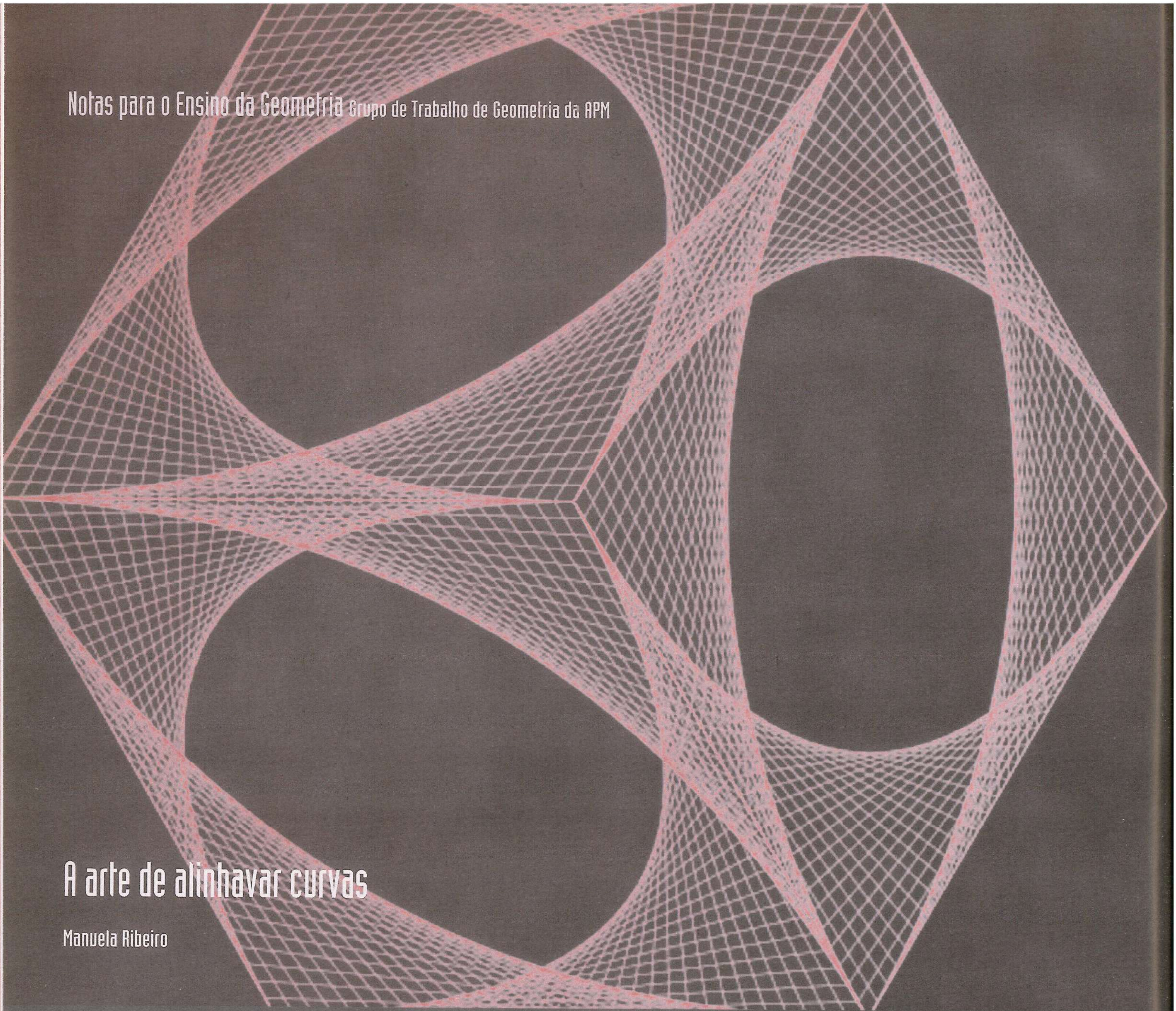

A arte de alinhavar curvas

Manuela Ribeiro

Curvas há muitas, simples, belas, ricas de propriedades e aplicações, tais como as cónicas, as ciclóides, as epiciclóides, as hipociclóides, …, que oferecem um vasto campo de estudo passível de abordagem desde um nível muito elementar.

Esse campo tem-se mantido praticamente inexplorado, no Ensino Básico o programa apenas aborda a circunferência, no entanto, por exemplo, experiências como a simples dobragem de uma folha de papel vegetal, o corte de um cone por um plano podem conduzir à abordagem das cónicas[1]. Nesta nota iremos apresentar outra maneira possível de abordar o estudo das curvas.

A arte de alinhavar curvas (em inglês, *Curve Stitching*) é em primeiro lugar um trabalho manual que pode ser executado desde tenra idade e ser desfrutado sem qualquer necessidade de compreensão dos fundamentos matemáticos subjacentes, mas que pode servir de pretexto para falar de geometria com os alunos.

Bonitas figuras podem ser obtidas marcando pontos igualmente espaçados ao longo de linhas rectas ou à volta de circunferências, depois resta uni-los ordenadamente com agulha e linha.

A um nível mais avançado a arte de alinhavar curvas pode ser encarada como uma actividade essencialmente matemática que nos leva a procurar resposta para perguntas tais como: porque razão surge uma parábola ao unir convenientemente pontos igualmente espaçados em cada um dos lados de um ângulo?

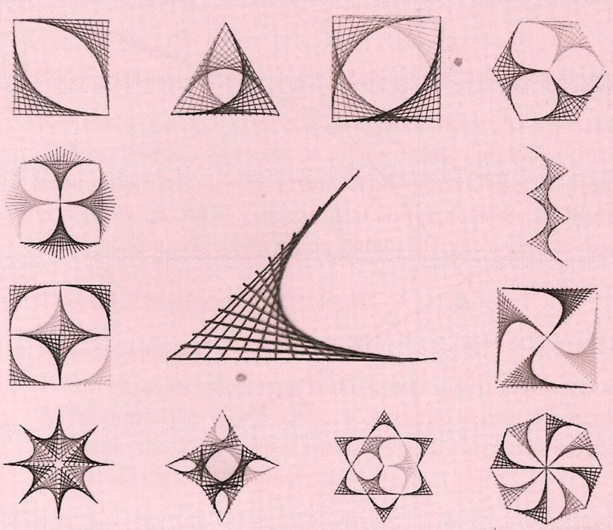

Figura 1

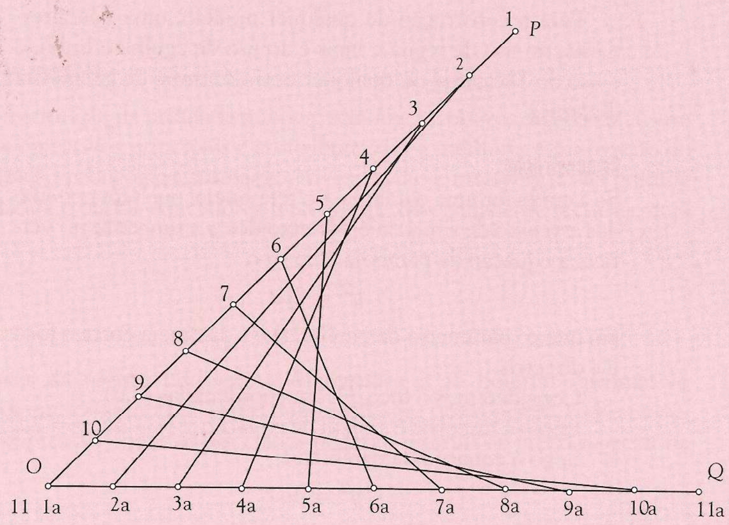

Figura 2

Alinhavar curvas tendo como base um ângulo

Processo para alinhavar uma parábola

Para iniciar o trabalho basta reunir: uma folha de cartolina A4, um lápis, uma régua, uma agulha e linha, e em seguida:

1. Na folha de cartolina traçar um ângulo de vértice O (fig. 2).
2. Sobre cada um dos lados do ângulo marcar, a partir de O, o mesmo número de segmentos iguais, por exemplo 10.

   NB: Os segmentos de recta traçados deverão ser iguais em cada uma das semirectas, não necessariamente iguais nas duas semirectas.

   Sejam P e Q os pontos extremos.
3. Numerar os pontos de P a O e de O a Q, 1 a 11 e 1a a 11a, respectivamente.
4. Com a agulha perfurar a cartolina em cada um dos pontos marcados.
5. Por último enfiar a linha na agulha e unir os pontos marcados na ordem seguinte

   1 – 1a – 2a – 2 – 3 – 3a – 4a – 4 – 5 – 5a ....

Num nível muito elementar poderá ser dada a cartolina já perfurada.

No lado da frente cada dois pontos com o mesmo número são unidos por um alinhavo, que na figura 2 está representado por um segmento, e esses alinhavos envolvem uma curva, uma parábola.

De facto está perante uma verdadeira parábola. Veja a demonstração na página seguinte.

Sugestões de trabalho com os alunos

Levar os alunos a reflectir sobre aquilo que vêem:

- uma família de linhas esticadas (rectas) convenientemente dispostas que envolvem uma curva, uma parábola;
- cada uma das rectas é tangente à curva, tem em comum com a curva apenas um ponto, o ponto de tangência;
- que essa curva é aberta mas que há curvas fechadas. Pedir para desenharem uma curva fechada;
- que essa curva é simétrica (tem uma simetria de reflexão) mas que há curvas não simétricas. Pedir para colocarem a mira de modo que a curva coincida com a sua imagem.

Aproveitar ainda para ver que:

- uma curva deste tipo pode ser obtida: dobrando convenientemente uma folha de papel vegetal, cortando convenientemente um cone, uma antena parabólica, um farol de automóvel;
- a concavidade da curva varia com a abertura do ângulo.

E deixar no ar a interrogação do que acontece se em vez de alinhavarmos os lados de um ângulo alinhavarmos duas rectas paralelas, ou outras configurações propostas aos alunos.

Como vê é muito mais simples alinhavar uma parábola do que explicar por palavras como fazê-lo e mais ainda do que justificá-lo. Depois de ter alinhavado uma verá que não há necessidade de numerar os pontos e estará em condições de alinhavar parábolas entre diferentes pares de linhas em figuras mais complicadas. Na figura 1 encontra alguns exemplos, deixe os seus alunos construir dois ou três à sua escolha e em seguida convide-os a deixarem-se levar pela sua imaginação.

Para a construção de qualquer modelo, uma boa alternativa ao uso de régua e lápis e ao uso de agulha e linha, é o uso do *Sketchpad* ou qualquer outro *software* de geometria dinâmica.

Demonstração:

Se a curva for uma parábola, no referencial que tem por eixo dos x o eixo de simetria e por eixo dos y a tangente no vértice, a equação da parábola é do tipo

$$y^2 = 2px$$

em que p (parâmetro da parábola) é a distância entre o foco e a directriz.

Consideremos o foco F com coordenadas (a,o).

Então a directriz é a recta de equação $x = -a$ e $p = 2a$.

Logo a equação da parábola é

$$y^2 = 4ax$$

OP e OQ são tangentes à curva, assim como toda a recta AB com $A \in OP$ e $B \in OQ$ tal que AP e OB tenham o mesmo número de divisões, isto é, tal que

$$\frac{OA}{BQ} = \frac{OP}{OQ}$$

Será que qualquer recta tangente à parábola de equação $y^2 = 4ax$ intersecta OP e OQ em pontos A e B, respectivamente, tais que $(OA/OP) = (BQ/OQ)$?

- Consideremos uma tangente à parábola num ponto R de abcissa, para facilidade de cálculo, ar^2.

  Ordenada de $R = y$ tal que $y^2 = 4a \times ar^2$

  $$y = 2ar$$

  logo $R(ar^2, 2ar)$.

  Equação da tangente à parábola no ponto R

  $$y - 2ar = m(x - ar^2)$$

  em que $m =$ Declive da tangente à curva de equação $y = 2\sqrt{ax}$ no ponto de abcissa $ar^2 =$ Derivada da função $y = 2\sqrt{ax}$ no ponto de abcissa $ar^2 = 1/r$.

  $$y - 2ar = \frac{1}{r}(x - ar^2)$$

  $$ry = x + ar^2$$

- Determinemos agora os pontos A e B, intersecção da tangente à parábola no ponto R com OP e OQ, respectivamente.

  $$P = (ap^2, 2ap) \quad p > 0$$

  $$Q = (aq^2, 2aq) \quad q < 0$$

  Tangente à parábola no ponto P $\;py = x + ap^2$

  Tangente à parábola no ponto Q $\;qy = x + aq^2$

  $$\begin{cases} py = x + ap^2 \\ ry = x + ar^2 \end{cases}$$

  $$\begin{cases} x = apr \\ y = a(r + p) \end{cases}$$

  $$A = (apr, a(p + r))$$

  $$B = (aqr, a(q + r))$$

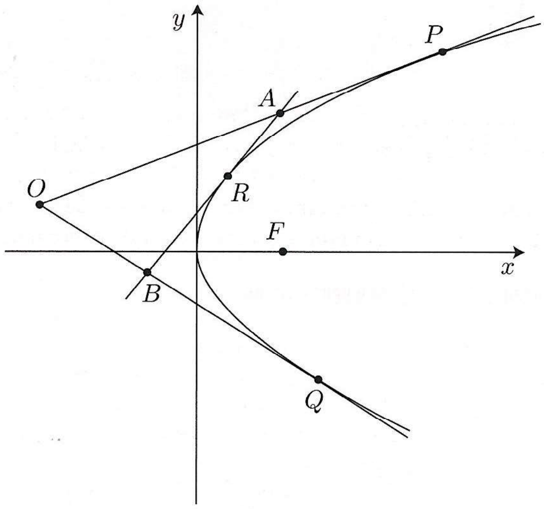

Figura 3

- Determinemos ainda o ponto O intersecção das tangentes à parábola nos pontos P e Q.

  $$O = (apq, a(p + q))$$

- Por último vejamos se a relação $(OA/OP) = (BQ/OQ)$ se verifica.

  $$\overrightarrow{OA} = (ap(r - q), a(r - q))$$

  $$\overrightarrow{OP} = (ap(p - q), a(p - q))$$

  $$\overrightarrow{BQ} = (ap(q - r), a(q - r))$$

  $$\overrightarrow{OQ} = (ap(q - p), a(q - p))$$

  $$\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OP}} = \frac{r - q}{p - q}$$

  $$\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{OQ}} = \frac{q - r}{q - p}$$

  logo a relação verifica-se.

Notas

1 Ver *As cónicas sob múltiplas perspectivas* em EM 95.

Bibliografia e links

Millington, John. *Curve Stitching: The art of beautiful mathematical patterns*. Tarquin Publications: St Albans, 2007.

http://math.youngzones.org/Curve_stitching.html

Manuela Ribeiro

Grupo de Trabalho de Geometria da APM