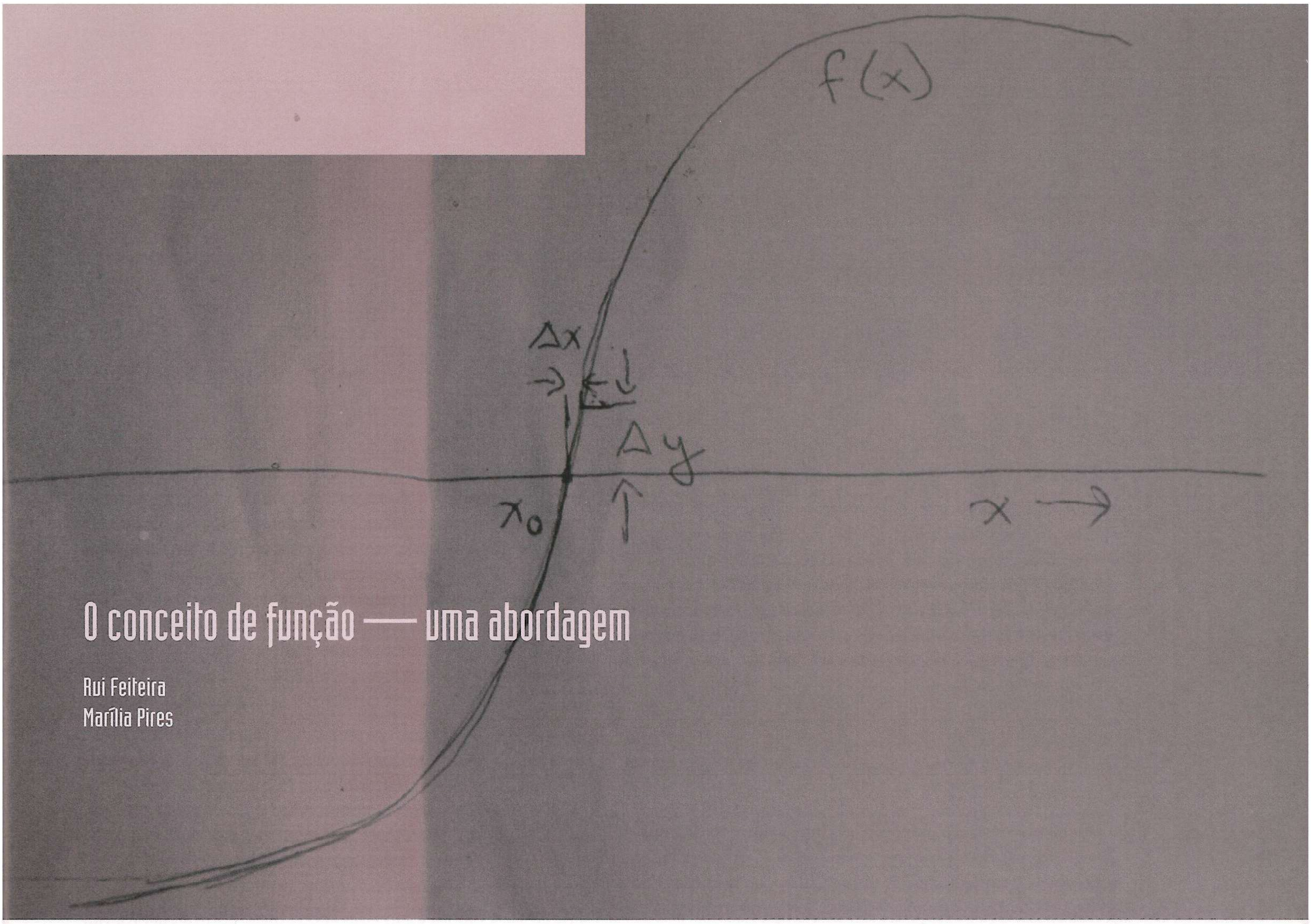

O conceito de função — uma abordagem

Rui Feiteira
Marília Pires

Introdução

O conceito de função é, talvez, um dos mais importantes com que os alunos têm de lidar no 3.º Ciclo do Ensino Básico. Sendo um conceito fácil de concretizar, é no entanto, um dos poucos conceitos abstractos com que os alunos se irão deparar neste nível de ensino. No novo programa, que já está a ser implementado em algumas zonas do país, pode ler-se que:

> «função é estudada essencialmente como relação entre variáveis embora também seja apresentada como correspondência unívoca entre elementos de dois conjuntos. São fundamentais as várias representações (algébrica, gráfica e tabular) de uma função na interpretação e resolução de problemas e na modelação de situações.» (DGDIC, 2007, p. 62)

Sendo este um conceito estruturante para qualquer aluno que queira prosseguir estudos no ensino secundário e/ou no superior, é necessário que o conceito seja introduzido de tal modo que seja completa e correctamente interiorizado pelos alunos. Neste artigo damos conta da nossa experiência levada a cabo em duas turmas do 8.º ano de escolaridade, recorrendo, de um forma muito informal, à teoria de grafos, como ferramenta auxiliar (Feiteira e Pires, 2007), com o fim de levar os alunos ao conceito de função através de um exemplo lúdico. Postas as referidas duas turmas perante a mesma questão inicial, quantos jogos se realizam num torneio com n equipas, pretendíamos analisar quais as estratégias escolhidas por cada turma e qual o grau de autonomia que as turmas e/ou os alunos individualmente demonstrariam. A nossa questão principal era verificar até que ponto os alunos, através deste exemplo seriam capazes de, naturalmente, chegarem ao conceito de função, ou se, pelo contrário, teriam que ser guiados até ele.

As turmas

As duas turmas em que o estudo se realizou, que a partir daqui se designarão por turma 1 e 2, são bastante diferentes quer em número de elementos, quer em aproveitamento escolar. A turma 1 tem cerca de 20 alunos, é uma turma bastante homogénea e solidária cuja composição se mantém praticamente inalterável desde o 6.º ano de escolaridade, tendo um aproveitamento médio satisfatório. Por seu turno, a turma 2 é constituída por 28 alunos sendo de composição muito heterogénea, uma vez que se integraram 11 novos alunos na turma desde o início do ano lectivo, dos quais 8 estão a repetir o 8.º ano de escolaridade. O aproveitamento da turma 2 é significativamente inferior ao da turma 1.

Ambas as turmas beneficiam da continuidade pedagógica em relação ao ano lectivo anterior.

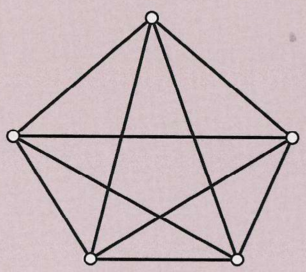

Figura 1

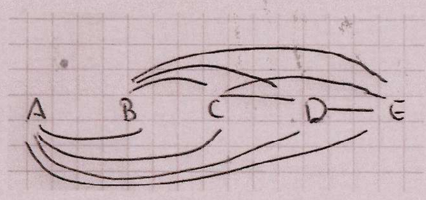

Figura 2

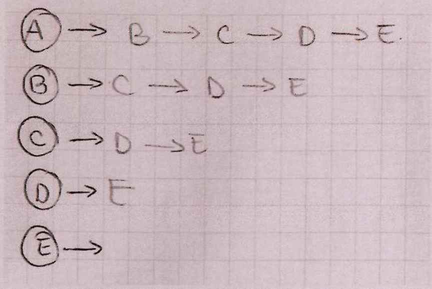

Figura 3

O problema

Sendo ambas as turmas maioritariamente constituídas por alunos do sexo masculino, um tópico que gera entusiasmo é o futebol. Exemplos baseados no mundo futebolístico provocam sempre uma elevada adesão ao trabalho da maioria dos alunos. Tentando tirar partido desta realidade, propusemos, no início das aulas dedicadas ao estabelecimento do conceito de função, o seguinte problema:

Uma associação de estudantes de uma escola pretende organizar um campeonato de futebol. Cada equipa joga apenas uma vez com cada uma das outras equipas. Quantos jogos se irão realizar, no total, se se inscreverem 5 equipas? (adaptado de Pires e Kravchenko, 2007).

Começamos com um exemplo em que o número de equipas é pequeno para permitir que a maioria dos alunos se mantenha motivado na procura de uma solução. Com efeito, como neste problema, o número de jogos aumenta de uma forma bastante rápida à medida que o número de equipas aumenta, um número maior de equipas poderia levar à desmotivação dos alunos por serem incapazes de fazer os cálculos.

A resposta a este problema aparece naturalmente modelando a situação através de um grafo completo e da aplicação do Lema dos apertos de mão. Ora os alunos não conhecem sequer o conceito de grafo, pelo que não seria de esperar que seguissem esse caminho.

A figura 1 é uma representação do grafo que modela a situação descrita no problema proposto, em que se representam as equipas por vértices e os jogos entre equipas por arestas. Como cada equipa joga com todas as outras apenas uma vez, em cada vértice incidem 4 arestas, correspondentes aos quatro jogos que cada equipa faz. Em linguagem de grafos diríamos que todos os vértices têm grau 4.

Esta propriedade pode desempenhar um papel importante na determinação do número de jogos. Para descobrir esse número podemos contar directamente no grafo o número de arestas ou, como há 5 vértices de grau 4 e quando se somam os graus temos cada aresta contabilizada duas vezes, basta fazer $(5 \times 4)/2 = 10$ jogos.

É de salientar que o grafo que modela esta situação pode modelar muitas outras, como por exemplo, o número de abraços que dão 5 amigos ou o número de telefonemas que estes fazem entre si.

Voltando ao problema proposto, verifica-se que estamos perante uma relação unívoca entre duas variáveis: número de equipas e número de jogos a realizar. O objectivo principal da introdução deste problema como seria de esperar, é que os alunos concluam que a relação entre o número de equipas e o número de jogos é unívoca sendo, portanto, uma função e, a partir daí, explorar as diferentes formas de representar uma função (diagrama sagital e tabela), o objectivo secundário é o de introduzir e distinguir convenientemente a noção de variável dependente e independente.

Turma 1

Quando apresentámos o problema nesta turma fez-se um enorme e constrangedor silêncio. De repente um dos alunos, que nem é dos melhores, exclamou: *Já sei 20 jogos!*

De seguida, outros números foram sendo lançados, 25, 12, 10...10, 10. Antes que a situação se descontrolasse, escolhemos dois alunos para explicarem o seu raciocínio à turma. Acompanhemos os diálogos:

Aluno 1: A minha equipa não pode jogar contra ela própria, faz 4 jogos. Com as outras dá 20. $5 \times 4 = 20$.

Aluna 2: Não, não é assim.

A aluna desenhou a figura 2 no quadro da sala.

Professor: O que representam as linhas e as letras?

Aluna 2: As letras são as equipas. As linhas quer dizer que [aponta para o quadro] este joga com este.

Professor: Como é que sabes quantos jogos se irão realizar?

Aluna 2: Conto. [aponta para as linhas que acabara de desenhar]

Uma outra aluna pede para intervir e apresenta o seguinte esquema de contagem (figura 3)

Aluna 3: Agora conto. $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ jogos [a aluna exemplificou no quadro como devia contar o número de jogos].

Ambas as alunas chegaram à mesma conclusão usando processos de contagem diferentes. A primeira aluna, sem disso ter consciência, modelou a situação através de um grafo, o que lhe facilitou a contagem do número de jogos. A segunda aluna utilizou uma técnica de contagem bastante semelhante à que se usa em probabilidades ao nível do 12.º ano de escolaridade. O aluno 1 não desarmou e continuava a afirmar que a resposta dele deveria estar certa, mas perante as evidências aceitou a resposta das colegas embora não

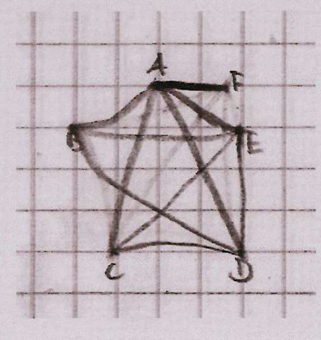

Figura 4

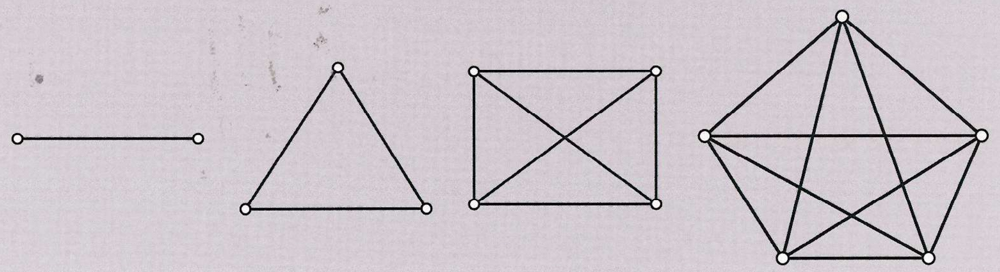

Figura 5

percebendo porque não chegava ao resultado certo. Nesta altura pedimos ao aluno para não desesperar e, antes de lhe explicarmos porque a sua resposta estava errada alterámos os dados do problema: E se forem 6 equipas a inscreverem-se? Ou 8 equipas?

Novamente um pouco de silêncio. A turma divide-se no processo de resolução, uns quantos alunos seguem o esquema da aluna 2, outros o esquema da aluna 3. O mesmo aluno que apresentara o número 20 como solução volta a intervir: 30 jogos no primeiro caso e 42 jogos no segundo caso.

Aluno 4: «Tá» mal. São 15 jogos e 21 jogos. Fiz o desenho e dá 15 e 21.

Este aluno usou a mesma estratégia que a aluna 2 tinha usado no caso de 5 equipas (figura 4) embora tenha modificado a disposição espacial das equipas. Note-se que para facilitar a contagem de jogos o aluno usou cores diferentes para cada equipa. Quanto questionado sobre o porquê desta modificação disse que assim, desta forma, era mais fácil contar as linhas (jogos). Entretanto, o aluno 1, não desiste e volta à carga.

Aluno 1: É sempre metade do que disse. Assim é fácil. Multiplico e divido por 2... dá sempre certo.

Professor: Multiplicas o quê?

Aluno 1: Número de jogos vezes número de jogos menos um. 6 × 5 = 30. Metade de 30 dá 15. «Tá» certo.

De uma forma, não muito difícil, alguns elementos da turma chegaram à conclusão de qual seria o número de jogos, modelando a situação através de um grafo. Conseguiram inferir e generalizar o número de jogos para qualquer número de equipas, obtendo a expressão que dá o número de jogos para um número

$$\frac{n(n-1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Embora não tivéssemos formalizado e explicitado a expressão que nos fornece o número de jogos, o aluno 1 verbalizou-a de uma forma bastante aceitável para a faixa etária em questão. Interessava mostrar agora porque razão o aluno 1 falhou no início. Este aluno estava a considerar que A jogar com B e B jogar A eram jogos diferentes e, portanto, duplicou o número de jogos. Dito de outra forma, o aluno não percebeu que a relação «jogar com» é simétrica, o que fazia com que estivesse a contar duas vezes o mesmo jogo quando estes jogos são na realidade um só.

Turma 2

Como já esperávamos que nesta turma fosse mais difícil responder ao problema inicial reduzimos de 5 para 4 o número de equipas. O nosso intuito era facilitar o trabalho caso fosse necessário conduzir a turma para a solução. Inicialmente esta turma reagiu da mesma forma que a turma anterior. Uma chuva de números completamente díspares foram sendo atirados como resposta ao problema. Uma vez que os alunos não conseguiam determinar correctamente o número de jogos, nem pareciam motivados para parar e pensar, desenhámos os «esquemas» da figura 5 para facilitar a compreensão do problema.

Identificámos os pontos com o número de equipas e as linhas com o número de jogos. Neste ponto os alunos começaram a demonstrar alguma compreensão e encontraram sem grandes dificuldades o número de jogos para 2, 3, 4 ou 5 equipas. Ao lado colocámos uma tabela que resumia a situação anterior.

N.º equipas	2	3	4	5
N.º jogos	1	3	6	10

Convidámos então os alunos a descobrirem o número de jogos no caso de haver 6 equipas inscritas. A turma dividiu-se em dois resultados: 14 jogos ou 30 jogos. Intrigados com a origem do valor 14 pedimos ao grupo que tinha chegado a esse resultado que explicasse como o tinha obtido. Tratava-se de uma tentativa errada de encontrar uma regularidade na sequência. O valor 30 já era por nós esperado. Convidámos então os alunos que tinham obtido 30 jogos a testarem a sua ideia no caso de 5 equipas inscritas. Finalmente um dos alunos concluiu que o número de jogos era metade daquilo que tinham previsto, e que o mesmo se verificava em todos os casos considerados. Finalmente a turma tinha chegado aonde pretendíamos.

Nesta abordagem revelou-se fundamental começar com um número bastante pequeno de equipas inscritas para que os alunos entendessem realmente o cerne do problema, e, em seguida, ir aumentando gradualmente o número de equipas, para que assim lhes fosse mais fácil inferir uma expressão analítica para a resposta ao problema.

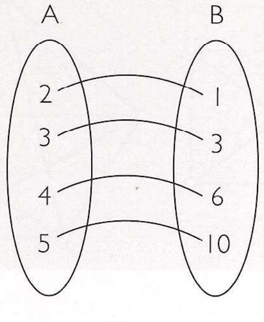

Figura 6

O conceito de função

Depois das 2 turmas terem chegado ao mesmo ponto introduzimos os conceitos de variável independente e dependente. Uma das vantagens nesta abordagem é que os alunos aceitam muito facilmente, confirmando empiricamente, que o número de jogos depende sempre do número de equipas inscritas, como mostra a última tabela. Uma vez aceite este facto, foi fácil verificar que para cada número de equipas existe um e um só número de jogos. Esta foi a altura ideal para definir formalmente o conceito de função, domínio, contradomínio, objecto e imagem de uma função, recorrendo sempre ao problema que tínhamos resolvido.

De seguida representámos a função sob a forma de um diagrama sagital, definindo A como conjunto partida e B como o conjunto chegada da relação, que neste caso, irá coincidir com o contradomínio da função (figura 6).

Enfatizámos ainda que o diagrama sagital e uma tabela são apenas diferentes formas de representar uma mesma função. Neste ponto, um dos alunos teve a seguinte afirmação curiosa:

Professor, isso é como ver as repetições de um [mesmo] golo com câmaras diferentes!

Algumas conclusões

Esta abordagem ao conceito de função ofereceu uma oportunidade aos alunos de criarem as suas próprias representações sobre o conceito de função, não ficando presos às representações do professor, embora na turma 2 o trabalho dos alunos tivesse que ser orientado nesse sentido. Na turma 1, deparámo-nos com uma diversidade de resoluções que não esperávamos encontrar. De salientar o facto curioso de na turma 1, os grafos terem sido uma das formas naturais de modelar a situação. Os grafos também surgiram, na turma 2, como facilitadores e intermediários na resolução do problema proposto, pese embora o facto de esta abordagem ter aparecido sob orientação do professor. Apesar da abordagem ter sido sugerida pelo professor, a turma reagiu bastante bem aos estímulos e continuou o trabalho a partir daí.

Abrimos aqui uns parênteses para lembrar a oportunidade de introduzir conceitos elementares de grafos nos conteúdos do 3° ciclo do ensino básico, como temos vindo a defender noutras oportunidades. De facto, embora sem formalizar os conceitos relacionados com teoria de grafos, esta pode fornecer estímulos para o desenvolvimento do trabalho dentro da sala de aula. Pode ainda permitir a modelação matemática de situações da vida real, sem que haja necessidade de proceder a simplificações que fazem com que a realidade se perca, dando origem a problemas que se podem resolver com o auxílio de algoritmos bastante intuitivos. A introdução de temas de teoria de grafos abriria a possibilidade de desenvolver aprendizagens realmente significativas — que é um dos pontos centrais do actual currículo do 3.° Ciclo — do ponto de vista dos alunos, uma vez que tem potencial para resolver problemas práticos e reais ligando a Matemática à experiência pessoal do aluno (Feiteira e Pires, 2007).

A forma como a turma 1 obteve a generalização do resultado para qualquer número de equipas também foi bastante interessante. Por via do diálogo entre os alunos e efectuando uma análise, não muito sofisticada, nem exaustiva, os alunos inferiram a expressão analítica que modela a questão.

Sendo o futebol uma temática que faz parte da vida dos alunos, teve um papel fundamental, como factor de motivação, para que os alunos se empenhassem na procura de uma solução.

Assim, vemos como um problema simples serviu de ponto de partida aos alunos, mais ou menos orientados pelo professor, para chegarem ao conceito de função como relação unívoca entre duas variáveis uma dependente (o número de jogos) e outra independente (o número de equipas), permitindo ainda apresentar as diferentes formas de representar uma função.

Referências bibliográficas

Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (2008). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Feiteira, R., Pires, M. (2007), Grafos para todos vs grafos para alguns, In *Actas do ProfMat 2007*, Angra do Heroísmo: APM [Suporte: CDRom]

Pires, M., Kravchenko, V., (2007), Reflexões sobre o ensino de Grafos, *Educação e Matemática*, n.° 93, pp.11–15, Lisboa: APM

Rui Feiteira
Agrupamento Vertical escolas Prof. José Buisel, Portimão
Marília Pires,
Departamento de Matemática,
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve