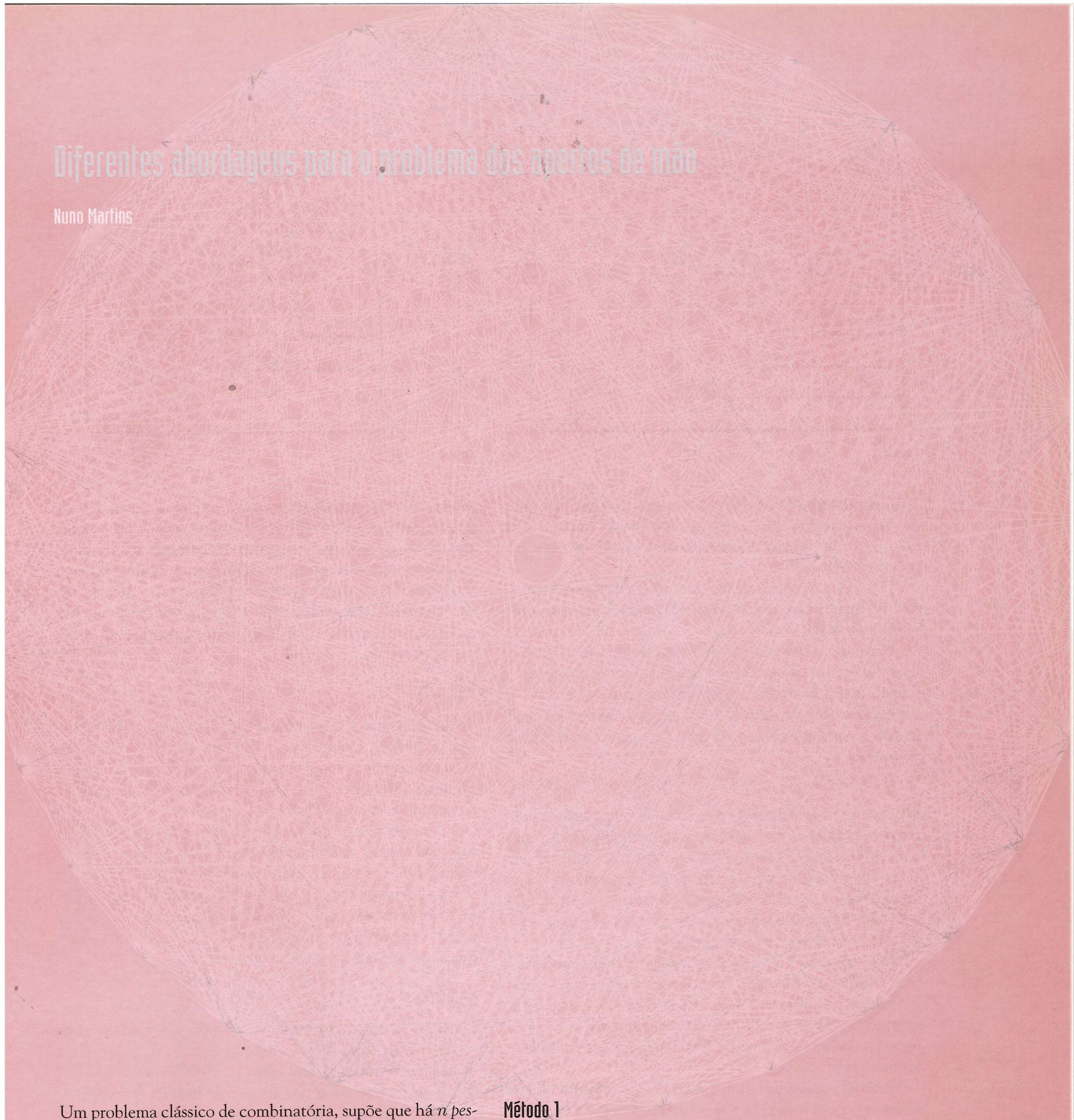
Diferentes abordagens para o problema dos apertos de mão

Nuno Martins



Um problema clássico de combinatória, supõe que há n *pessoas numa sala e todas as pessoas se cumprimentam, apertando a mão, uma única vez entre elas. Pretende-se saber quantos apertos de mão foram dados.*

Iremos apresentar alguns métodos de resolução deste problema, de uma forma progressiva, isto é, começaremos com a resolução que pensamos ser a mais intuitiva e tentaremos, progressivamente, melhorar as formas de apresentação das resoluções. Faremos, ainda, uma abordagem deste problema de combinatória sob o ponto de vista geométrico.

É importante que o leitor, antes de ler o artigo, tente ele próprio encontrar uma maneira de resolver este problema.

Método 1

A primeira abordagem ao problema e, provavelmente, a que mais naturalmente ocorre, é a simulação da situação. Este método poderá ser eficaz, caso o número de pessoas na sala, n, seja pequeno. Mas, e se o número de pessoas for elevado? Por exemplo, 50 ou 100 pessoas? Quantos apertos de mão ocorreriam? Como nos poderíamos organizar, mesmo através da simulação no papel, para garantir que cada pessoa deu apenas um aperto de mão? Pensemos na situação para $n = 20$.

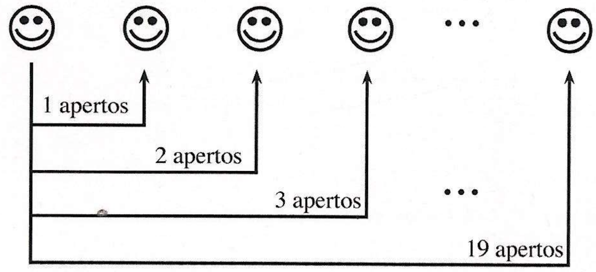


Figura 1

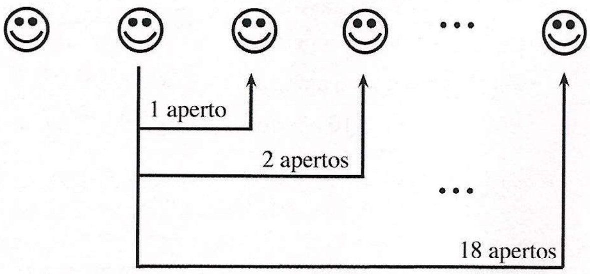


Figura 2

Organizando, por exemplo, as pessoas numa fila, facilmente percebemos que a primeira pessoa dá 19 apertos de mão — cumprimenta todas as pessoas da fila excepto ela própria (Figura 1).

Já a segunda pessoa da fila dará 18 apertos, pois além de não se cumprimentar a si própria, já cumprimentou a primeira pessoa (Figura 2):

Seguindo a mesma lógica, a terceira pessoa iria dar 17 apertos, pois além de não se cumprimentar a si própria, já havia cumprimentado as duas pessoas anteriores. Ora, se aplicarmos este raciocínio às 20 pessoas, chegamos facilmente à conclusão que o número de apertos total é dado pela soma:

$$19 + 18 + 17 + 16 + ... + 4 + 3 + 2 + 1 = 190$$

Estamos agora em condições de calcular o número de apertos para qualquer valor de n, ou seja, para um número qualquer de pessoas. O número total de apertos será dado pela soma dos primeiros números naturais consecutivos até ao número de pessoas menos uma. Mas caso estivessem, 100, 200, 500... pessoas na sala, calcular o número de apertos podia tornar-se moroso e mesmo penoso de calcular!

O ideal seria tentar encontrar uma fórmula que permitisse calcular o número de apertos para um qualquer número de pessoas, de uma forma rápida (estamos a pensar no método de Gauss para o cálculo dos primeiros n números naturais consecutivos[1] ou na fórmula geral das progressões aritméticas[2]).

Para já, analisemos outros métodos de resolução e tentaremos depois, e de uma forma natural, chegar à expressão que nos permite generalizar para qualquer valor de n.

Método 2

Comecemos por pensar no problema para os casos mais simples, e organizemo-los numa tabela (Tabela 1). Quantos apertos darão duas pessoas? E três pessoas? E quatro? Existirá alguma relação entre o número de apertos com o número de pessoas envolvidas?

Efectivamente percebe-se que o número de apertos seguinte pode ser obtido à custa do número de apertos anterior com o respectivo número de pessoas (Tabela 2).

No entanto, o nosso pequeno problema, dentro do nosso problema, continua por solucionar. Como proceder quando está envolvido um grande número de pessoas? Seguramente que este também não é o método mais adequado para resolver esta questão.

Método 3

Se nos centrarmos apenas Na sequência do número de apertos, podemo-nos aperceber do padrão que está subjacente — o número de apertos seguinte é obtido somando sempre números naturais consecutivos. É, por isso, fácil determinar o número de apertos (Esquema 1).

Conseguiremos, com este método, resolver o problema para valores consideráveis de n? Não...! Este método é recursivo, visto precisarmos sempre de conhecer quantos apertos foram dados no caso anterior para determinar o número de apertos seguinte. No entanto, não deixa de ser um método de resolução interessante onde se analisa o padrão que surge na sequência dos apertos de mão.

Método 4

Podemos abordar o problema usando um modelo para os apertos de mão. Representemos por A, B, C, D, E,... as pessoas sendo n o seu respectivo número. Cada aperto irá ser representado por um par de letras, por exemplo, $A \longleftrightarrow B$ significa que A cumprimentou B. Obviamente, que $B \longleftrightarrow A$ não precisa de ser representado. Assim, temos (Esquema 2).

Repare-se na relação entre «n» e a parcela maior de cada soma. Este número é sempre inferior em uma unidade, como tal, podemos inferir que, para $n = 20$, o número de apertos seria $19 + 18 + 17 + 16 + ... + 2 + 1 = 190$. Este método é prático? É, apenas, mais um método que nos permite perceber o comportamento do número dos apertos de mão para um determinado número de pessoas. Mas caímos outra vez numa soma de números naturais consecutivos.

Nº de pessoas	Nº de apertos
2	1 aperto
3	3 apertos
4	6 apertos
5	10 apertos
6	15 apertos
7	21 apertos
...	...

Tabela 1

Nº de pessoas	Nº de apertos
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
...	...
19	171
20	190

Tabela 2

Todas estas resoluções/abordagens, não nos permitem, responder, de forma imediata (entenda-se, com apenas uma operação), o número de apertos que seriam dados se estivessem envolvidas, por exemplo, 35 pessoas. Saberíamos que o resultado seria a soma dos 34 primeiros números naturais. Mas será que haverá alguma maneira de saber o número de apertos com uma simples operação?

n=2 $\rightarrow$1 aperto
+2
n=3 $\rightarrow$3 apertos
+3
n=4 $\rightarrow$6 apertos
+4
n=5 $\rightarrow$10 apertos
+5
n=6 $\rightarrow$15 apertos
+6
n=7 $\rightarrow$21 apertos
+7
n=8 $\rightarrow$28 apertos
+8
n=9 $\rightarrow$36 apertos
+9
n=10 $\rightarrow$45 apertos
+10
n=11 $\rightarrow$55 apertos
+11
n=12 $\rightarrow$66 apertos
+12
n=13 $\rightarrow$78 apertos
+13
n=14 $\rightarrow$91 apertos
+14
n=15 $\rightarrow$105 apertos
+15
n=16 $\rightarrow$120 apertos
+16
n=17 $\rightarrow$136 apertos
+17
n=18 $\rightarrow$153 apertos
+18
n=19 $\rightarrow$171 apertos
+19
n=20 $\rightarrow$190 apertos

Esquema 1

n=2 $A \leftrightarrow B$

n=3 $A \leftrightarrow B$ $B \leftrightarrow C$
$A \leftrightarrow C$
$2 + 1 = 3$

n=4 $A \leftrightarrow B$ $B \leftrightarrow C$ $C \leftrightarrow D$
$A \leftrightarrow C$ $B \leftrightarrow D$
$A \leftrightarrow D$
$3 + 2 + 1 = 6$

n=5 $A \leftrightarrow B$ $B \leftrightarrow C$ $C \leftrightarrow D$ $D \leftrightarrow E$
$A \leftrightarrow C$ $B \leftrightarrow D$ $C \leftrightarrow E$
$A \leftrightarrow D$ $B \leftrightarrow E$
$A \leftrightarrow E$
$4 + 3 + 2 + 1 = 10$

n=6 $A \leftrightarrow B$ $B \leftrightarrow C$ $C \leftrightarrow D$ $D \leftrightarrow E$ $E \leftrightarrow F$
$A \leftrightarrow C$ $B \leftrightarrow D$ $C \leftrightarrow E$ $D \leftrightarrow F$
$A \leftrightarrow D$ $B \leftrightarrow E$ $C \leftrightarrow F$
$A \leftrightarrow E$ $B \leftrightarrow F$
$A \leftrightarrow F$
$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$

...

Esquema 2

Nº de pessoas	Nº de apertos	Padrão
2	1	1×1
3	3	$\boxed{3} \times 1$
4	6	$\boxed{3} \times 2$
5	10	5×2
6	15	5×3
7	21	$\boxed{7} \times 3$
8	28	$\boxed{7} \times 4$
9	36	9×4
10	45	9×5
11	55	$\boxed{11} \times 5$
12	66	$\boxed{11} \times 6$
13	78	13×6
14	91	13×7
15	105	$\boxed{15} \times 7$
16	120	$\boxed{15} \times 8$
17	136	17×8
18	153	17×9
19	171	$\boxed{19} \times 9$
20	190	$\boxed{19} \times 10$
...	...	...

Tabela 3

Nº de pessoas	Nº de apertos
2	$\frac{2 \times 1}{2} = 1$ aperto
3	$\frac{3 \times 2}{2} = 3$ apertos
4	$\frac{4 \times 3}{2} = 6$ apertos
5	$\frac{5 \times 4}{2} = 10$ apertos
6	$\frac{6 \times 5}{2} = 15$ apertos
7	$\frac{7 \times 6}{2} = 21$ apertos
...	...

Tabela 4

Método 5

Analisemos, agora, a coluna do número de apertos da seguinte tabela e a respectiva coluna do padrão que se forma (Tabela 3).

Um interessante padrão é formado recorrendo a uma simples multiplicação. Relacionando os seus factores com o número de pessoas, podemos facilmente calcular o número de apertos. Repare-se que quando o número de pessoas é ímpar o multiplicando vai ser esse mesmo número e o multiplicador é a parte inteira da metade desse número; quando o número de pessoas é par o multiplicando é o número ímpar que lhe antecede e o multiplicador é a sua metade. Por exemplo, o número de apertos dados por 35 pessoas: $35 \times 17 = 595$; ou para 100 pessoas: $99 \times 50 = 4950$; ou para 231 pessoas: $231 \times 115 = 26565$.

Este método permite-nos, assim, determinar o número de apertos para um qualquer número de pessoas.

Método 6

Podemos tentar chegar a uma fórmula, de forma simples, que nos permita calcular o número de apertos de mão, para qualquer número de pessoas. Analisemos, novamente, a tabela 1 apresentada no método 2.

Será que se consegue relacionar o número de pessoas (primeira coluna) com o número de apertos (segunda coluna)? Efectivamente, o número de apertos de mão pode ser obtido pelo produto entre o número de pessoas envolvidas e pelo número de pessoas do caso anterior, dividido por 2 (Tabela 4).

Como tal, podemos chegar facilmente à fórmula: o número de apertos é dado por

$$\frac{(\textit{número de pessoas}) \times (\textit{número de pessoas} - 1)}{2}$$

Ou então,

$$T = \frac{n \times (n-1)}{2},$$

onde T representa o número total de apertos e n o número de pessoas.

Ora, chegámos precisamente e de uma forma simples, à fórmula de Gauss para o cálculo dos primeiros n números naturais consecutivos.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	x	1–2	1–3	1–4	1–5	1–6	1–7	1–8	1–9
2	2–1	x	2–3	2–4	2–5	2–6	2–7	2–8	2–9
3	3–1	3–2	x	3–4	3–5	3–6	3–7	3–8	3–9
4	4–1	4–2	4–3	x	4–5	4–6	4–7	4–8	4–9
5	5–1	5–2	5–3	5–4	x	5–6	5–7	5–8	5–9
6	6–1	6–2	6–3	6–4	6–5	x	6–7	6–8	6–9
7	7–1	7–2	7–3	7–4	7–5	7–6	x	7–8	7–9
8	8–1	8–2	8–3	8–4	8–5	8–6	8–7	x	8–9
9	9–1	9–2	9–3	9–4	9–5	9–6	9–7	9–8	x

Tabela 5

Método 7

Uma outra maneira de obter uma fórmula (que será, naturalmente, equivalente à do método 6), é usar uma tabela de dupla entrada. Suponhamos o caso para 9 pessoas. Na linha e coluna 1, listamos as pessoas, representadas de «1 a 9». No corpo da tabela 5 estão representados os apertos.

Repare-se que a diagonal principal representa as pessoas que se cumprimentam a elas próprias, por isso, estes apertos não são contados. Também se pode reparar que a tabela é simétrica relativamente a esta diagonal, o que significa que em metade da tabela estão representados os mesmos apertos que na outra metade, como tal, também estes não devem ser contados. Sendo assim, para 9 pessoas envolvidas, a tabela tem 81 entradas, mas como não é contada a diagonal (9 entradas) e só são contadas metade das entradas, temos que:

$$\frac{81-9}{2} = 36 \text{ apertos.}$$

Generalizando, para n pessoas, temos no total n^2 entradas na tabela, às quais teremos que subtrair n da diagonal principal e das quais só metade serão contabilizadas, ou seja

$$\frac{n^2-n}{2},$$

que é equivalente à fórmula encontrada no método 6.

Método 8

Como foi referido no início deste artigo, este é um problema de combinatória e o que está implícito é saber de quantas maneiras se podem combinar (apertar a mão) duas pessoas de um grupo de n, pelo que, a forma mais eficiente e rápida para o resolver é aplicar a fórmula das combinações:

$$C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

No entanto, ao aplicar este método, pensamos que se perde a abordagem interessante que o problema pode ter embora a sua aplicação envolva já um pensamento mais elaborado que o dos métodos anteriores.

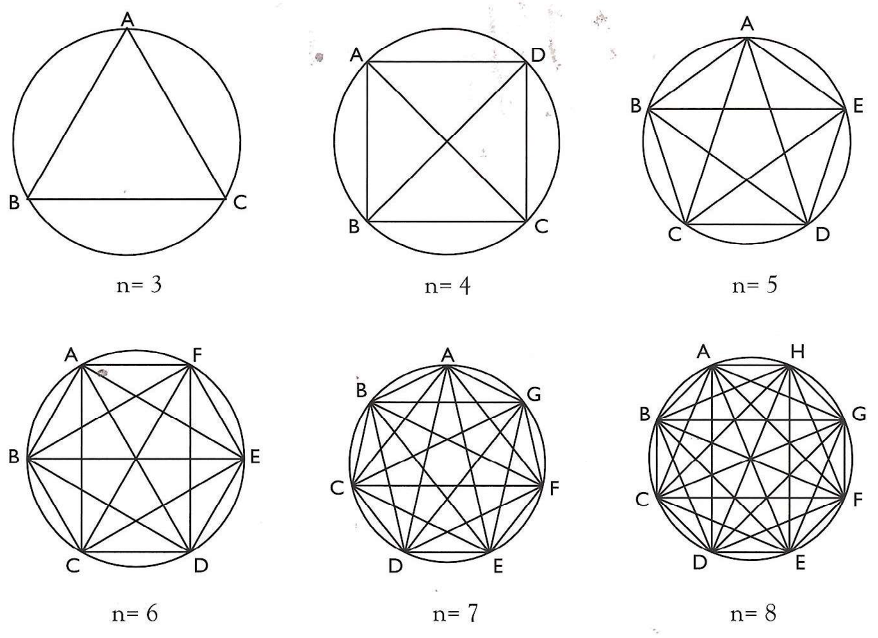


Figura 3

Método 9

Façamos, agora, uma abordagem ao problema, sob um ponto de vista geométrico. Construamos uma circunferência e, sobre ela, pontos equidistantes (apenas por questão de estética!) que nos representam as pessoas. De cada ponto irá partir $n-1$ segmentos para os restantes pontos, que são os apertos de mão que cada pessoa dá. Para cada concretização de n, obtém-se um polígono (exceptuando, obviamente, o caso $n=2$), com as respectivas diagonais (para $n>3$) (ver Figura 3 na página seguinte). O problema tornou-se, assim, geométrico, cuja resposta é dada pelo número de lados do polígono adicionado das respectivas diagonais.

Para $n=20$ obtém-se esta harmoniosa imagem (Figura 4)[3]. Como facilmente se percebe, só é exequível fazer uma contagem de diagonais para polígonos com um pequeno número de lados. É quase impossível, por exemplo, contá-las num polígono com 20 lados (ver Figura 4 na página seguinte). Como tal, há que tentar encontrar uma expressão geral que nos permita, através do polígono, chegar ao número total de apertos. Imaginemos 20 pessoas, em que todas se irão cumprimentar e escolhamos uma. Esta pessoa dará 19 apertos. Como são 20 pessoas, no total haverá $20 \times 19 = 280$ apertos. Contudo, cada aperto envolve duas pessoas, logo, 280 é o dobro do número efectivo de apertos que se irá dar, que é

$$190 = \frac{20 \times 19}{2}.$$

Fazendo uma generalização para n pessoas, teremos que o número de apertos é dado por

$$\frac{(n-1) \times n}{2}$$

que é, precisamente, a expressão obtida no método 6.

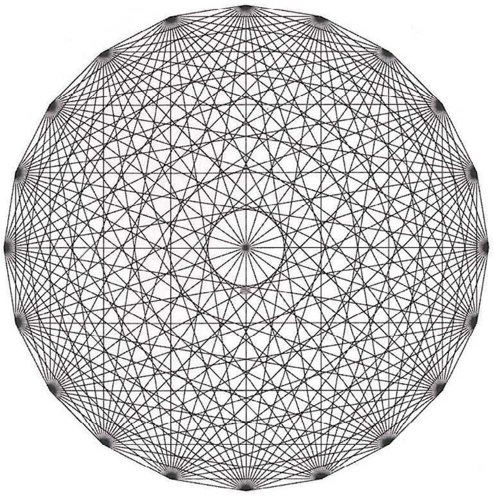
Uma outra abordagem semelhante mas menos trivial, seria encontrar uma expressão para o número de diagonais e adicionar-lhe o número de lados do polígono. Pensemos, por exemplo, no hexágono. Se cada vértice representar uma pessoa, a diagonal do hexágono vai representar o aperto que essa pessoa dá a outra pessoa, que não é ela própria nem as que lhe estão adjacentes. Assim, a pessoa A cumprimenta $(6-3)=3$ pessoas. Logo, como temos 6 vértices, teríamos $6 \times 3 = 18$ diagonais. No entanto, se as formos contar realmente, só temos metade, visto que, cada diagonal une exactamente dois vértices e, para cada vértice, contámos a mesma diagonal duas vezes, ou seja, significa que fazemos a contagem de $A \longleftrightarrow C$ (A cumprimenta C), mas não fazemos a contagem de $C \longleftrightarrow A$. Podemos construir uma tabela que nos sintetize a situação para polígonos com n lados (Tabela 6).

Como tal, chegamos à expressão:

$$\frac{(n-3) \times n}{2}, n > 3,$$

que nos dá o número de diagonais de um n-ágono. Assim para o hexágono (6 pessoas) temos

$$\frac{(6-3) \times 6}{2} = 9 \text{ diagonais}$$



n= 20

Figura 4

Nº de lados	Nº de diagonais que sai de cada vértice	Nº total «suposto» de diagonais	Nº «efectivo» de diagonais
4	$4-3=1$	$1\times 4=4$	$4\div 2=2$
5	$5-3=2$	$2\times 5=10$	$10\div 2=5$
6	$6-3=3$	$3\times 6=18$	$18\div 2=9$
7	$7-3=4$	$4\times 7=28$	$28\div 2=14$
8	$8-3=5$	$5\times 8=40$	$40\div 2=20$
...	...	...	...
n	$n-3$	$(n-3)\times n$	$\frac{(n-3)\times n}{2}$

Tabela 6

que adicionadas ao número de lados do hexágono, perfaz o número total de apertos para as 6 pessoas, 15. De um modo geral, a expressão do número de apertos é dada por:

$$\frac{(n-3)\times n}{2}+n \quad , \quad n>2$$

Como seria de esperar esta expressão é, também ela, equivalente à já apresentada no método 6:

$$\frac{(n-1)\times n}{2} \quad , \quad n>2$$

O que está em mente quando nos deparamos com uma situação problemática é encontrar uma possível (re)solução. Provavelmente, numa primeira abordagem tenta-se chegar à solução, não havendo especial preocupação com a forma de a obter. Porém, essa resolução poderá não ser a mais clara nem a mais elegante. Os caminhos tortuosos que inicialmente se percorrem numa primeira abordagem, para encontrar a solução, podem eventualmente ser optimizados se tentarmos pensar no problema sob pontos de vista diferentes. Mesmo que já tenhamos encontrado uma resolução que nos satisfaça podemos estar interessados em descobrir outras, nem que seja com o intuito de confirmar o(s) resultado(s) por outros métodos.

Até mesmo problemas com um enunciado bastante simples, como o que foi apresentado, pode proporcionar variados e interessantes métodos de resolução!

O autor agradece as sugestões dadas pelos revisores da APM que contribuíram para o melhoria deste artigo.

Notas

1 $\frac{n\times(n-1)}{2}, n\geq 2.$

2 Soma dos primeiros n termos de uma progressão aritmética:

$$S_n=\frac{(u_1+u_n)\times n}{2}.$$

3 Por forma a não sobrecarregar a imagem omitiram-se as letras nos vértices do polígono.

Referências bibliográficas

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Gradiva.

Posamentier, A. S. e Krulik, S. (1990). *Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions*. Corwin Press, Inc. USA. \ \

Wheeler, R. E. (1992). *Modern Mathematics*. Eighth edition — Brooks Cole Publishing Company.

Referências on-line

http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?ID=L630

http://mathforum.org/library/drmath/view/54691.html

http://math.springbranchisd.com/high/classes/geometry/Laying%20The%20Foundation/Lessons/Handshake_Problem%20P.315-319.pdf

http://www.math.toronto.edu/mccann/assignments/204/handshake.pdf

Nuno Martins
Escola Superior de Educação de Coimbra