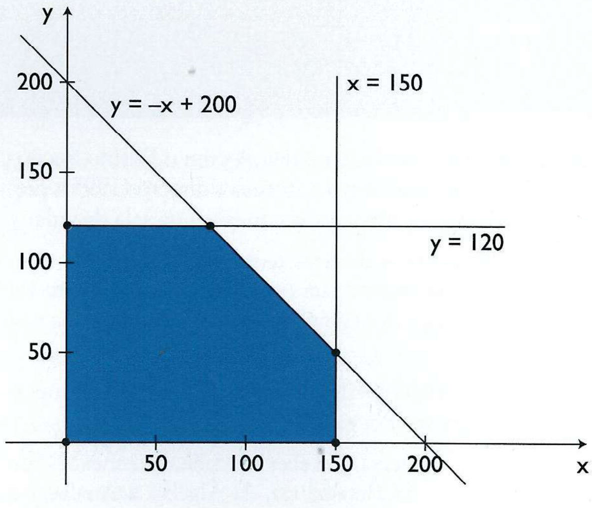

Figura 5

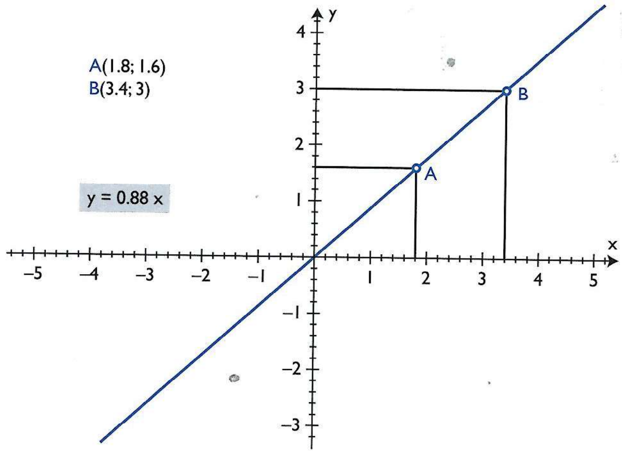

Figura 2

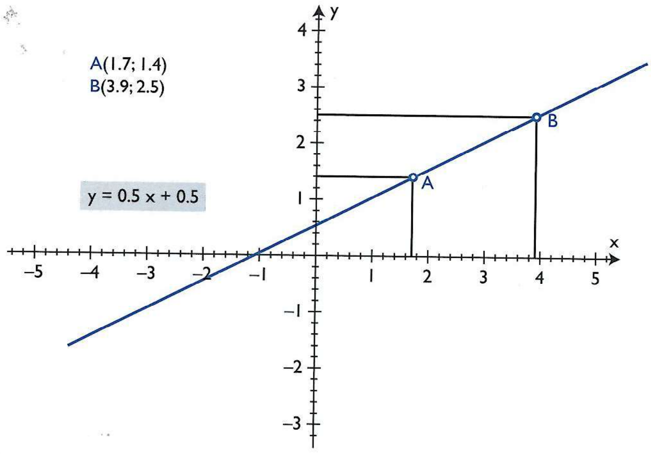

Figura 3

Outra definição:

«*Princípio da proporcionalidade*: Modalidade indicadora de que a severidade da sanção deve corresponder a maior ou menor gravidade da infracção penal. Quanto mais grave o ilícito, mais severa deve ser a pena. »

Mas a proporcionalidade não são só números ou relações entre variáveis. Uma outra abordagem que se junta é a da representação gráfica. E a própria representação gráfica já começa a mostrar as suas grandes potencialidades de exploração, abrindo caminho para, mais tarde, se estudarem as funções em detalhe (figura 1).

Quando se estuda a equação reduzida da recta, reaparece a proporcionalidade, mas alarga-se o âmbito da representação matemática a rectas que não passam pela origem (figura 2, 3 e 4).

Quando se estudam as funções, faz todo o sentido retomar a geometria das rectas que agora representam relações funcionais, com novas interpretações, mas totalmente compatíveis com todo o estudo anterior. Quando se chega ao estudo estatístico da relação entre duas variáveis, aparece de novo a equação da recta.

As rectas mostram toda a sua importância no estudo da programação linear, quando são as actrizes principais dos problemas de optimização (figura 5).

Quando se estudam as taxas médias de variação, descobre-se que o declive é a taxa média de variação da função respectiva, em qualquer intervalo, e que esta taxa média de variação é constante e coincide com o declive da recta. Finalmente, a recta faz a sua suprema aparição quando se estudam tangentes a curvas: o declive da recta tangente é afinal a taxa de variação da função em estudo, no ponto de tangência.

Cada vez que se estuda a recta/função linear/função afim, tudo o que foi visto antes pode ser retomado e integrado no estudo que está a ser feito. O programa de Matemática A enfatiza exactamente este aspecto:

«Uma compreensão mais profunda da Matemática só se verifica quando o estudante vê as conexões, quando se apercebe que se está a falar da mesma coisa encarando-a de diferentes pontos de vista.»

Geometria e Funções

Outros problemas ou conceitos de Geometria podem ser o ponto de partida de conexões interessantes. Problemas de áreas e volumes podem facilmente fornecer essa oportunidade. Consideremos por exemplo o clássico problema da caixa. Se pretendemos calcular o volume de uma caixa sem tampa quando a quantidade de material (cartão, metal, etc.) é fixada à partida, então não sabemos quais as dimensões exactas da caixa, e aparecem várias possibilidades (figura 6).

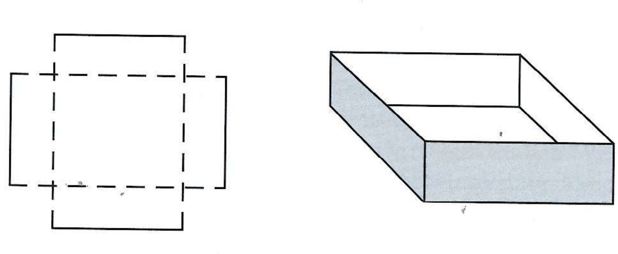

Figura 6

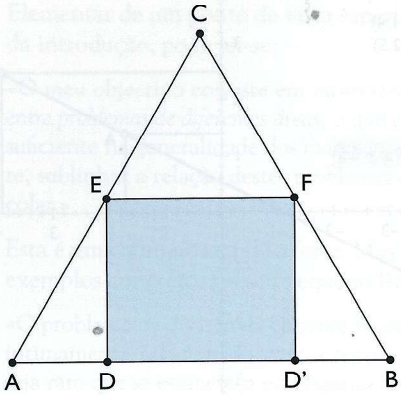

Figura 7

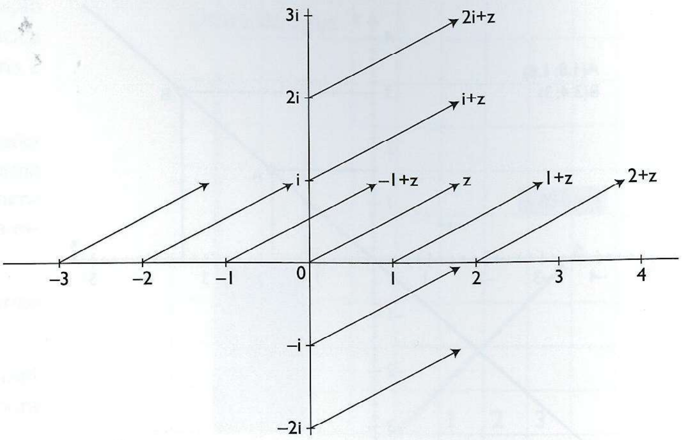

Figura 8

Podemos usar um *software* de Geometria Dinâmica e explorar este problema, ficando com uma boa ideia das diferentes possibilidades e obtendo valores aproximados dos valores extremos. Mas podemos também recorrer à Álgebra e ao estudo das Funções. Se uma das dimensões da base da caixa for x e a outra y e a altura for igual a uma das dimensões da base, digamos x, então o volume será dado em função de x e y por

$$V(x,y) = x^2y$$

Mas se a área da superfície onde se vai recortar a caixa sem tampa for um valor dado A, podemos dizer que

$$A = y^2 + 4xy$$

e assim o volume pode ser expresso em termos de uma só variável

$$V(y) = \frac{1}{4}(A - y^2).$$

Podemos não só estudar esta função quadrática como estudar o desperdício de material

$$D(y) = A - \frac{1}{4}(A - y^2).$$

Se a caixa tiver tampa, então o problema muda completamente e as funções obtidas são bastante diferentes. E se o volume V for dado e se pretender obter uma caixa com o mínimo de área? Então a função a estudar será

$$A(x) = y^2 + 4xy = \frac{V^2}{x^4} + 4\frac{V}{x}$$

que já não é uma função polinomial.

E se o material disponível não tiver forma rectangular mas uma forma triangular? Simplifiquemos a situação e procuremos apenas o rectângulo de área máxima inscrito no triângulo, suposto equilátero e de lado L (figura 7).

Como varia a área do rectângulo em função do lado? Designemos o comprimento do segmento AD por x. Então a área do rectângulo é dada por

$$A(x) = \sqrt{3}x(L - 2x).$$

Nesta função aparece uma raiz quadrada de forma natural. Se o triângulo for rectângulo e pretendermos determinar o maior valor da hipotenusa h de modo que a área seja máxima com o perímetro P dado, em função de um dos catetos x, obtemos

$$h(x) = \frac{P^2 - 2xP + 2x^2}{2(P - x)}.$$

Desta vez obtivemos uma função racional. Se no problema da caixa sem tampa quisermos determinar as dimensões dos lados da caixa em função do volume V, a função passa a ser

$$y(V) = \sqrt{A - 4V}$$

e obtemos desta vez uma função com radicais.

Números Complexos

Os números complexos são também uma excelente oportunidade de trabalhar as conexões. Este tema foi escolhido para encerrar o programa de Matemática A do Ensino Secundário por, tal como assinalam os autores da brochura «Trigonometria e Números Complexos», os números complexos serem um dos temas de unificação matemática por excelência e contêm oportunidade de, pelo menos, «quatro conexões principais (...): números complexos e sistemas de coordenadas, números complexos como vectores, números complexos e transformações geométricas, geometria [elementar] e números complexos». Remeto o leitor interessado para essa brochura para mais detalhes. Irei apenas referir um par de exemplos.

As operações algébricas com números complexos podem todas ser interpretadas em termos de transformações geométricas. Por exemplo: o conjugado de um número complexo z pode ser obtido a partir de uma reflexão de z em torno do eixo das abcissas. Agora é fácil ver geometricamente porque é que o conjugado do conjugado nos devolve o número complexo original, obtendo-se uma visão geométrica de um problema que tem também uma visão algébrica.

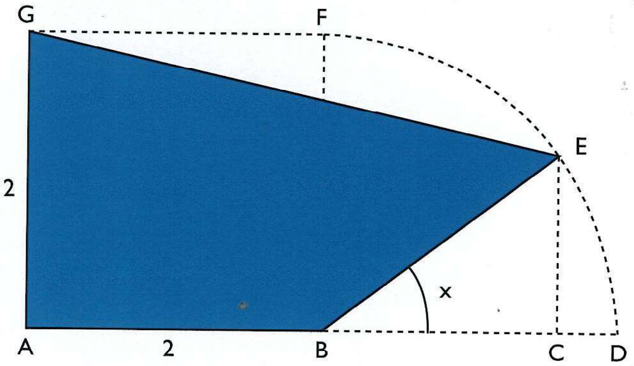

Figura 9

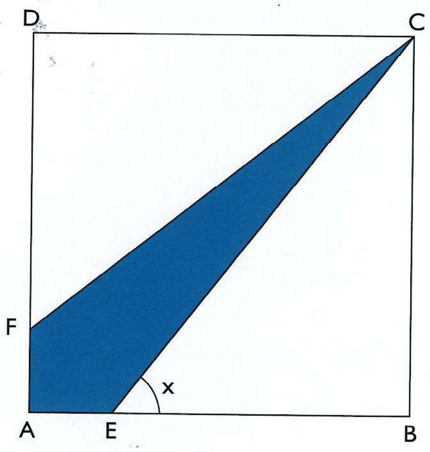

Figura 10

Outro exemplo: adicionar um número complexo significa efectuar uma translação. A figura 8 (tirada da página de Internet de David Joyce) mostra como a adição com o número complexo z corresponde à translação segundo o vector representado pelo número complexo z.

Como todas as operações com números complexos podem ser interpretadas como transformações geométricas, a resolução de problemas de geometria pode ser transformada num problema de transformações geométricas que pode ser mais fácil de resolver, e vice versa.

O vai-vem entre a álgebra dos números complexos e a geometria elementar é muito rico e impressionante: o ortocentro de um triângulo cujos vértices estão no círculo unitário pode ser obtido como a soma dos complexos que representam os vértices. Multiplicar por um número complexo de módulo 1 é efectuar uma rotação de ângulo igual ao argumento do complexo, em torno da origem, no sentido contrário aos ponteiros do relógio. A recta que passa pelos números complexos z e w é paralela à recta que passa pelos números complexos u e v se e somente se

$$\frac{z-w}{u-v}$$

for um número real. Usando números complexos é fácil provar que o segmento que une os pontos médios de dois lados consecutivos de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade do comprimento desse lado. E por aí adiante.

Exames nacionais

Os exames nacionais são tanto mais bem feitos quanto conseguem abranger mais competências definidas no currículo. As conexões entre diferentes temas são frequentes nos exames nacionais do 12° ano de Matemática desde 2000, data dos primeiros exames nacionais do programa de 1995 (que entrou em vigor apenas em 1997). Por exemplo, num exame de 2003, pede-se para determinar a área do polígono [ABEG] na figura 9.

A área é dada por

$$2(1+\operatorname{sen} x+\cos x)$$

e esta expressão é usada para determinar quando a área atinge determinados valores. Em 2002 pede-se para determinar o perímetro do quadrilátero [CEAF] na figura 10.

O perímetro é dado por

$$2-\frac{2}{\tan x}+\frac{2}{\operatorname{sen} x}$$

e depois esta expressão é usada para estudar o modo como o perímetro varia em função de x.

Infelizmente não existem estudos que nos permitam concluir se as conexões matemáticas são bem avaliadas com este tipo de questões e qual o grau de dificuldade que elas apresentam para os alunos portugueses.

Conexões no estudo PISA

As conexões matemáticas são uma das competências abrangidas pelo estudo internacional PISA que é aplicado pela OCDE de 3 em 3 anos a estudantes com 15 anos (que, em Portugal, abrange sobretudo alunos do 9° e 10° anos de escolaridade). Aí se define conexão como:

«conexões — requerem a reunião de ideias e de procedimentos matemáticos para resolver problemas algo familiares e de resolução directa»

Na definição da classe de competência 2 (intermédia) as conexões aparecem ligadas à resolução de problemas com a seguinte definição:

«Conexões e integração para resolução de problemas — Os processos incluídos nesta classe de competências fazem conexões entre linhas de conteúdos e domínios diferentes e integram informação de forma a resolver problemas simples. Embora os problemas sejam, supostamente, não rotineiros, requerem graus de matematização relativamente diminutos.»

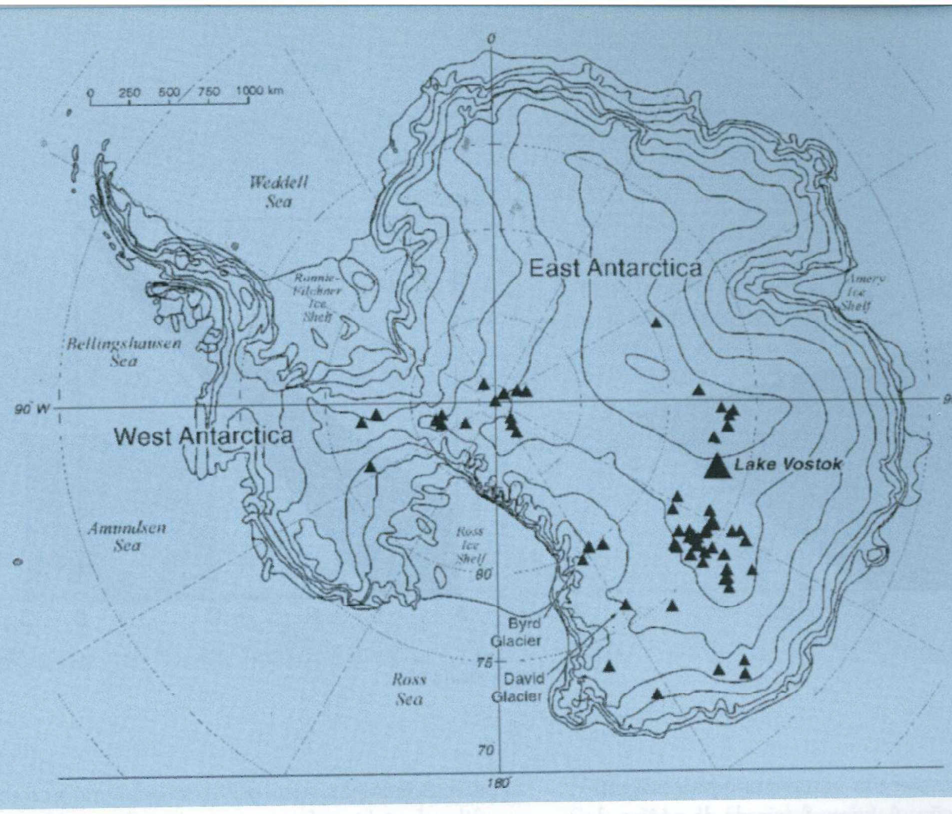

Figura 11

Um dos exemplos de questões nesta classe de competência é dado pelo problema onde se pede um valor aproximado da área de uma figura muito irregular (na circunstância o continente Antárctida, ver figura 11).

No estudo do PISA este item foi desastroso para os alunos portugueses pois 3/4 dos alunos nem sequer responderam; dos que responderam, quase todos os alunos tiveram dificuldades em escolher figuras geométricas que lhes permitissem resolver adequadamente o problema, errando a estimativa por mais de 3 milhões de km^2; só 2,5% dos alunos portugueses responderam correctamente.

Conclusão

Tal como Felix Klein defendia, o trabalho das conexões matemática faz com que «se torne mais fácil … adquirir a capacidade que considero o verdadeiro objectivo dos estudos académicos: a de retirar das grandes questões científicas que nos são oferecidas abundantes estímulos e orientações para o exercício da própria actividade docente.» Para o estudante, evidenciar múltiplas conexões com outros temas, permite que se consiga o «desenvolvimento das competências matemáticas transversais, isto é, daquelas que atravessam todos os temas e devem constituir os grandes objectivos de um currículo de Matemática» visto que uma compreensão mais completa dos temas matemáticos contemplados nos programas só é realmente possível quando, através das conexões, os estudantes se apercebem que muitas vezes na realidade estão a falar de um mesmo conceito, apenas sob um ponto de vista diverso; assim os estudantes ficam realmente preparados para resolver os novos problemas com que se enfrentarão. Em conclusão, tal como refere o programa de Matemática A,

«A Matemática nas suas conexões com todos os ramos de saber é uma contribuição decisiva na criação de condições para a consciência da necessidade da educação e da formação ao longo da vida, com vista a enfrentar mudanças profissionais e as incontornáveis adaptações às inovações científicas e tecnológicas.»

Referências

Carvalho e Silva, J. (coord.), Fonseca, M.G., Martins, A.A., Fonseca, C.M.C., Lopes, I.M.C. — MATEMÁTICA — 10°, 11° e 12° ANOS — Programa, ME–DES, 2003.

Europa — Glossário. Acessado em http://europa.eu/scadplus/glossary/proportionality_pt.htm

GAVE — PISA 2000, Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática e competências dos alunos portugueses, Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação, Lisboa, Portugal, 2002.

Joyce, D. — Dave's Short Course on Complex Numbers. Acessado em http://www.clarku.edu/~djoyce/complex/

JusBrasil — Acessado em http://www.jusbrasil.com.br/topicos/292978/principio-da-proporcionalidade

Klein, F., Matemática Elementar de um ponto de vista superior, vol.1-parte 1 Aritmética, SPM, Lisboa, 2009.

Loureiro, C. (coord.), Oliveira, A., Silva, J. & Bastos, R. — *Trigonometria e Números Complexos.* (1ª ed.). Lisboa: ME–DES, 2000.

ME–DES, MATEMÁTICA — 10°, 11° e 12° ANOS — Programa, 1995.

Teixeira, P. (coord.), Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C. e Nápoles, S. — Funções: Matemática — 10° ano de escolaridade. Lisboa: ME–DES, 1997.

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra