«Em Matemática não entendemos coisas ... Habituamo-nos a elas!»

António M. Fernandes

Propositum

O título deste artigo traduz o pensamento de John von Neumann (brilhante matemático e físico) e foi, aliás, tema da secção «Pense Nisto» da revista *Educação e Matemática*, no seu número 101. Trata-se evidentemente de algo difícil de aceitar. John von Neumann não foi simplesmente um matemático dos mais importantes. Para além disso, reflectiu activamente sobre os fundamentos da matemática e, contribuiu de forma significativa para o seu estudo. Esse facto, por si só deveria fazer-nos encarar aquela afirmação de modo sério.

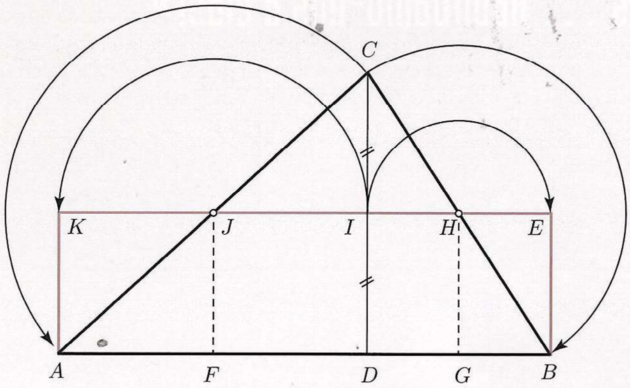

Figura 1.(a)

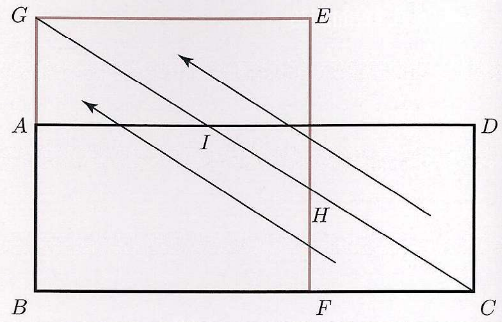

Figura 1.(b)

Vivem-se tempos nos quais a atitude analítica merece pouco mais que desprezo e, fascinada pelo poderio informático que entretanto alcançou, a Humanidade segue simulando em detrimento de seguir pensando.

Em ocasiões como estas, mais que em quaisquer outras, a força de uma afirmação como a de von Neumann, joga claramente contra si mesma.

Mas, ainda que academicamente, existe possibilidade de von Neumann estar certo e, nesse caso, não sendo possível uma compreensão absoluta do «universo matemático» é importante conhecer entre que limites essa compreensão ocorre e em que grau.

Esta é uma tarefa não apenas da Filosofia da Matemática, mas também da Filosofia da Educação Matemática. Sim, da Filosofia, ... não confundir com «burocracia».

Deixarei este empreendimento para aqueles que possuem a competência necessária, ocupando-me aqui, exclusivamente, de expor factos que, em minha opinião, fornecem alguma evidência favorável à correcção da afirmação de que von Neumann está certo.

Vere

Não possuindo os meios necessários ao cálculo generalizado de áreas, os gregos desenvolveram um processo engenhoso que lhes permitia comparar áreas sem proceder ao seu cálculo explícito. Esta era precisamente a grande virtude deste sistema: permitir falar de áreas iguais, maiores ou menores, na ausência de uma noção geral de «área».

O conceito fundamental envolvido no processo a que nos referimos é modernamente designado de *congruência por dissecção*. Duas «figuras» planas F_1 e F_2 são congruentes por dissecção se é possível decompor uma delas num número finito de «sub-figuras» e rearranjá-las de modo a obter a outra. Embora se trate de uma ideia conceptualmente rica, adivinha-se que a sua aplicabilidade prática se limitasse aos casos em que se encontrassem envolvidas «figuras simples».

Restrinjamo-nos então ao caso particular dos polígonos, aproveitando para definir mais rigorosamente esta noção de *congruência por dissecção*. Dois polígonos P_1 e P_2 dizem-se congruentes por dissecção (escreve-se $P_1 \sim P_2$) se for possível decompor um dos polígonos num número finito de «peças» poligonais de modo que, transformando cada uma dessas peças por meio de isometrias é possível obter o segundo polígono. Uma vez que as isometrias preservam as áreas das figuras poligonais, resulta daqui que, se $P_1 \sim P_2$ então P_1 e P_2 têm a mesma área.

A questão que se levanta é então: poderemos tomar esta noção de congruência por dissecção como uma «definição» de «possuir a mesma área»? A resposta a esta questão não seria dada pelos gregos.

No caso dos polígonos a resposta é afirmativa. O resultado conhecido, como *Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien*, foi estabelecido no início do Séc. XIX: *dois polígonos são equivalentes por dissecção se e só se têm a mesma área.*

Este facto pode ser estabelecido de forma surpreendentemente simples e elementar. Começamos por observar que, se é possível decompor um polígono P_1 em «sub-polígonos» e rearranjá-los para obter um polígono P_2, o inverso é também possível (basta considerar as isometrias inversas para obter P_1 a partir de P_2). Como consequência deste facto reconhece-se que, se dois polígonos são conguentes por dissecção com um terceiro então, são congruentes por dissecção entre si. Importa ainda observar que, para cada área dada, existe (a menos de uma isometria) um único quadrado com essa área. Assim, constatamos que, para estabelecer o resultado de Wallace-Bolyai-Gerwien basta estabelecer que cada polígono é congruente por dissecção com um quadrado com a mesma área. Finalmente, como cada polígono é triangulável (ou seja, pode ser decomposto num número finito de triângulos) basta-nos mostrar que cada triângulo é congrunte por dissecção com um quadrado da mesma área e que, podemos sempre rearranjar um número finito de quadrados num único quadrado cuja área é a soma das áreas dos quadrados originais.

A figura 1.(a) ilustra como um triângulo ABC é congruente por dissecção com um rectângulo $ABEK$. Observe-se que os triângulos AJF e JIC são congruentes (eles são semelhantes pois têm os três ângulos iguais e, além disso, o comprimento do lado IC de um dos triângulo é igual ao comprimento do lado FJ do outro). Assim, $AFJK$ é um rectângulo. De modo análogo se pode demonstrar que $GBEH$ é um rectângulo. Uma vez que $ABEK$ se obtém do triâgulo original rodando duas peças triangulares, o triângulo inicial e o rectângulo final têm a mesma área.

Se atentarmos agora na figura 1.(b), ela ilustra o modo como um rectângulo é congruente por dissecção com um quadrado. Considerando o rectângulo inicial $ABCD$ com $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$, desenha-se o quadrado $BFEG$ com lado de comprimento $\sqrt{ab}$. É claro que o quadrado tem a mesma área do rectângulo, restando-nos mostrar que o quadrado se pode obter do rectângulo por disecção. Basta demonstrar que os triângulos AIG e FCH são congruentes, o mesmo se passando com os triângulos ICD e GHE. Consideramos o primeiro par, uma vez que as considerações para o segundo são do mesmo tipo. Temos que:

$$\frac{\overline{HF}}{\overline{FC}} = \frac{a + \overline{AG}}{b}$$

Atendendo a que $\overline{FC} = b - \sqrt{ab}$ obtém-se, depois de substituir na igualdade anterior e depois de eliminar denominadores, a seguinte igualdade:

$$b(\overline{HF} - \overline{AG}) = ab - \sqrt{ab}(a + \overline{AG}) = 0$$

porque $a + \overline{AG} = \sqrt{ab}$. Daqui resulta imediatamente que $\overline{HF} = \overline{AG}$. Como os triângulos AIG e FCH são claramente semelhantes, da igualdade anterior podemos concluir que são congruentes, como se pretendia.

[De facto, a construção anterior requer que no rectângulo de partida, o respectivo comprimento não exceda quatro vezes a largura (porquê?). Mas, dado um rectângulo arbitrário, ele é sempre congruente por dissecção com um outro satisfazendo esta condição (como?).]

Finalmente, resta-nos mostrar que tendo obtido um número finito de quadrados, os podemos reagrupar num único quadrado usando apenas isometrias. Uma vez que o processo pode ser iterado, no essencial, temos apenas que mostrar como é que isso pode ser feito no caso de dois quadrados. O método é adaptado de uma das inúmeras demonstrações do teorema de Pitágoras. Considere-se a figura 1.(c) onde se exibe esquematicamente uma demonstração do Teorema de Pitágoras que utiliza, precisamente, o método de dissecção. Deixam-se os detalhes ao cuidado do leitor.

Uma questão que naturalmente surge na nossa mente é a seguinte: pode tudo isto generalizar-se ao caso tridimensional (adaptando, evidentemente, a noção de «congruência por dissecção» de modo a que as «peças» nas quais se divide um dos poliedros sejam agora elas próprias poliedros)?

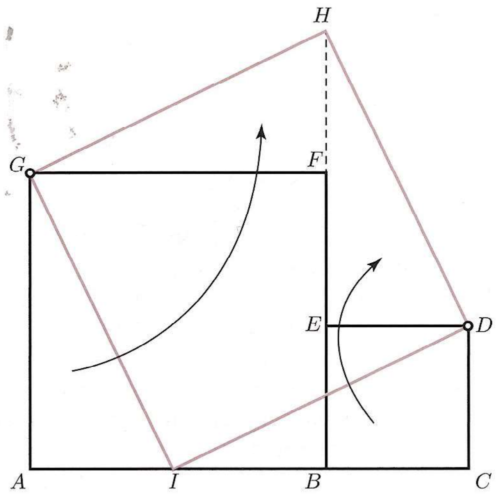

Figura 1.(c)

Ou seja, será verdade que considerando poliedros em vez de polígonos, se tem que dois quaisquer poliedros com igual volume são congruentes por dissecção?

Aparentemente nada obsta a uma tal possibilidade. A priori, não existem diferenças entre as noções de «polígono» e de «poliedro» nem entre «plano» e «espaço» que o pareçam justificar.

O problema atraiu David Hilbert que incluiu, na sua famosa Lista de Problemas, a questão de saber se um tetraedro é congruente por dissecção com um cubo de igual volume (terceiro problema de Hilbert).

Surpreendentemente, a resposta ao terceiro problema de Hilbert é negativa. A resposta foi dada, ainda em 1900, por Dehn que demonstrou a impossibilidade de um tetraedro e um cubo serem congruentes por dissecção. À semelhança das demonstrações de impossibilidade de resolução de certos problemas clássicos usando régua e compasso, obtidas como um sub-produto das investigações de Abel e Galois no domínio da álgebra, a demonstração de Dehn constitui um testemunho adicional deste tipo de interacção envolvendo álgebra e geometria.

Daremos uma ideia geral da demonstração mas, começaremos com algumas considerações preliminares. Se $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ é um conjunto finito de números reais, denotamos por $V(A)$ o conjunto de todas as somas $q_1x_1 + \cdots + q_nx_n$, em que os números $q_1, \ldots, q_n$ são todos racionais. Uma função $f : V(A) \to \mathbb{R}$ é *aditiva* se satisfaz as duas condições seguintes:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para quaisquer $x, y \in V(A)$;
2. $f(qx) = qf(x)$ para quaisquer $q \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R}$.

Em cada poliedro, cada aresta resulta da intersecção de duas faces, por sua vez incluídas em planos bem determinados, esses planos determinam um ângulo que se designa de *ângulo diedral* do poliedro na aresta referida.

Considerando agora um poliedro P, suponhamos que A é um conjunto de números reais que inclui os ângulos diedrais de P que são, digamos, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, bem como o número π. Se $f: V(A) \to \mathbb{R}$ é uma função aditiva verificando $f(\pi)=0$ então, o invariante de Dehn de P em f, denota-se por $\delta_f(P)$ e é o número, $\delta_f(P) = l_1 f(\alpha_1) + \cdots + l_k f(\alpha_k)$, onde cada l_i é o comprimento da aresta correspondente ao ângulo α_i. (Existe uma forma de definir este invariante mais «universalmente», evitando a referência às diferentes funções aditivas f como acima. Isso passaria por considerar o invariante como um elemento do *produto tensorial* de certos espaços vectoriais. Este é, contudo, o género de detalhe que tentaremos evitar aqui.)

O teorema de Dehn-Hadwiger estabelece então que, dados dois poliedros P e Q, se A é um conjunto de números reais contendo os ângulos diedrais de P e Q, assim como o número π e se, $f: V(A) \to \mathbb{R}$ é uma função aditiva que satisfaz $f(\pi)=0$ de tal modo que os invariantes de Dehn $\delta_f(P)$ e $\delta_f(Q)$ são diferentes então, P e Q não são congruentes por dissecção.

A demonstração deste resultado usa de forma essencial uma característica fundamental dos invariantes de Dehn designadamente, se P se pode decompor num número finito de poliedros $P = P_1 + P_2 + \cdots + P_k$ então $\delta_f(P) = \delta_f(P_1) + \cdots + \delta_f(P_k)$. Por outro lado, as isometrias do espaço não alteram os invariantes de Dehn, sendo por isso fácil concluir que no caso de se ter $\delta_f(P) \neq \delta_f(Q)$ não se pode ter $P \sim Q$.

Podemos agora verificar que se T e C são, respectivamente um tetraedro regular e um cubo, com o mesmo volume então, podemos definir uma função aditiva f para a qual se tem $\delta_f(T) \neq \delta_f(Q)$.

Os ângulos diedrais do cubo são todos iguais a $\pi/2$ enquanto que os ângulos diedrais de um tetraedro regular são todos de $\alpha = \arccos(1/3) \approx 70.53°$.

Consideremos então $A = \{\alpha, \pi/2, \pi\}$. Observe-se que $V(A) = v(\{\alpha, \pi\})$ uma vez que $V(A) = V(\{\alpha, \pi\})$

$$q_1\alpha + q_2(\pi/2) + q_3\pi = q_1\alpha + (q_2/2 + q_3)\pi$$

sendo $q_2/2 + q_3$ um número racional. Tendo isto em conta, definimos a função $f: V(A) \to \mathbb{R}$ através de $f(q_1\alpha + q_2\pi) = q_1$. (Pode mostrar-se que esta função está bem definida e é aditiva.) Sem perda de generalidade vamos imaginar que a aresta do cubo C mede uma unidade e vamos denotar por l o comprimento das arestas do tetraedro que tem também volume igual a uma unidade. Calculemos os invariantes de Dehn para C e T nesta função f que acabámos de definir. Tem-se que

$$\delta_f(C) = 12 \times f(\pi/2) = 12 \times \frac{1}{2} f(\pi) = 0.$$

No que diz respeito ao tetraedro temos:

$$\delta_f(T) = 6l f(\alpha) = 6l \neq 0.$$

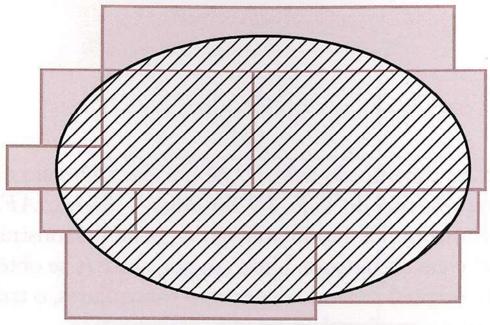

Figura 2. A área colorida representa o erro cometido

Aplicando directamente o teorema de Dehn-Hadwiger concluímos que um tetraedro e um cubo de volume igual não são congruentes por dissecção.

A título de curiosidade refira-se que o teorema de Dehn-Hadwiger tem uma versão forte, o denominado teorema de Dehn-Sydler que estabelece essencialmente que a igualdade dos invariantes de Dehn de dois poliedros de igual volume é uma condição necessária e suficiente para que sejam congruentes por dissecção.

De qualquer forma não deixa de ser surpreendente que uma noção que parecia tão próxima de caracterizar a ideia de «área», no caso do plano, possa falhar idêntico propósito no caso do espaço, de forma tão estrondosa.

A matemática actual é fundada num domínio conhecido como teoria de conjuntos. Este processo que temos discutido ao longo do artigo, em que se encontram envolvidos processos de decomposição de certos conjuntos particulares do plano ou do espaço, pode ser generalizado.

Uma dessas possibilidades passa por não ser tão restritivo nas «peças» que intervêm na decomposição. Dois conjuntos (arbitrários) de pontos do espaço, A e B dizem-se equidecomponíveis se A e B são reuniões de conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ e $B_1, \ldots, B_n$, respectivamente, onde os $A_1, \ldots, A_n$ são disjuntos dois-a-dois, o mesmo sucedendo com os $B_1, \ldots, B_n$ e para cada $i = 1, \ldots, n$ existe uma isometria do espaço G_i tal que $B_i = G(A_i)$ ou seja, B_i é a transformada de A_i pela isometria G_i).

Usando esta nova noção o terceiro problema de Hilbert passa a ter uma solução positiva. De facto, um tetraedro e um cubo de igual volume são equidecomponíveis. Mas não devemos «cantar vitória» demasiado cedo. Afinal, esta generalização tem também ela consequências imprevistas que se traduzem no enunciado da denominada *forma forte do paradoxo de Banach-Tarski* — Se A e B são dois conjuntos limitados de pontos do espaço, com interior não vazio (este é o caso de quaisquer poliedros) então A e B são equidecomponíveis.

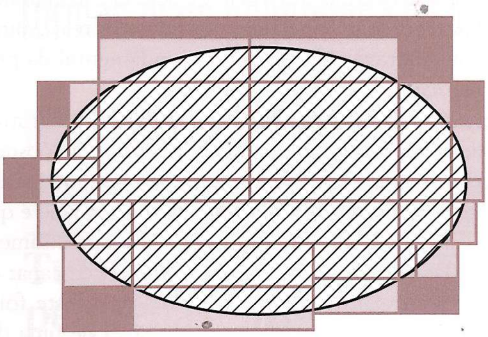

Figura 3. Após refinar a cobertura e eliminando os rectângulos coloridos com a cor mais escura, o erro cometido é menor

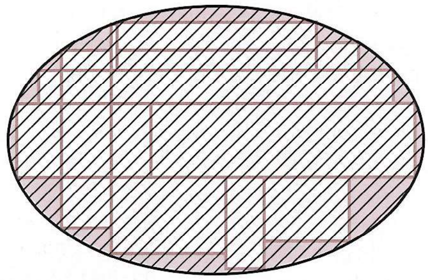

Figura 4. Aproximação por «defeito»

A consequência deste resultado é tudo menos intuitiva: *podemos decompor um berlinde num número finito de peças e, usando apenas isometrias, rearranjar essas peças de modo a obter uma esfera do tamanho do Sol.*

O resultado anterior requer, de modo essencial, a utilização do denominado axioma da escolha na respectiva demonstração. Trata-se da asserção segundo a qual dada uma família $\mathcal{X}$ de conjuntos não vazios, existe uma função (dita «de escolha») com domínio a família $\mathcal{X}$ e tal que para cada $X \in \mathcal{X}$ se tem $f(x)$ é um elemento de X (por isso se diz que f «escolhe» um elemento de cada $X \in \mathcal{X}$).

O axioma da escolha afirma algo que generaliza uma situação evidente no caso finito e, a priori é difícil antever consequências tão contra-intuitivas como aquelas anteriormente observadas, designadamente a impossibilidade de obter uma noção geral de medida que, estenda naturalmente os casos conhecidos envolvendo comprimentos, áreas e volumes. Por outro lado as vantagens que decorrem deste axioma no que diz respeito ao modo como «organiza» o universo de conjuntos são de tal ordem, que prescindir deste axioma não parece ser, actualmente, uma verdadeira opção.

O que vimos aqui é que uma abordagem à noção de medida, usando uma perspectiva geométrica ou mesmo uma sua variação conjuntista não são possíveis em geral, ou quando a generalidade parece ser suficiente, a caracterização encontrada parece ser totalmente insatisfatória.

Mesmo outro tipo de generalizações, sendo úteis, não deixam de desafiar a nossa compreensão. Uma delas é a denominada *medidade Lebesgue*. Ilustraremos a construção no caso do plano. (As necessárias adaptações para o caso da recta real ou do espaço são evidentes.) Considerando um conjunto arbitrário (limitado) de pontos do plano A, diremos que uma família $\mathcal{C}$ de rectângulos é uma cobertura de A se os rectângulos em $\mathcal{C}$ só se intersectam, eventualmente, nas suas fronteiras e, a união de todos os rectângulos em $\mathcal{C}$ contém o conjunto A (figura 2).

Se $\mathcal{C}$ é finito, a soma das áreas dos seus elementos fornece imediatamente uma aproximação (por execesso) daquilo que intuitivamente identificamos como a «área de A» e que denotamos por $m(\mathcal{C})$. No caso em que $\mathcal{C}$ contém infinitos rectângulos podemos ainda assim definir o valor $m(\mathcal{C})$ como sendo o *supremo* do conjunto,

$$\{m(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \subset \mathcal{C} \text{ e } \mathcal{F} \text{ é finito}\}.$$

(O *supremo* de um conjunto X é o menor valor a que satisfaz $x \leq a$ para qualquer $x \in X$.)

Deste modo, e em qualquer caso, $m(\mathcal{C})$ é uma estimativa por execesso do que entendemos como sendo a «área de A».

Se $m(\mathcal{C})$ é uma estimativa por excessso, e é realmente excessiva, então subdividindo os rectângulos em $\mathcal{C}$ e eliminando os novos rectângulos que não contêm pontos de A, obtemos uma nova cobertura de A, que denominamos $\mathcal{C}'$ para a qual se tem $m(\mathcal{C}') < m(\mathcal{C})$, ou seja, para a qual o erro cometido na avaliação da área é menor (figura 3).

Estas considerações sugerem que se considere definir como a medida exterior de A, o menor valor (em rigor o ínfimo) entre os $m(\mathcal{C})$ onde $\mathcal{C}$ varia entre todas as possíveis coberturas de A. Pode mostrar-se que esse valor existe sempre. Denotamo-lo por $\mu^*(A)$.

Claro está, que aproximar a área de A, por defeito, considerando famílias de rectângulos cuja união está contida em A (ao invés de conter A [figura 4]) origina uma construção igualmente natural (desta vez devendo nós escolher o maior [em rigor o supremo] dos valores $m(\mathcal{E})$, onde $\mathcal{E}$ varia entre estas novas famílias de rectângulos). Esse valor existe sempre e iremos designá-lo de *medida interior* de A, denotando-o por $\mu_*(A)$.

Como se disse, ambas as aproximações à área de A parecem naturais, pelo menos, nenhuma é mais natural que a outra. De facto, parece até muito razoável esperar que $\mu^*(A) = \mu_*(A)$.

Todas estas considerações se adaptam de modo imediato à recta real (substituindo o papel dos rectângulos pelo dos intervalos). Neste contexto, denotamos por $\mathfrak{M}(\mu)$ a família de todos os $X \subset \mathbb{R}$ para os quais se tem $\mu^*(X) = \mu_*(X)$. Se $X \in \mathfrak{M}(\mu)$ dizemos que X é *mensurável* e, em lugar de escrevermos $\mu^*(X)$ ou $\mu_*(X)$ escrevemos simplesmente $\mu(X)$, que se denomina a *medida de X*.

Permitirá esta construção fornecer uma medida para qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$? A sua naturalidade, elegância e até simetria, sugerem que sim. Ao próprio Lebesgue não passaria pela cabeça que assim não fosse. Só isso justifica a sua reacção extremamente negativa quando, em 1905, Giuseppi Vitali estabeleceu a existência de conjuntos que não são mensuráveis. Lebesgue falou então da natureza intrinsecamente contraditória do axioma da escolha (uma vez que este axioma tem um papel decisivo na demonstração de Vitali).

Conclusio

A verdade é que Lebesgue estava errado, não existindo nada de particularmente contraditório no axioma da escolha. (Gödel demonstraria três décadas mais tarde a consistência do axioma da escolha relativamente aos restantes axiomas da teoria de conjuntos.) No que diz respeito à noção de medida, não há nela nada que impeça uma total generalização a todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$. Foi demonstrado por Solovay, que na ausência do axioma da escolha é consistente admitir que todos os conjuntos de reais são mensuráveis.

O que há aqui de estranho, se assim se pode dizer, é que não é possível generalizar estes dois tipos de noção em simultâneo, por mais naturais que essas generalizações possam parecer.

Assim, um entendimento pleno, num sentido quase metafísico, destes conceitos, ou pelo menos do modo como interagem, parece difícil de alcançar.

Outros exemplos poderiam ser acrescentados, talvez o mais notável seja a extraordinária incapacidade da matemática para descrever as propriedades dos números reais, afinal de contas, de descrever uma estrutura fundamental da própria Matemática.

Ao contrário da estrutura dos números reais, a estrutura da aritmética é razoavelmente bem conhecida. Não obstante a noção de número ter nascido com a própria matemática (certamente numa concepção rudimentar) a verdade é que só milénios passados, um outro Giuseppe, mais precisamente Giuseppe Peano, isolou um sistema axiomático capaz de caracterizar essa estrutura de modo satisfatório. Este foi o tempo que demorou o entendimento razoável de uma das mais simples estruturas matemáticas.

A Matemática não é um empreendimento terminado. Mas não é o facto de ainda existirem teoremas por estabelecer que dificulta essencialmente o seu entendimento. Precisamente porque muitos aspectos não podem ser decididos, a Matemática terá que permanentemente incorporar novos e poderosos axiomas que estabeleçam essas decisões. Neste ponto a convicção será de pouco valor. Esta não é necessariamente uma fraqueza já que, parafraseando Nietzsche: «As convicções são inimigas mais perigosas da verdade do que as mentiras.»

António M. Fernandes
Dep. Matemática
IST