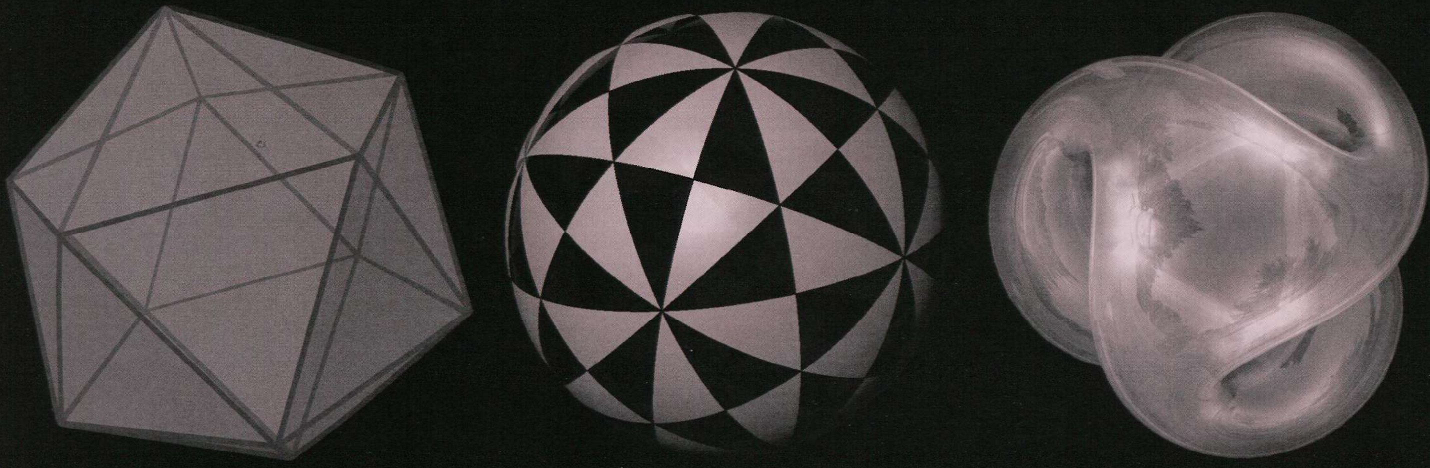

A emancipação da Álgebra relativamente à Geometria

Aspectos da evolução da Matemática

Manuel Joaquim Saraiva
Alina Reis

Introdução

Neste artigo começa por apresentar-se uma perspectiva sobre a natureza da Matemática, centrada nas ideias de Bento de Jesus Caraça, encarando-a como uma actividade humana. Seguidamente apresenta-se o exemplo da *libertação* da Álgebra relativamente à Geometria, realçando o papel fundamental que tiveram, quer a criação dos símbolos matemáticos, quer o seu uso. Por fim, tecem-se alguns comentários finais.

A Matemática como uma construção humana

Para o homem civilizado de hoje, e segundo Caraça (1998), o número natural é um ser puramente aritmético, desligado das coisas reais e independente delas — é uma pura conquista do seu pensamento. Com esta atitude, o homem de hoje, esquecido da humilde origem histórica do número, e elevando-se (ou julgando elevar-se) acima da realidade imediata, concentra-se nas suas possibilidades de pensamento e procura tirar delas o maior rendimento. O homem tem tendência a generalizar e a estender o seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências. Caraça tem uma intencionalidade clara em realçar a contextualização do conhecimento matemático, nomeadamente quanto à sua génese. É neste sentido que faz a seguinte referência à sucessão dos números naturais:

> O homem de hoje, afastado da origem histórica do número, pensará que naquela sucessão se passa dum número para o seguinte juntando-lhe uma unidade; por meio desta operação mental elementar — juntar uma unidade — passa-se do 1 para o 2, do 2 para o 3 e vai-se tão longe quanto se quiser; se se der um número n, por maior que seja, pode-se sempre efectuar sobre ele a mesma operação mental e obter um número maior, $n + 1$, logo, não há um número inteiro maior do que todos os outros. (p. 10)

Desta forma, pouco importa que o homem de hoje a certa altura esteja já a construir, com a sua operação mental elementar, números tão grandes que não consiga encontrar colecções cujos elementos sejam contados por esses mesmos números — ele tira a ideia dos primeiros números e da operação elementar de passagem de um ao seguinte e depois vai tirar todas as consequências dessa ideia e dessa operação. O seu pensamento aceita a possibilidade de repetição ilimitada do acto mental (a base do conceito de infinito) — juntar uma unidade — o que, para Caraça, exige o abandono de certas evidências da vida de todos os dias.

Trata-se da defesa de que toda a teoria matemática é uma construção progressiva feita à custa de conceitos — os seres de que trata a teoria — e de afirmações feitas sobre esses conceitos. Segundo Caraça, tal construção é dominada por, entre outros, «um princípio geral de compatibilidade lógica dos seres e das afirmações, princípio esse que é, na Matemática, a expressão de um outro mais geral que domina toda a construção científica — o princípio do acordo da razão consigo própria» (p. 50). No desenvolvimento da Matemática encontramos a cada passo, conjugados, estes dois motivos de progredir, dois gumes da mesma arma — actividade racional e actividade experimental; teoria e experiência; pensamento e acção. Ou seja, «há a necessidade de caminhar, *tacteando*, entre o que a intuição nos *dá* a partir da realidade e o que a razão nos *permite* com os instrumentos que forja» (p. 196).

A teoria das séries é, para Caraça, um bom exemplo da criação de conceitos, independentemente da sua ordenação lógica, onde, «para a necessidade de obtenção de resultados se criam instrumentos precisos e a preocupação de rigor e de ordenação surgem posteriormente» (p. 262) — é assim que a ciência se faz e é por isso que ela nos apresenta tantos momentos de verdade e erro, numa convivência paredes-meias dos triunfos mais luminosos com os fracassos mais retumbantes. Caraça afirma, ainda, que:

> Verdade e erro não podem tomar-se em absoluto, mas têm significado apenas quando apostos contra o seu contexto. De época para época, este varia e varia consequentemente o significado da verdade e do erro. Aquilo que hoje arrepiaria qualquer estudantezinho de Matemáticas Gerais duma Universidade foi outrora ouro de lei para os melhores matemáticos; nisso só vejo uma prova do carácter histórico e não absoluto da verdade; uma prova de que a Ciência é feita pelos homens para os homens, sujeitos a todas as suas limitações. (p. 262)

Concordantes com esta perspectiva, Davis & Hersh (1995) afirmam que se recuarmos no tempo, aquilo que hoje é considerado um objecto matemático simples, como um círculo, poderá outrora ter transportado o impacto psicológico de toda uma estrutura e ter até exercido influência sobre a metodologia científica (por exemplo, na astronomia). Estes autores recorrem ao exemplo do conceito de função, onde procuram realçar a contextualização do conhecimento matemático [Para Dirichlet, uma função $y(x)$ é determinada se tivermos qualquer regra que dê um valor definido y para qualquer x num determinado conjunto de pontos — não é necessário que y tenha a mesma regra em relação a x em todo o intervalo; na verdade, nem é necessário que possa representar-se essa relação em termos de operações matemáticas; não interessa se pensamos nela (correspondência) de modo que partes diferentes sejam dadas por leis diferentes ou se ela (correspondência) não respeita nenhuma lei específica; se uma função é especificada em apenas uma parte de um intervalo, o modo como se define o seu prolongamento ao resto do intervalo é inteiramente arbitrário]. Para Davis & Hersh, com a definição dada por Dirichlet, a Análise ultrapassa, e muito, a Geometria. Enquanto o conceito restrito de função, utilizado no século XVIII, não era adequado para descrever algumas curvas facilmente desenháveis, o conceito de função arbitrária do século XIX inclui criaturas impossíveis de desenhar ou visualizar.

Há, assim, e para aqueles autores, uma perspectiva clara de que aquilo que se produz, se pratica e se cria em cada dado momento é parte de uma corrente de consciência que progride com o tempo. Para Davis & Hersh (1995) o que ia na cabeça de Arquimedes era diferente do que ia na cabeça de Newton e isto, por sua vez, era diferente do que ia na de Gauss. Não é uma questão de «mais», de Gauss saber mais do que Newton, que, por sua vez, sabia mais do que Arquimedes. É fundamentalmente uma questão de «diferente». O estado actual do conhecimento tece uma rede de motivações e aspirações diferentes, de interpretações e potencialidades diferentes. Esta é, também, a perspectiva de Ernest (1991), para quem a Matemática duma dada época não só é condicionada pelos respectivos parâmetros sociais, culturais e económicos, como segue um processo de validação essencialmente social.

Do ponto de vista do utilizador, é possível, e às vezes até é conveniente, identificar a Matemática com a sua apresentação axiomática encontrada nos livros de estudo. Porém, e para Davis & Hersh (1995), do ponto de vista do produtor, a apresentação axiomática é secundária; é apenas um aperfeiçoamento que é construído depois de o trabalho principal — o processo de descoberta matemática — ter sido completado.

Estes autores baseiam-se nas ideias de Lakatos (1976), que aplicou a sua análise epistemológica não à Matemática Formalizada mas à Matemática Informal, ao processo de desenvolvimento e descoberta que, evidentemente, é a Matemática conhecida dos matemáticos e estudantes de Matemática. Na realidade, a Matemática formalizada, à qual a maior parte da filosofia recente é dedicada, é praticamente impossível de encontrar onde quer que procuremos, fora dos textos e revistas de lógica simbólica (Hersh & Davis, 1995).

A Matemática Informal é, para Lakatos, uma ciência na definição de Popper, que se desenvolve por um processo sucessivo de crítica e aperfeiçoamento das teorias e pelo avanço de novas teorias em competição (e não pelo modelo dedutivo da Matemática Formal). Aquele autor procura mostrar que a Matemática Informal, quase empírica, não se desenvolve através do crescimento monótono do número de teoremas inquestionáveis estabelecidos, mas através do melhoramento incessante de palpites por especulação e crítica, através da lógica das demonstrações e refutações. É neste sentido que Davis & Hersh (1995) afirmam que existem dois factos conhecidos acerca da natureza da Matemática. O primeiro é o de que a Matemática é uma invenção humana — os matemáticos sabem-no, porque são eles que a inventam. O segundo relaciona-se com as coisas que os matemáticos trazem ao mundo (figuras geométricas; funções aritméticas e operadores algébricos; ...) serem misteriosas para os seus criadores — têm propriedades que os matemáticos descobrem através de um grande esforço e engenho; têm outras propriedades que os matemáticos tentam descobrir em vão; têm outras propriedades ainda de que os matemáticos nem suspeitam.

Assim, podem tomar-se como ponto de partida, e a partir da experiência matemática, que a Matemática: i) é uma criação nossa; é acerca de ideias nas nossas mentes; e ii) é uma realidade objectiva, no sentido em que os objectos matemáticos têm propriedades bem definidas, que podemos ou não conseguir descobrir. Desta forma, a Matemática é uma realidade objectiva, que não é física nem subjectiva. É uma realidade ideal (ou seja, não física) que é objectiva (independente da consciência de qualquer pessoa em particular). A Matemática não é o estudo de uma realidade ideal, preexistente e intemporal, nem é um jogo, tipo xadrez, com símbolos e fórmulas inventadas. A Matemática é a parte dos estudos humanos que é capaz de alcançar um consenso, como o da ciência, que é capaz de estabelecer resultados reprodutíveis; a existência da Matemática é um facto, não uma questão; este facto não é nem mais nem menos do que a existência de modos de raciocínio e argumentos acerca de ideias, que são aliciantes e conclusivas, que «não são controversas uma vez compreendidas».

Para Davis & Hersh, a Matemática debruça-se, assim, sobre um determinado assunto e as suas afirmações têm significado. No entanto, este significado deve ser encontrado no conhecimento partilhado pelos seres humanos, e não numa realidade externa, não humana. Neste aspecto, a Matemática trabalha com significados humanos e é inteligível apenas no contexto da cultura — a Matemática é um estudo humanístico; é uma das humanidades. O que distingue a Matemática das outras humanidades é a sua qualidade de ser como uma ciência. As suas conclusões são bem definidas, tal como as conclusões da ciência natural. Não são simples produtos de opinião e não estão sujeitas a um desacordo permanente como as ideias de um crítico literário.

Como matemáticos, Davis & Hersh sabem que inventam objectos ideais e tentam, depois, descobrir factos acerca deles. Aceitam a Matemática tal como ela é: falível, corrigível e com significado. Os autores deste texto concordam com esta perspectiva. A Matemática é uma actividade humana, sendo a sua descrição lógicoformal apenas uma ficção; a verdadeira Matemática é encontrada na prática dos matemáticos.

Da Geometria à Álgebra

O termo «álgebra» deriva da designação do tratado de Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780–850), denominado por Hibab Al-jabr w'al muqabalah (Struik, 1992). Tal tratado tornou-se conhecido no Ocidente através de traduções latinas e fez com que a palavra Al-jabr se tornasse sinónima de toda a ciência da «álgebra», que, de facto, até meados do século XIX, não era mais do que a ciência das equações.

Nogueira, J., Nápoles, S., Monteiro, A., Rodrigues, J. & Carreira, M. (2004) enfatizam o facto de neste tratado de al-Khwarizmi terem sido resolvidos seis tipos de equações polinomiais, $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$ e $bx + c = ax^2$. Na realidade é surpreendente a quantidade de casos estudados por al-Khwarizmi, visto que, nos dias de hoje, aqueles seis casos resumem-se apenas a dois: a equação linear e a equação polinomial de segundo grau. Nogueira *et al* justificam o estudo de tantos casos com o facto de os Árabes, nesse período, não aceitarem nem o zero nem os números negativos. Para eles, e até ao século VI d.C., o conceito de zero não existia — era apenas um indicador de posição nos vários sistemas de numeração adoptados pelos Babilónios, Greco-romanos e Indianos. É apenas a partir do século XV que o uso de zero se generalizou no Ocidente. Em relação aos números negativos, até ao século XIX, foram vários os matemáticos que os rejeitaram: Michael Stifel (1487–1567) refere-se aos números negativos como sendo *disparates desprovidos de sentido*, designando-os por números fictícios; Descartes (1556–1650) designa-os por números falsos; Lazare Carnot (1753–1823) ignora-os e Busset (francês do século XIX) considera-os como sendo *raiz da aberração do raciocínio humano*. O pensamento que inquietava a comunidade matemática, em relação aos números negativos, é descrito em Nogueira *et al.* da seguinte forma:

> Para obter uma quantidade negativa isolada seria necessário cortar uma quantidade concreta ao zero, retirar algo do nada: isso é uma operação impossível. Assim sendo, como é possível conceber uma quantidade negativa isolada? (p. 30)

Foram necessários séculos de desenvolvimento para que alguns conceitos fossem aceites pela comunidade matemática. Ou seja, al-Khwarizmi, ao não aceitar nem o zero nem os números negativos, encontra-se enquadrado com os seus contemporâneos e com muitos dos seus sucessores — é um matemático do século IX. Além destes conceitos, al-Khwarizmi também rejeitou o uso de uma simbologia — embora já existente na altura mas não na forma como a usamos hoje. Criada por Diofanto, a primeira simbologia passou pela contínua utilização de abreviaturas. Em Nogueira *et al* é referido que Diofanto desenvolveu uma notação simbólica, excessivamente avançada para a época, e por isso pouco consentânea com a mentalidade reinante, ainda dominada pela Geometria de Euclides. Ele seria (re)descoberto no século XV, quando os matemáticos se aperceberam das vantagens do uso das abreviaturas $co.(cosa = x)$, $ce.(census = x^2)$ e $cu.(cubo = x^3)$ nas equações.

Para Struik (1992), o tratado Al-jabr possui uma discussão sobre equações lineares e quadráticas sem qualquer formalismo algébrico e onde muito do raciocínio é geométrico. O facto de al-Khwarizmi não ter usado qualquer sim-

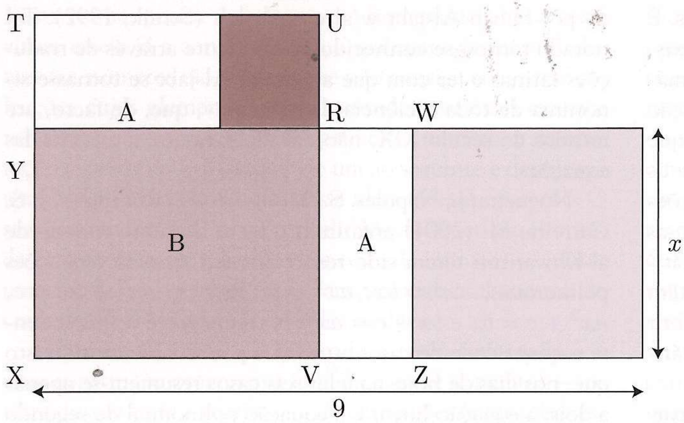

Figura 1. Resolução geométrica para determinar uma das raízes da equação polinomial do 2º grau $x^2+20=9x$.

bologia no seu tratado está de acordo com a forma como os matemáticos encaravam a resolução de questões matemáticas. Como é referido em Nogueira *et al*, al-Khwarizmi defendia que um problema não podia ser considerado solucionado enquanto não se demonstrasse que a resposta encontrada era válida, sendo tal objectivo realizado geometricamente, seguindo a tradição euclidiana: é necessário demonstrar geometricamente a verdade dos mesmos problemas que foram explicados por números.

Nesta época havia uma grande *submissão* da Matemática à Geometria. Tudo indica que era através dela que se validavam os resultados matemáticos obtidos: se não se conseguisse explicar geometricamente, os resultados não eram considerados.

Até ao século XIX, a Geometria Euclidiana era a área do conhecimento mais firme e de maior confiança. Ao assentar em cinco axiomas, era considerada como sendo o estudo das propriedades do espaço. Estas propriedades tinham uma existência absoluta e independente, eram objectivas e eram o exemplo supremo de propriedades do universo que eram exactas, eternas e que podiam ser conhecidas com toda a certeza pela mente humana. É neste sentido que se fala no mito de Euclides presente até ao século XIX: a convicção de que os livros de Euclides contêm a verdade acerca do universo, que são claros e indubitáveis, e apresentam uma linguagem e um raciocínio essencialmente geométricos. Por exemplo, a expressão $\sqrt{A}$ era introduzida como sendo o lado de um quadrado de área A e o produto ab como sendo a área de um rectângulo de lados a e b. Desta forma, matemáticos como al-Khwarizmi tinham um raciocínio fortemente geométrico. Por exemplo, os árabes do século IX seguiam o método de complementar quadrados para a resolução de equações polinomiais do segundo grau. Em Nogueira *et al*, com o recurso a alguma linguagem simbólica dos dias de hoje, é ilustrado o raciocínio destes matemáticos através da resolução de um caso particular:

A equação $x^2 + 20 = 9x$ possui de forma imediata duas raízes reais positivas: a soma de duas quantidades positivas tem de ser igual a uma quantidade positiva. A primeira construção geométrica, para a determinação de uma das raízes da equação considerada, corresponde à figura 1. Os autores começam por referir que a raiz terá de ser menor que nove unidades pois se $x \geq 9$ então $x^2 \geq 9x$, pelo que $x^2 + 20 = 9x$ não poderia ter uma raiz positiva (p. 136)

Como $x^2 + 20 = 9x$, o rectângulo de vértices XYWZ tem área igual a 20. Decomponha-se este rectângulo em dois rectângulos A e B de forma que o rectângulo B tenha de lados x e $9/2$. Coloque-se em cima do rectângulo B um rectângulo igual a A depois de o rodar 90°. Como A tem lados x e $9/2 - x$, a medida do segmento YT é igual a $9/2 - x$ e XTUV é um quadrado de lado $9/2$ e, portanto, com área igual a $81/4$. Então a área do rectângulo tracejado obliquamente é igual a $81/4 - 20 = 1/4$. Como a medida do segmento RU também igual a $1/2$, então $9/2 - x = 1/2$ e, finalmente, $x = 9/2 - 1/2 = 4$.

Como determinar a outra raiz? É perfeitamente legítimo dizer que o raciocínio anterior leva a concluir que $(9/2 - x)^2$ e $1/4$ são iguais à área do quadrado tracejado obliquamente, pelo que $9/2 - x = \pm 1/2$, e assim, $x = 4$ ou $x = 5$.

Porém, é devido ao uso de uma notação e ao considerarem-se números negativos que foi possível a determinação das duas raízes, apenas com a construção da figura 1. Davis & Hersh referem que a representação simbólica de ideias matemáticas tem sempre como consequência a alteração dessas ideias; um ganho em precisão e um prejuízo em fidelidade ou em aplicabilidade à situação inicial.

Desta forma, a não utilização de uma notação, a não-aceitação do zero e dos números negativos e ainda o facto de os resultados terem de ser confirmados geometricamente, conduz a que seja necessária a construção de uma figura diferente — Figura 2 — para a determinação da segunda raiz da equação $x^2 + 20 = 9x$, ou seja, $x = 5$. Para a sua construção, Nogueira *et al.* começam por considerar que:

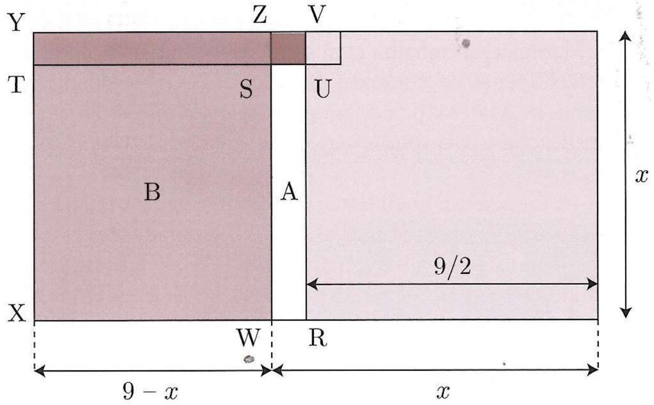

Figura 2. Resolução geométrica para determinar a outra raiz da equação polinomial do 2º grau $x^2+20=9x$.

A equação admite uma raiz maior do que 9/2 e constroem novamente um rectângulo com lados iguais a 9 e x, decompondo-o em três partes (um quadrado de lado x e os rectângulos A e B). Colocam um rectângulo igual a A adjacente a um dos lados maiores do rectângulo inicial, como se ilustra na Figura 2. Como $x^2 + 20 = 9x$, o rectângulo B (com vértices XYZW) tem área igual a 20.

Observe-se que o comprimento do segmento XT é igual a 9/2. Como os segmentos TU e UR têm o mesmo comprimento, os rectângulos de vértices YTUV e SURW têm a mesma área. Então a área do quadrado de vértices TURX é igual à área do rectângulo B mais a área do quadrado de vértices ZVUS. Finalmente a área deste último é igual a $81/4 - 20$, pelo que a medida do segmento ZS é igual a $1/2$, tendo-se $x - 9/2 = 1/2$ e, assim, $x = 5$.

Em Nogueira *et al.* são apresentados mais dois exemplos concretos da resolução de equações polinomiais do segundo grau através do método de completar quadrados. O objectivo dos autores é o de ilustrar que, para cada equação é necessário recorrer a figuras diferentes e que a inexistência de uma simbologia apropriada era o principal obstáculo para o desenvolvimento de uma maior aptidão na resolução de questões matemáticas. Isto é, era a falta de símbolos que não permitia a ultrapassagem das dificuldades algébricas existentes. De facto, a criação e o uso sistemático de uma simbologia aparecem associados à *emancipação* da Álgebra relativamente à Geometria.

O primeiro matemático que procurou *libertar* a Álgebra da influência da Geometria foi Abu-Kamil ibs Aslam (830–930), um dos sucessores e contemporâneo de al-Khwarizmi. Segundo Nogueira *et al*, Abu-Kamil foi o autor de Hitab fi al-jabr wa´lmuqabala, um livro dividido em três partes, baseado tão de perto nos escritos de al-Khwarizmi que chega ao ponto de, nos seus 69 exemplos numéricos, incorporar quase metade dos que haviam sido referidos por este último, apenas com alterações de pormenor. Mas não se infira daqui que os textos de Abu-Kamil foram uma cópia dos de al-Khwarizmi; na realidade, ao afastar-se da herança do seu predecessor, Abu-Kamil procurou libertar os seus exemplos da influência da Geometria.

Poucos anos após Abu-Kamil surge Al-Karaji (953–1019) que, para Nogueira *et al.* aparece como sendo o matemático que *emancipou* a Álgebra da sua herança geométrica e fomentou a prática das actuais operações aritméticas. De facto, segundo estes autores, Al-Karaji foi o primeiro matemático a referir a incógnita x e a definir o produto das potências de x (e dos seus inversos) de uma maneira recursiva.

Nogueira *et al.* referem também o papel de Cardano (1501–1557) no processo de resolução de equações cúbicas e que este, ao longo do seu livro, não seguiu uma linha bem definida, hesitando entre a Geometria e a Álgebra — sempre que possível, Cardano opta pelo estudo geométrico dos problemas, seguindo a tradição da velha escola euclidiana; no entanto, dá-se conta que o estudo algébrico, mais abstracto, funciona bem em muitas situações: a resolução da equação quártica é disso um exemplo, assim como outras em que os números negativos e as suas raízes quadradas desempenham papel de relevo.

Assim, no processo de *emancipação* da Álgebra encontram-se matemáticos que parecem divididos quanto ao papel e à importância dos resultados puramente algébricos. Nogueira *et al.* afirmam que Cardano ao não conseguir traduzir em termos geométricos a resolução de uma questão matemática, remata escrevendo que é assim que evolui a subtileza aritmética, obtendo-se no final resultados que parecem ser tão refinados como inúteis. Por sua vez, aqueles autores afirmam que Rafael Bombelli (1526–1573) foi o último dos matemáticos italianos renascentistas que ao salientar com clareza a existência de problemas que não requerem (ou muitas vezes nem sequer possibilitam) tradução geométrica, proporcionou um desenvolvimento sem precedentes na Matemática, passando a ser enfatizado, cada vez mais, o raciocínio dedutivo e a encararem-se os números como uma ferramenta de cálculo.

O trabalho de Descartes (1596–1650) no desenvolvimento da Álgebra formal, e para Boyer (1996), é muito importante — num ponto essencial ele rompeu com a tradição grega, pois em vez de considerar x^2 e x^3, por exemplo, como área e volume, ele interpretou-os como segmentos.

Desta forma, a Álgebra desenvolveu-se ao longo do tempo e à medida que os matemáticos partiram na natural descoberta de propriedades sobre os objectos ideais — que foram tentando representá-los por símbolos — os quais são enfatizados por Struik, quando se lhes dirige destacando que novos resultados foram muitas vezes possíveis, devido somente a um novo modo de escrever. Como exemplo de tudo isto, Davis & Hersh referem o facto de no século XIX a notação leibnistziana, para as derivadas, ter permitido o desenvolvimento da Álgebra abstracta. Para eles, a notação leibnistziana Df, D^2f apresenta um número inteiro como indicação da ordem das diferentes diferenciações, o que sugere a possibilidade de uma interpretação útil de $D^\alpha f$ para assumir valores negativos ou fraccionais α (o que não se passava com a notação newtoniana para as derivadas, $\dot{f}$, $\ddot{f}$, etc.). Todo o cálculo operacional procede desta extensão.

Inicialmente a Álgebra foi sinónimo de «ciência das equações» e, segundo Struik, ao contrário da Geometria, até meados do século XIX, revelou a sua origem oriental pela ausência de um fundamento axiomático — facto este que ilustra a secundariedade axiomática na construção matemática. Porém, segundo Boyer, embora tenha sido no século XIX que se dá o processo gradual de generalização na Álgebra, é apenas no século XX que foi desenvolvida toda a teoria dos anéis que caracteriza a designada Álgebra moderna.

Assim, e posteriormente à resolução de problemas cujo conteúdo e soluções envolviam questões com significado geométrico, a Matemática foi evoluindo gradualmente e foi alcançando um patamar mais abstracto onde os símbolos matemáticos ganharam o seu relevo e significado. De difícil representação no papel, ganhou importância a linguagem simbólica que a Matemática envolve e, com ela, o desenvolvimento de uma nova área: Álgebra.

Conclusão

A Matemática trabalha com significados humanos e é inteligível apenas no contexto da cultura. As necessidades internas da Matemática criam pressões para que se procurem explicações, pois somos curiosos e queremos compreender as coisas.

A Geometria Euclidiana, ao não conseguir explicar certos factos, *viu* desenvolver a Álgebra. Criaram-se novos seres matemáticos, novos sinais e símbolos, e foi possível ir dando resposta a questões em aberto às quais a Geometria não conseguia responder, bem como, ao surgimento de novas questões. A todos os símbolos e a todas as relações entre objectos algébricos criados são dados significados. Há um avanço no conhecimento e na capacidade de explicar situações até aí inexplicáveis.

O *limite* do pensamento matemático é o *infinito*.

Bibliografia

Boyer, C. (1996). *História da Matemática*. Brasil: Editora Edgard Blucher Ltda.

Caraça, B. (1998). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Davis, P. & Hersh R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Nogueira, J., Nápoles, S., Monteiro, A., Rodrigues, J. & Carreira, M. (2004). *Contar e fazer contas — Uma introdução à Teoria dos Números*. Lisboa: Gradiva.

Struik, D. (1992). *História concisa das matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Manuel Joaquim Saraiva
Departamento de Matemática da UBI e CIEFCUL

Alina Reis
Escola E. B. nº 2 de Elvas