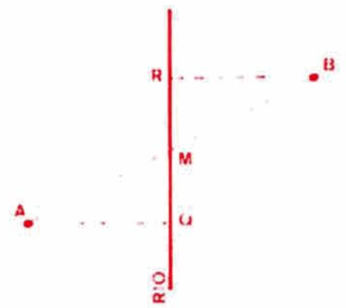
Materiais para a aula de Matemática

Quase sempre, os problemas apresentados nas aulas de Matemática têm um método de resolução que leva a um resultado exacto. Ora, muitos dos problemas reais não têm um processo que conduza directamente à solução. É preciso ir por tentativas e aproximações e o resultado final nunca é exacto, embora se possa obter uma aproximação tão grande quanto se queira ou quanto os métodos de cálculo o permitam.

A actividade proposta é deste tipo. Corresponde, esquematicamente, a uma situação real e consegue-se chegar à solução por aproximações sucessivas. A quantidade de cálculos exigida é grande e a apresentação deste problema só faz sentido se os alunos estiverem habituados a trabalhar com calculadoras.

É conveniente que a turma se organize em grupos de 2 a 4 elementos. Cada grupo trabalhará com um valor diferente de K (relação entre os preços das duas zonas). Os valores de K propostos terão de ser maiores que um (é mais caro construir na zona pantanosa) e poderão variar, por exemplo, entre 1,5 e 4.



Depois de iniciados os trabalhos, será conveniente que o professor percorra os grupos discutindo as metodologias adoptadas: Que ponto do rio escolheram para origem? (Normalmente, será R ou Q). Se $K=1$, como seria a linha de caminho de ferro? Como $K>1$, valerá a pena investigar abaixo do ponto M ou pode-se concluir que aí é de certeza mais caro? E acima do ponto R?

Rapidamente os grupos compreenderão que terão de investigar a zona entre os pontos R e M. Alguns terão tendência a concluir à priori que o trajecto mais barato é ARB mas essa hipótese será abandonada logo que se teste um ponto intermédio.

As estratégias adoptadas para descobrir o ponto «ideal» variarão de grupo para grupo mas, de um modo geral, todos conseguem lá chegar sem dificuldade de maior.

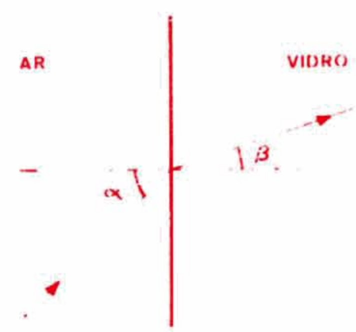
Pela nossa experiência, são precisas duas horas para esta 1.ª parte. É aconselhável que o professor peça a cada grupo que entregue a tabela com os resultados de todos os pontos testados.

Para a 2.ª parte será necessária uma hora, sendo conveniente logo no início pôr no quadro, para toda a turma, a lista dos valores de K (por ordem crescente) e os respectivos valores de **d**, obtidos na aula anterior.

A relação a descobrir é $\text{sen}\,\alpha/\text{sen}\,\beta = K$ ou $\text{sen}\,\alpha = K\cdot\text{sen}\,\beta$.

No final pode-se fazer uma discussão geral sobre o problema. Se o K for muito grande, isto é, se for muito caro construir em terreno pantanoso, a solução aproxima-se do ponto R. Por outro lado, se K tender para zero, ou seja, se for muito barato construir do lado direito do rio, então a ponte irá ficar cada vez mais próxima do ponto Q.

Por fim, um dos aspectos mais interessantes deste problema é que o trajecto mais económico para a construção do caminho de ferro é exactamente o mesmo que se obtém na refracção de um raio luminoso que passa de um meio óptico para outro com um índice de refracção K. Com efeito, um raio de luz, ao passar, por exemplo, do ar para o vidro muda de direcção. O ângulo que faz com a perpendicular à superfície do vidro (ângulo de incidência) é diferente com o ângulo que faz depois de entrar no vidro (ângulo de refracção). A luz não atravessa o vidro com a mesma facilidade com que atravessa o ar e à razão entre estes dois graus de «dificuldade» dá-se o nome de índice de refracção relativo K. No vidro, a luz anda mais devagar que no ar (anda com mais «dificuldade») e a razão entre as duas velocidades é justamente K.



Ora os ângulos de incidência e refracção estão relacionados pela expressão $\text{sen}\,\alpha = K\cdot\text{sen}\,\beta$, isto é, a luz refracta-se de modo a que o raio luminoso siga o trajecto mais «económico» entre dois pontos.

Como se pode ver, estamos perante duas situações, a construção de um caminho de ferro e a refracção da luz, que à partida pareciam nada ter a ver uma com a outra mas às quais se aplica o mesmo modelo matemático.

José Paulo Viana

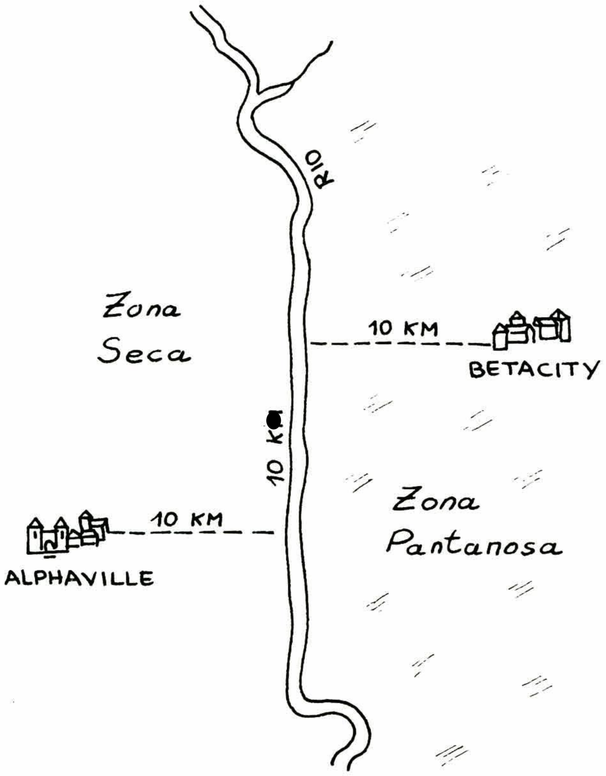
Um Caminho de Ferro Económico — 1.ª Parte

Um certo rio atravessa uma região em que de um dos lados o terreno é seco enquanto que do outro é pantanoso. Existem na zona duas cidades situadas conforme se indica no mapa ao lado.

Pretende-se construir uma linha de caminho de ferro desde Alphaville até Betacity. O preço de cada quilómetro de via em terreno seco é de 1000 contos, mas na zona pantanosa a construção é **K** vezes mais cara.

Descobre (com aproximação à centésima) em que local a linha deve atravessar o rio de modo que o preço total da obra seja o mais baixo possível.

(Para o teu grupo, o valor de **K** é ...).



Sugestões:

— Vai escolhendo sucessivas posições para a ponte e, para cada uma delas, calcula o preço do caminho de ferro.

— Organiza uma tabela com os resultados obtidos.

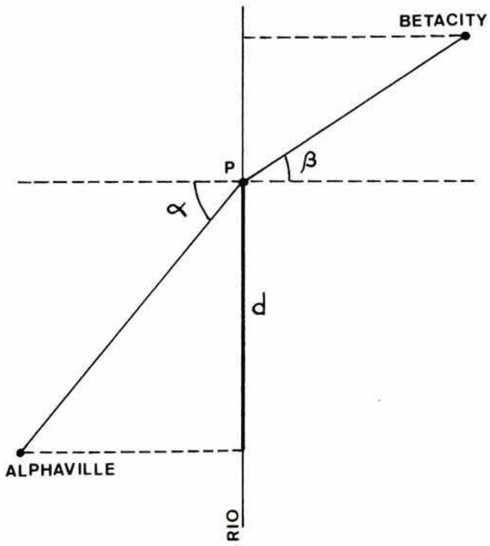
Um Caminho de Ferro Económico
— 2.ª Parte

Repara na figura ao lado.

Chamámos P ao ponto onde se irá construir a ponte sobre o rio e **d** é a distância indicada.

Consulta os outros grupos de trabalho e constrói uma tabela do tipo indicado (utiliza, para as funções trigonométricas, valores com quatro casas decimais).

Considera a perpendicular ao rio no ponto P e, com a ajuda da trigonometria, determina os ângulos α e β que a linha de caminho de ferro faz com a perpendicular de cada lado do rio.



GRUPO	k	d	α	β	sen α	sen β	cos α	cos β	tg α	tg β

Tenta descobrir uma relação entre K e uma das funções trigonométricas dos ângulos α e β. Que relação é essa?