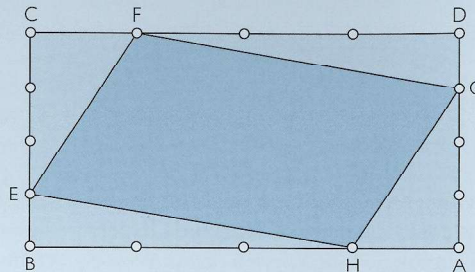
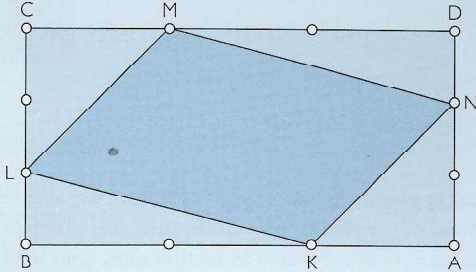


## Paralelogramos no rectângulo

Dividimos cada lado de um rectângulo ABCD em três partes iguais. Unimos depois quatro dos novos pontos obtidos de modo a formar um paralelogramo KLMN. Que relação existe entre as áreas destas duas figuras?

E se tivéssemos dividido os lados do rectângulo em quatro partes iguais, qual seria agora a relação entre as áreas?



Problema adicional: E se dividirmos cada lado em  $n$  partes iguais?

(Respostas até 20 de Fevereiro para zepaulo@armail.pt)

### À mesa de jogo

O problema proposto no número 108 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Em cima da mesa estavam dois baralhos de 52 cartas cada um. Cada um dos jogadores retirou para si algumas cartas, ficando as restantes no meio da mesa.

Depois e simultaneamente:

- a Ana deu metade das suas cartas à Beatriz,
- a Beatriz entregou um terço das suas ao Carlos,
- o Carlos deu um quarto das que tinha ao Diogo,
- o Diogo passou um quinto do seu monte à Ana.

Feito isto, verificaram que todos ficaram com igual número de cartas. Quantas cartas sobraram no meio da mesa?

Recebemos 10 respostas: Afonso Garcia (Torres Novas), Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Ana Loureiro, Catarina Ferreira (Lamego), Edgar Martins (Queluz), Francisco Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Leonel Vieira (Braga) e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

O processo seguido por estes nossos leitores foi praticamente o mesmo. Vamos representar por  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  o número de cartas inicialmente retiradas, respectivamente, por Ana, Beatriz, Carlos e Diogo. «Logicamente, estes valores terão de ser superiores a zero para o termo *retirar* ter sentido» (Alberto Canelas). Após a troca de cartas, os jogadores ficaram com:

$$\text{Ana: } \frac{1}{2}A + \frac{1}{5}D \text{ cartas} \quad \text{Beatriz: } \frac{1}{2}A + \frac{2}{3}B \text{ cartas}$$

$$\text{Carlos: } \frac{1}{3}B + \frac{3}{4}C \text{ cartas} \quad \text{Diogo: } \frac{1}{4}C + \frac{4}{5}D \text{ cartas}$$

Como todos ficaram com o mesmo número de cartas podemos estabelecer as seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}A + \frac{1}{5}D = \frac{1}{2}A + \frac{2}{3}B \\ \frac{1}{2}A + \frac{1}{5}D = \frac{1}{3}B + \frac{3}{4}C \\ \frac{1}{2}A + \frac{1}{5}D = \frac{1}{4}C + \frac{4}{5}D \end{cases}$$

Pretendemos resolver um sistema de 3 equações com 4 incógnitas. Se o fizermos em ordem a  $A$ ,  $B$  e  $C$ , obtemos:

$$\begin{cases} A = \frac{19}{10}D \\ B = \frac{3}{10}D \\ C = \frac{7}{5}D \end{cases}$$

Como estes valores têm de ser inteiros,  $D$  vai ser múltiplo de 10. Se for  $D = 10$ , vem  $A = 19$ . Mas  $A$  tem de ser um número par porque a Ana deu metade das suas cartas à Beatriz. Impossível.

Fazendo  $D = 20$ , temos  $A = 38$ ,  $B = 6$  e  $C = 28$ .

Se  $D$  for um múltiplo de 10 superior a 20, os valores obtidos somam mais que 104, que é o número de cartas de dois baralhos. Assim, inicialmente a Ana tinha 38 cartas, a Beatriz 6, o Carlos 28 e o Diogo 20. No total, são  $38 + 6 + 28 + 20 = 92$  cartas. Subtraindo este valor a 104 obtém-se 12. Conclusão: ficaram 12 cartas em cima da mesa.

A Graça Braga da Cruz seguiu um processo ligeiramente diferente depois de ter resolvido o sistema. Chamou  $N$  ao número de cartas com que cada um ficou no final. Logo:

$$\frac{19}{10}D + \frac{3}{10}D + \frac{7}{5}D + D = 4N \Leftrightarrow D = \frac{20N}{23}$$

Como  $D$  é inteiro, terá de ser  $N = 23$  e  $D = 20$ . A seguir, o processo é idêntico ao anterior.