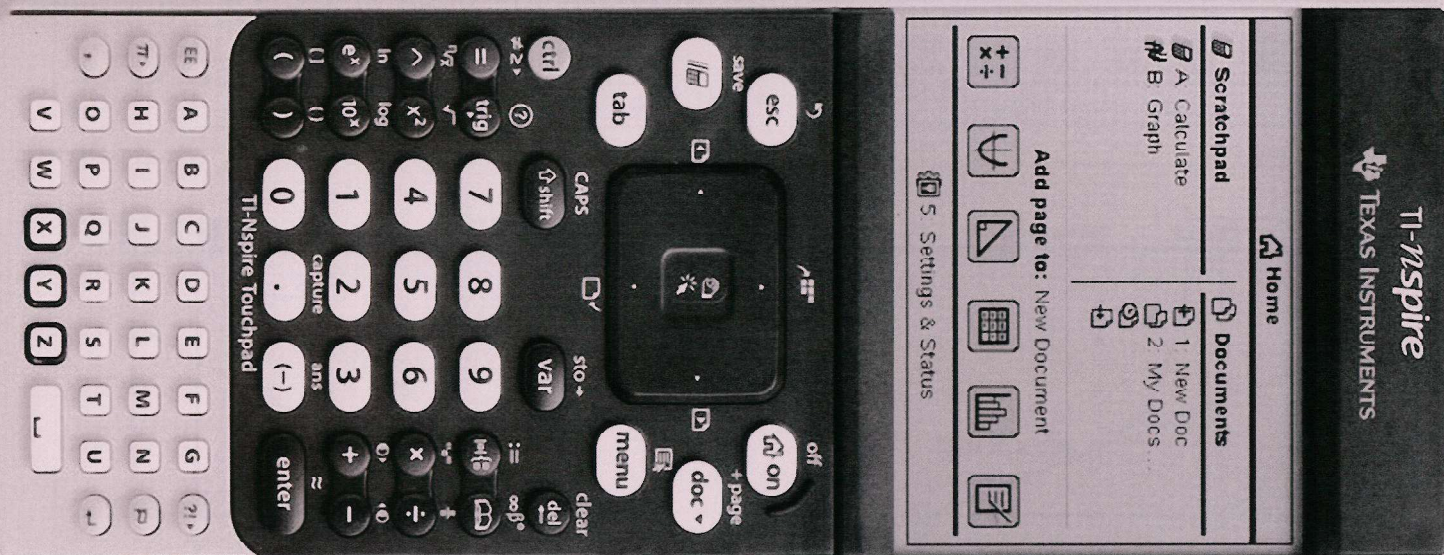


Investigações matemáticas com a TI-Nspire

José Paulo Viana



Todos nós sabemos (quer dizer, quase todos...) que a calculadora gráfica pode ser um poderoso instrumento, quer para o professor que ensina Matemática, quer para os alunos aprenderem e fazerem Matemática.

O aparecimento da unidade portátil TI-Nspire, que é muito mais que uma calculadora gráfica, veio alargar muitíssimo o leque de possibilidades. Desta forma, aumenta consideravelmente o número de problemas significativos que podem ser propostos aos alunos e que os obrigam a experimentar, a investigar, a elaborar conjecturas, a testá-las e, se necessário, a reelaborá-las.

Vamos então resolver aqui dois problemas que poderão ser propostos aos alunos no 11º ou no 12º anos. Os problemas aparentam ser quase iguais mas, como veremos, têm desenvolvimentos muito diferentes.

Um triângulo a partir da hipérbole

Temos o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Por um ponto de abcissa a traçamos a tangente ao gráfico de f . A tangente intersecta os eixos coordenados nos pontos A e B.

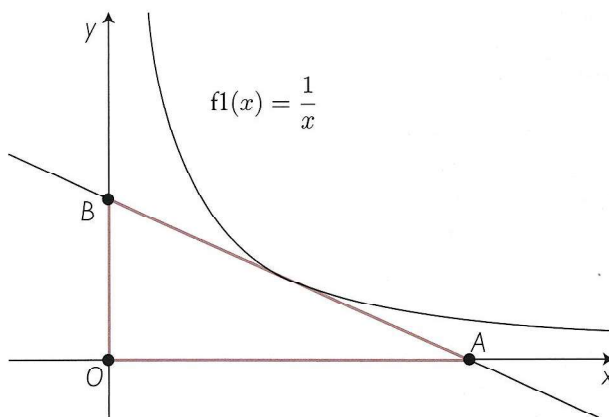


Figura 1

Consideremos o triângulo BOA, em que O é a origem do referencial (figura 1).

Como varia a área do triângulo em função de a ?

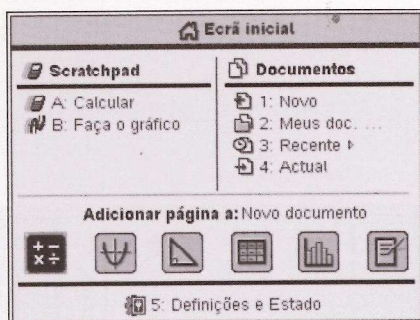


Figura 2

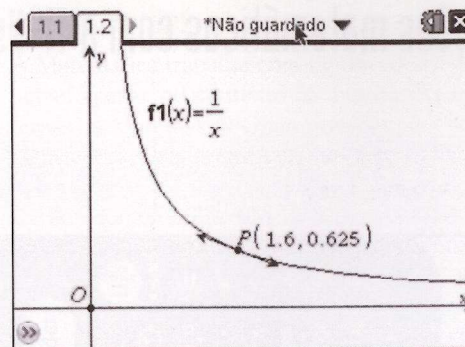


Figura 3

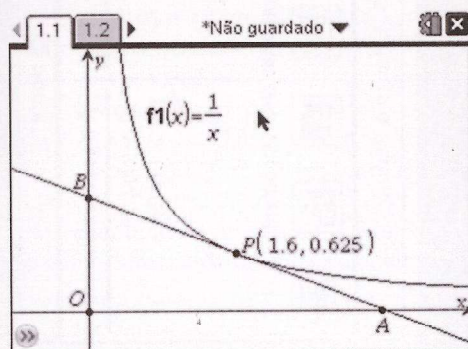


Figura 4

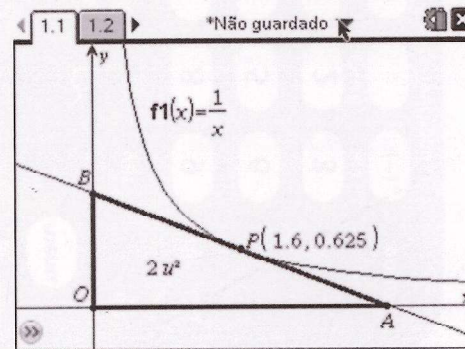


Figura 5

Resolução na máquina

Vamos começar por resolver o problema na unidade portátil com o sistema operativo 2.0 mas, no essencial, tudo se passará de forma muito parecida com os anteriores sistemas. As principais diferenças em relação ao que aqui apresentamos vão ser os números que indicam as opções dos menus.

Com a tecla $\left[\text{Esc} \right]$ vai ao ecrã inicial e escolhe 1:Novo para criar um novo documento (figura 2).

Cria uma página de 2:Gráficos e Geometria.

Faz o gráfico da função $f_1(x) = 1/x$.

Para uma melhor visualização, põe o cursor numa zona livre, carrega em $\left[\text{Enter} \right]$ até a mão fechar e «agarra» a folha. Depois, arrasta-a de modo a que a origem do referencial fique perto do canto inferior esquerdo.

Traça uma tangente ao gráfico num ponto qualquer. Para isso, vai a $\left[\text{Menu} \right]$ 7:Pontos e Rectas, 7:Tangente, desloca o cursor para a curva e, quando aparecer a mensagem gráfico f1 faz $\left[\text{Enter} \right]$ e, novamente, em Ponto sobre um objecto, faz $\left[\text{Enter} \right]$. Digita P para nomear o ponto criado (figura 3).

Para obter as coordenadas do ponto vai a $\left[\text{Menu} \right]$ 1:Acções, 7:Coordenadas e Equações, desloca o cursor para o ponto, faz $\left[\text{Enter} \right]$, desloca as coordenadas para onde aches conveniente e faz $\left[\text{Enter} \right]$.

Temos agora de construir os pontos de intersecção da tangente com os eixos.

Vai a $\left[\text{Menu} \right]$ 7:Pontos e Rectas, 3:Ponto(s) de intersecção, desloca o cursor para o eixo Ox, faz $\left[\text{Enter} \right]$, depois para a tangente, faz $\left[\text{Enter} \right]$ e, quando aparece o ponto faz $\left[\text{Menu} \right]$ A para que

o ponto fique etiquetado com a letra «A». Repete para o eixo Oy, chamando «B» ao ponto (figura 4).

Define o triângulo BOA em $\left[\text{Menu} \right]$ 9:Formas, 2:Triângulo. Desloca o cursor para os pontos A, O e B, fazendo $\left[\text{Enter} \right]$ em cada um deles.

Faz $\left[\text{Esc} \right]$ para o cursor ficar livre e põe-no sobre um dos lados do triângulo. Quando aparecer a mensagem «triângulo» faz $\left[\text{Menu} \right]$ 3:Atributos e muda a espessura da linha para média (figura 5).

Falta obter a área do triângulo. Vai a $\left[\text{Menu} \right]$ 8:Medições, 2:Área, desloca o cursor para o triângulo e faz $\left[\text{Enter} \right]$.

Sem fazer mais nada, arrasta o texto com o valor da área para uma zona livre e faz $\left[\text{Enter} \right]$.

Está terminada a construção. Podemos passar à investigação.

Lembremos que queremos descobrir que relação existe entre a abcissa do ponto P e a área do triângulo. No exemplo da construção que fizemos temos $a = 1,6$ e área = 2.

É agora que tudo se torna mais interessante: não temos de fazer mais construção nenhuma. Basta fazermos $\left[\text{Esc} \right]$ para o cursor ficar livre e pô-lo em cima do ponto P (figura 6).

Agarramos o ponto P carregando em $\left[\text{Enter} \right]$ e arrastamo-lo. A máquina irá manter a construção e actualizará automaticamente todas as variáveis (que neste caso são as coordenadas de P e área do triângulo).

Vemos que, em todas as posições que escolhermos para P, a área do triângulo não se altera. Ou seja, a área do triângulo BOA é independente da abcissa de P.

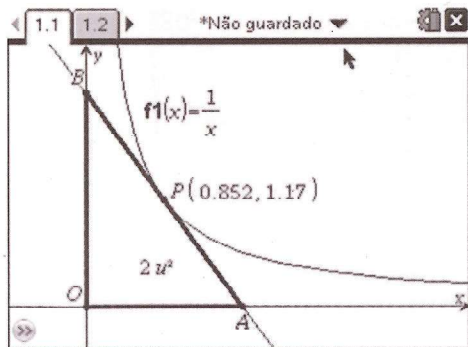


Figura 6

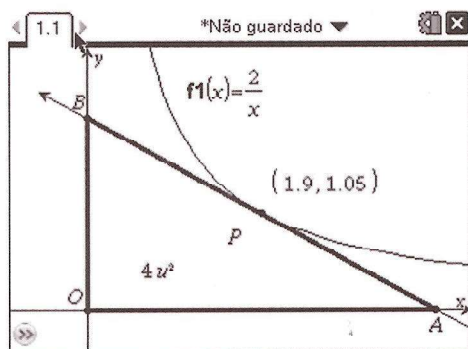


Figura 7

Bem, na realidade, não temos a prova que este resultado seja sempre verdadeiro. Neste momento, trata-se apenas de uma conjectura baseada na observação de uma grande quantidade de triângulos diferentes, todos eles com a mesma área. É aqui que temos de propor aos nossos alunos que dêem o passo seguinte: provar que esta propriedade se verifica sempre.

Demonstração

Para um ponto genérico P, as suas coordenadas são $(a, 1/a)$

O declive da tangente é igual à derivada de f nesse ponto. Como

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2},$$

vem

$$m = -\frac{1}{a^2}.$$

A equação da tangente é do tipo

$$y = -\frac{1}{a^2}x + b.$$

Substituindo as coordenadas de P na equação, descobrimos o valor de b e obtemos:

$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}.$$

Fazendo a intersecção com os eixos, obtemos as coordenadas de A e B: A $(2a, 0)$ e B $(0, 2/a)$.

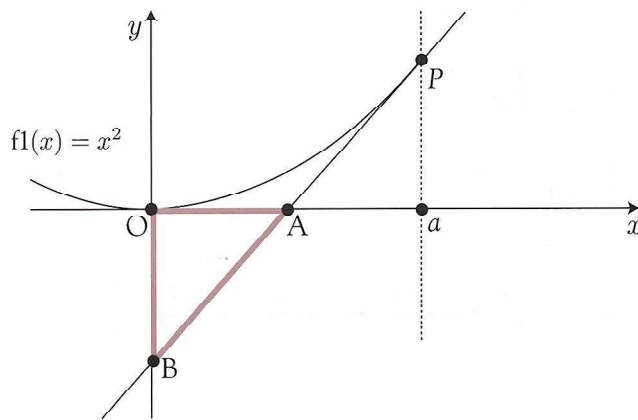


Figura 8

$$\text{Área do triângulo} = \frac{1}{2} \times 2a \times \frac{2}{a} = 2$$

Está demonstrado.

Prolongamentos

Como quase sempre, vale a pena pensar: *E se...?*

E se a função fosse

$$f(x) = \frac{2}{x}?$$

Não é preciso repetir todo o processo. Basta ir à máquina e alterar a função f_1 no ecrã onde estávamos: pomos o cursor sobre a etiqueta da função, clicamos para seleccionar o número e alteramo-lo para 2 (figura 7).

Depois é só deslocar o ponto P e ver o que acontece à área. Agora, podemos ir mais longe ainda:

E se a função fosse

$$f(x) = \frac{k}{x}?$$

Já sabemos as áreas para k igual a 1 e a 2. Experimentamos na máquina mais alguns valores de k e logo descobriremos a relação que ele tem com a área.

Um triângulo a partir da parábola

Temos o gráfico da função $f(x) = x^2$ (figura 8).

Por um ponto de abcissa $a > 0$ traçamos a tangente ao gráfico de f . A tangente intersecta os eixos coordenados nos pontos A e B.

Consideremos o triângulo BOA, em que O é a origem do referencial.

Como varia a área do triângulo em função de a ?

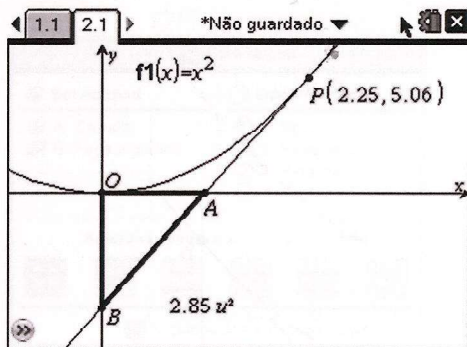


Figura 9

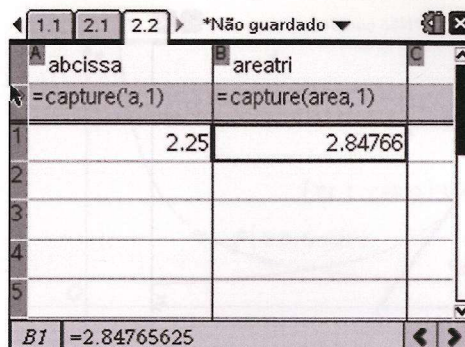


Figura 11

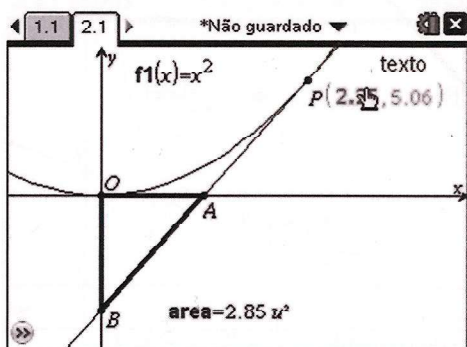


Figura 10

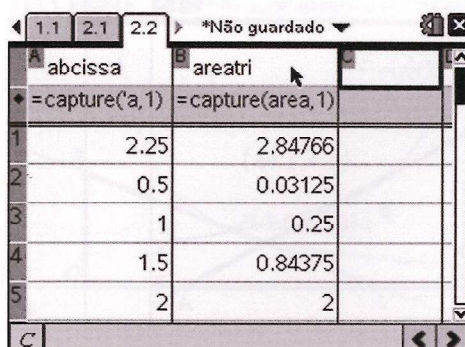


Figura 12

Resolução na máquina

A) Construir a figura

Para continuar a usar a máquina, temos duas alternativas:

1ª hipótese — Ir a **1:Novo** e criar um novo documento. A máquina pergunta se desejamos gravar o documento anterior. Podemos dizer que sim e dar-lhe um nome. Ele fica guardado e poderemos consultá-lo mais tarde.

2ª hipótese — Continuar no mesmo documento, criando um novo problema. Para isso, carregar na tecla «doc» 4: **Inserir 1:Problema** (ou, estando a usar o teclado antigo, fazer **ctrl** 4: **Inserir 1:Problema**). Tudo o que fizermos agora é independente do que estava no problema anterior e podemos portanto usar os mesmos nomes para as funções, pontos, etc.

A construção da figura é muito parecida com a do problema anterior, pelo que podemos omitir os pormenores.

Desta vez, a área não é constante. Basta pensar que, quando P se aproxima de O, a área tende para 0. E, se agarrarmos o ponto P e o deslocarmos, confirmamos isso.

Temos então de registar numa tabela os diferentes valores que escolhermos para a abcissa de P e as correspondentes áreas do triângulo. Poderíamos fazer isso numa folha de papel mas é muito mais fácil usar a máquina para fazer a recolha de dados (figura 9).

B) Definir variáveis

Coloca o cursor sobre a abcissa do ponto de tangência e

aguarda que o cursor mude para \mathcal{E} . Selecciona este valor pressionando em \mathcal{E} ou em \mathcal{E} . Acciona a tecla \mathcal{E} , escolhe 1: **Guardar Var**, dá-lhe o nome de *a* (de abcissa) digitando a tecla **A** e faz \mathcal{E} . Repara que a abcissa do ponto aparece agora a negrito (figura 10).

Repete o processo para a área do triângulo, dando o nome de *area* à nova variável.

C) Criação da folha de cálculo

Faz **ctrl** «doc»(+page) 4: **Adicionar Listas e folha de cálculo** para acrescentar a nova página (estando a usar o teclado antigo, fazer **ctrl** 4: **Inserir 6:Listas e folha de cálculo**).

Coloca o cursor na célula A1. Pressiona 3 vezes \blacktriangle para seleccionar a coluna toda. Para alterar a largura da coluna vai a **menu** 1: **Acções**, 2: **Redimensionar**, 1: **Largura da coluna**, pressiona várias vezes em \blacktriangleright e faz \mathcal{E} . Desloca o cursor para a direita e repete o processo para a coluna B.

Coloca o cursor no topo da coluna A (junto da letra A), escreve *abscissa* e faz \mathcal{E} (figura 11).

Vai para o topo da coluna B e escreve *areatri*.

D) Captura das variáveis

Coloca o cursor na casa com fundo cinzento, imediatamente acima de A1. Pressiona **menu** 3: **Dados**, 2: **Captura de dados**, 1: **Captura Automática de dados**. Substitui *var* por *a*, digitando **A**. Se a máquina perguntar se *a* é uma variável (como neste caso) ou se é o nome de uma coluna, selecciona a opção **Referência de variável** e pressiona \mathcal{E} .

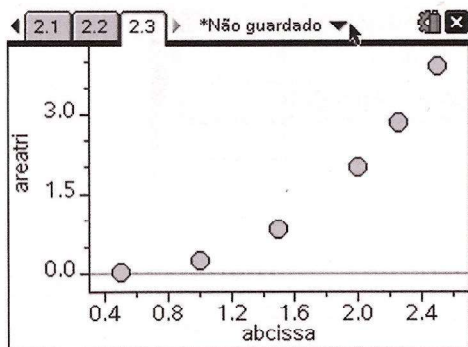


Figura 13

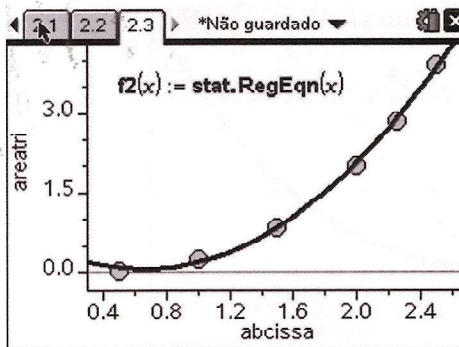


Figura 15

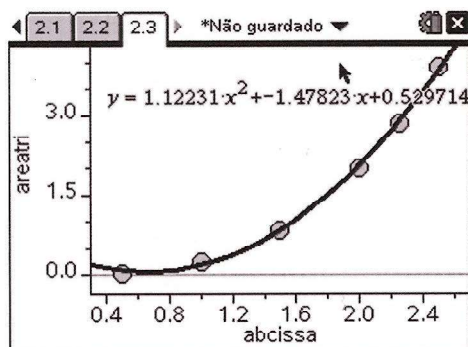


Figura 14

A	B	C
abscissa	areatri	
=capture('a,1)	=capture('area,1)	
1	2.25	2.84766 2.88537
2	0.5	0.03125 0.071174
3	1	0.25 0.173788
4	1.5	0.84375 0.837555
5	2	2 2.06247

Figura 16

Repete este procedimento na coluna B, mas substituindo agora *var* por *area*.

Repara que já foram capturados os valores correspondentes à abscissa do ponto e à área do triângulo actualmente existentes (figura 12).

E) Recolha de dados

Faz **ctrl** + **←** para voltar à página do gráfico.

Desloca o cursor para cima da abscissa do ponto de tangência. Quando aparecer a mão (com a indicação *Ligado=a*) faz **enter** duas vezes, apaga o valor da abscissa com **ctrl** + **del**, escreve 0,5 e faz **enter** (figura 10).

Repete este processo várias vezes para obteres novos valores da abscissa espaçados de 0,5 e até 3 ou 4.

Faz **ctrl** + **→** para voltar à página da folha de cálculo e verifica que a recolha de dados foi efectuada.

F) Nuvem de pontos

Olhando simplesmente para os dados, não é fácil ver a relação entre as duas variáveis. Vamos por isso fazer uma nuvem de pontos.

Faz **ctrl** + **doc** (+page) 5: *Adicionar Dados e estatística* para acrescentar a nova página (estando a usar o teclado antigo, fazer **ctrl** + **4**: *Inserir 7: Dados e Estatística*).

Desloca o cursor para baixo do eixo horizontal e quando aparecer a mensagem «*clicar para adicionar variável*» faz **enter**. Aparece a lista das variáveis existentes. Escolhe *abscissa* e faz **enter** (figura 13).

Repete o processo deslocando o cursor para a esquerda do eixo vertical e escolhe a variável *areatri*.

6) Procura da correlação

Os pontos do gráfico obtido parecem estar sobre uma parábola. Vamos por isso pedir uma correlação quadrática. Pressionamos **menu** 4: *Analisar*, 6: *Regressão*, 4: *Mostrar Quadrática*.

A função obtida parece adaptar-se bem à nuvem de pontos (figura 14). Mas será mesmo esta a relação procurada? É o que vamos verificar.

Pressionamos **menu** 4: *Analisar*, 4: *Traçar função*. Aparece uma caixa com $f2(x) =$. Teclamos **var** e abre-se uma caixa, onde seleccionamos a equação da regressão (*stat.regeqn*) (figura 15). Acrescentamos (x) e fazemos **enter**. Criámos assim em $f2$ a função de regressão obtida.

Com **ctrl** + **←** passamos para a folha de cálculo e na célula C1 escrevemos $=f2(a1)$ **enter**. Deslocamos o cursor para C1 e pressionamos **ctrl** + **menu** 2: *Copiar*.

Pomos o cursor em C2, pressionamos **↓** até o contorno da célula aparecer a tracejado grosso e vamos carregando em **↓** até à célula de C correspondente à última linha preenchida na coluna A. Fazemos **enter**, as células seleccionadas ficam a cinzento e depois **ctrl** + **menu** 3: *Colar*. Comparamos os valores das colunas B e C e verificamos que não são iguais (figura 16).

Conclusão: a correlação procurada não é uma quadrática. Aliás, se tivéssemos olhado com atenção para o gráfico, víamos que a curva não passava na origem.

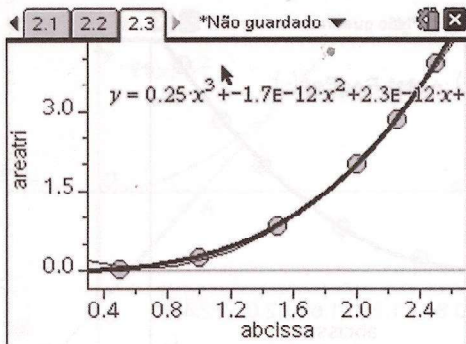


Figura 17

A	B	C
abscissa	areatri	
=capture('a,1)	=capture(area,1)	
1	2.25	2.84766
2	0.5	0.03125
3	1	0.25
4	1.5	0.84375
5	2	2

Figura 18

Investiguemos então se se trata de uma cúbica.

Com **ctrl** ► **N** passamos ao gráfico estatístico e, pressionando **menu** 4:Analisar, 6:Regressão, 5:Mostrar Cúbica, pedimos a regressão cúbica. Deslocando com o cursor a expressão da função de correlação, reparamos que todos os coeficientes, excepto o de 3º grau, são praticamente nulos. O gráfico parece ajustar-se perfeitamente à nuvem de pontos. Confirmemos (figura 17).

Passamos para a página anterior com **ctrl** ◀ **R**. A máquina actualizou automaticamente a função *f2* e portanto a coluna C tem agora os valores obtidos a partir da nova função de correlação (se os valores não se tiverem actualizado, fazer **menu** 1:Acções, 5:Recalcular).

Verificamos assim que os valores das colunas B e C são idênticos (figura 18).

Conclusão: área = 0,25 a³.

Demonstração

Está descoberta a relação entre as duas variáveis. Temos «quase a certeza» que é aquela. Mas não nos sentimos satisfeitos se não a provarmos. O processo é muito parecido com o do problema anterior.

O declive da tangente no ponto genérico P(a, a²) é f'(a) = 2a.

A equação da tangente é y = 2ax - a².

As coordenadas dos pontos são A(0, a/2) e B(-a², 0).

A área do triângulo é

$$\frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times a^2 = \frac{a^3}{4}$$

Prolongamentos

E se a função fosse f(x) = 2x²?

Basta ir à máquina e substituir a expressão de f1. Depois, ir à página de dados e apagá-los: seleccionar cada coluna (deslocando o cursor até ao cima) e fazer **menu** 3:Dados, 4: Apagar dados. A seguir, ir ao gráfico, escolher novamente diversos valores para a abscissa de P e... continuar.

E se a função fosse f(x) = 3x²?

E se a função fosse f(x) = kx²?

Nota: Estas duas actividades fazem parte do curso *Investigações Matemáticas com a TI-Nspire*, do grupo de trabalho T³, da APM.

José Paulo Viana
Escola Secundária de Vergílio Ferreira (Lisboa)