A escrita simbólica de uma generalização[1]

Magda Nunes Pereira
Manuel Joaquim Saraiva

Uma criança quando entra para a escola já leva consigo alguma experiência em generalizar e em abstrair a partir de casos particulares — o que é a essência da Álgebra. O expressar a generalidade é inteiramente natural, causa prazer e faz parte do «fazer sentido» do ser humano. Porém, a Álgebra também fornece uma linguagem simbólica dentro da qual se expressam as generalidades conjecturadas.

A aprendizagem da Álgebra envolve saber trabalhar com os símbolos, mas de forma significativa — um processo que não é fácil nem é linear. Recordem-se, por exemplo, as dificuldades reveladas por muitos alunos quando tentam dar sentido a uma expressão algébrica, ou a uma letra nessa expressão, ou quando atribuem significados concretos às letras, ao transitarem da linguagem natural para a algébrica, ou quando tentam escrever simbolicamente uma generalização.

O pensamento e a linguagem algébricos permitem ao aluno expressar-se matematicamente, comunicar as suas generalizações, e estabelecer conexões e formulações matemáticas. Ao professor de Matemática é confiada a missão de criar e adaptar tarefas variadas que promovam nos alunos a formulação de conjecturas, o estabelecimento de estratégias de resolução, a argumentação e a comunicação matemáticas, fazendo face a situações improvisadas. E, sob este ponto de vista, inserir na aula de Matemática tarefas que permitam aos alunos explorar e investigar pode facilitar o desenvolvimento de raciocínios e a aprendizagem de processos matemáticos, nomeadamente os algébricos.

Neste artigo apresentamos alguns resultados de um estudo efectuado com alunos do 7º ano de escolaridade, no uso das letras, quando investigam e resolvem tarefas matemáticas envolvendo generalizações[2]. Faremos uma análise das dificuldades que manifestaram e terminaremos com uma reflexão orientada para o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra relativa ao desenvolvimento da escrita simbólica de uma generalização.

Da aritmética à generalização simbólica

A experiência mostra que muitos alunos têm grandes dificuldades nos números e suas operações. Outros conseguem um nível de desempenho razoável neste campo, mas deparam-se depois com grandes dificuldades na resolução de problemas envolvendo equações e construção de generalizações simbólicas, onde a interpretação que é feita dos símbolos

O João marcou a sua festa de aniversário para sábado às 15 horas. Convidou um grupo de amigos, mas não sabemos quantos irão à festa. Sabemos que, quando os amigos se encontrarem, todos se cumprimentarão entre si.

a) O João, por ser o aniversariante, é o primeiro a chegar, portanto ainda não tem cumprimentos a fazer. Mas, passados alguns instantes chegam ao mesmo tempo, vindos de locais diferentes, dois amigos do João. Quantos cumprimentos há?

b) Passado algum tempo, chega o terceiro amigo do João à festa. Quantos cumprimentos vai ele fazer? E quantos cumprimentos já houve no total?

c) Passado algum tempo, chega mais um amigo à festa. Quantos cumprimentos vai ele fazer? E quantos cumprimentos já houve no total?

d) Imagina que houve no total 15 cumprimentos. Quantos amigos, afinal, foram à festa do João?

e) Consegues encontrar um processo que nos indique o número total de cumprimentos dependendo do número de amigos que foi à festa? Explica-o.

(*Tarefa proposta e discutida na aula de Matemática, 16/01/2008*).

Figura 1.

matemáticos é, muitas vezes, desprovida de sentido. Estas dificuldades devem-se, em grande parte, à mudança de significado dos símbolos dum contexto aritmético para um contexto algébrico (Usiskin, 1988), à (in)compreensão dos símbolos em expressões aritméticas e algébricas e ao respectivo estabelecimento de conexões entre eles (Schoenfeld, 2005). Um aluno ensinado para responder apenas a questões que impliquem a aplicação de um algoritmo, por exemplo, tem sérias dificuldades quando confrontado com questões que impliquem a compreensão e exploração de um conceito.

A Álgebra pode ser vista sob várias vertentes, tendo em conta o uso que se faz das letras, usualmente designadas por *variável:* símbolo da vida colectiva de um conjunto, que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros (Caraça, 1998). As letras são símbolos usados em vários contextos. Küchemann (1981) identifica várias interpretações distintas das letras numa expressão algébrica, das quais destacamos três: *letra como incógnita* — quando a letra assume um valor desconhecido que pode ser determinado, como ocorre com a incógnita x na equação $x + 5 = 7$; *letra como número generalizado* — quando a letra pode ser substituída por vários valores, como acontece a n na sucessão dos números naturais pares representada pelo termo geral $u_n = 2n$; e *letra como variável* — quando a letra representa um conjunto de valores, como, por exemplo, $A = \{1, 3, 5, 7\}$. Os símbolos permitem agrupar e compactar ideias, transformando-as em informação fácil de entender e manipular (Linchevski, & Sfard, 1991). Porém, a simbolização centrada na manipulação simbólica pode levar ao descurar a compreensão do conteúdo implícito nos símbolos (Davis & Hersh, 1995) e pode condicionar a sua aprendizagem. No processo de ensino e aprendizagem dos Números e da Álgebra devem estar contempladas, a par e de modo harmonioso, a linguagem matemática e a sua compreensão.

Para Rojano (2002), o processo de generalização de um padrão requer a passagem por quatro fases: 1ª) construção mental da regra geradora dos termos desse padrão — é um processo mental que ocorre, por exemplo, quando o aluno é capaz de obter qualquer termo de uma sequência sem ter necessidade de calcular consecutivamente todos os termos da sequência até chegar ao termo daquela ordem; 2ª) escrita da regra em linguagem corrente — é a obtenção da regra mental, com recurso à linguagem natural, ou numérica; 3ª) tradução da regra em simbologia algébrica — obtenção da fórmula que corresponde à generalização simbólica; e 4ª) manipulação da generalização — através do seu uso na resolução de problemas que envolvam a sequência em causa. Trata-se de um ciclo que deve ser visto de modo flexível, mas que contém os momentos principais que constituem um processo de generalização. As quatro fases cruzam-se e apresentam-se muito ligadas, podendo aparecer por outra ordem que não a indicada em cima. O importante é relevar a construção mental da regra geradora, a sua comunicação em linguagem natural e em simbologia algébrica e a sua manipulação.

Dificuldades dos alunos em generalizar

Consideremos, como exemplo, a seguinte situação proposta numa aula de Matemática do 7º ano de escolaridade, no início do estudo do tema Números e Cálculo[3] (figura 1).

Quando confrontados com a situação, os alunos estabeleceram uma correspondência entre cada dois amigos e, em seguida, contaram essas correspondências, no exemplo que se segue está representada a situação para cinco amigos, contando com o João (figura 2).

Seguidamente, os alunos construíram uma tabela, como a seguir se apresenta, o que lhes permitiu testar valores de

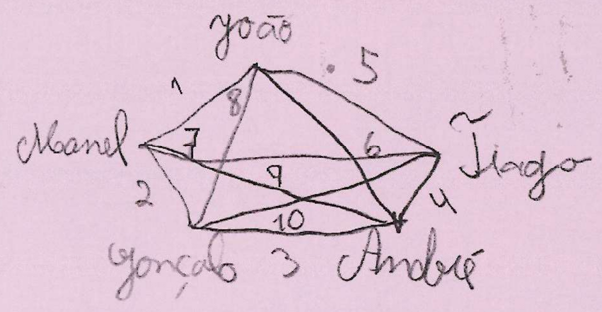

Figura 2. O esquema da tarefa O aniversário do João, do grupo 1

modo a construírem cada novo termo, recorrendo ao termo anterior — realçando aspectos numéricos, estratégicos e intuitivos, que promoveram a compreensão do processo de generalização da sequência em causa (figura 3).

Como forma de estender a tarefa, a professora propôs o estabelecimento da generalização sem uso recursivo, em relação à qual os alunos manifestaram algumas dificuldades. E, nesse caso, após a exploração da situação, para valores concretos de amigos, a professora sugeriu a construção de uma tabela onde se destacaram alguns valores, com circunferências, triângulos e quadrados a circundar valores específicos, como se apresenta na figura 4.

Para a exploração visual da tabela e consequente construção intuitiva da generalização da situação, a professora promoveu uma discussão como a seguinte:

Professora: O que é que acontece aos valores que estão no interior das circunferências? Podemos obter o *valor 1* da direita à custa dos valores da esquerda?

Manuel: Eu já descobri uma coisa, acho eu!

Professora: Diz lá, Manuel.

Manuel: 3×4 é 12. E $12 \div 2$ é 6. Acontece o mesmo para os valores que estão dentro dos triângulos. E para os outros valores também é igual.

Professora: Muito bem. E se tivermos um número muito grande de amigos, como é que podemos pensar?

Manuel: Da mesma maneira. Por exemplo se houver 1000 amigos. Para saber o número de cumprimentos é 999×1000. E depois dividimos por dois.

Professora: E se tivermos um número qualquer de amigos?

António: Então é esse número qualquer vezes o número antes desse e depois dividimos por dois.

(*Aula 16/01/2008*)

Com a ajuda da professora, os alunos generalizaram a situação até 1000 amigos e verbalizaram uma forma de calcular o número de cumprimentos. À questão da professora acerca do que acontece para um número muito grande de amigos, tão grande quanto queiramos que seja, o António respondeu que o processo era o mesmo, que se multiplicava o número pelo que estava antes dele e que depois se dividia por dois. Contudo, a maioria dos alunos não conseguiu sozinho escrever uma expressão para representar a generalização pedida.

João + amigos	Cumprimentos	
3	3	
4	6	+3
5	10	+4
6	15	+5
7	21	+6
8	28	+7
9	36	+8
10	45	+9
11	55	+10
12	66	+11
13	78	+12
14		+13
⋮	⋮	

Figura 3. A tabela da tarefa O aniversário do João, do grupo 2

nº de amigos com o João	nº de cumprimentos
1	0
2	1
$\boxed{3}$	3
$\boxed{4}$	$\boxed{6}$
5	10
6	15
7	21
...	...

Figura 4. Tabela com valores destacados pela professora, no quadro

$$
\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 3\\
1 \quad 3 \quad 5\\
1 \quad 3 \quad 5 \quad 7\\
1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9\\
1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11\\
\dots
\end{array}
$$

Figura 5. A torre de ímpares

8x8=64=1+3+5+7+9+11+13+15
9x9=81=1+3+5+7+9+11+13+15+17
10x10=100=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19
O número da linha do triângulo que dá 100 é o número 10

Figura 6. A resposta da Isa à tarefa A torre dos ímpares

Vamos semple multiplicando o númelo da linha.
Por exemplo se quiser saber o resultado da linha 18 só tenho que
fazer 18x18=324.

Figura 7. A resposta da Rosa à tarefa A torre dos ímpares

A generalização ocorreu a partir da seguinte discussão:

Professora: Como é que raciocinámos para 1000 amigos? Podemos raciocinar da mesma maneira para n amigos!

(...)

Rosa: Eu acho que já sei. É n vezes o número que está antes que é $n-1$.

Professora: Então usando a letra n o que é que resulta desse raciocínio?

Rosa: Com n amigos temos de fazer na mesma

$$(n-1)\times n \div 2.$$

Professora (registando no quadro): Muito bem. Então se forem n amigos à festa vai haver

$$\frac{(n-1)\times n}{2} \text{ cumprimentos.}$$

Nelson: Professora, faça lá no quadro com 11 amigos, por exemplo, para ver como é?

Professora: Então se forem 11 amigos à festa, vamos aplicar a expressão com n e obtemos

$$\frac{(11-1)\times 11}{2} = \frac{10\times 11}{2} = \frac{110}{2} = 55 \text{ cumprimentos.}$$

António: Pois! E funciona! Vou experimentar para muitos amigos!

(*Aula 16/01/2008*)

Torna-se evidente a dificuldade dos alunos na generalização para um número muito grande de amigos e na construção de uma expressão simbólica que a traduza.

Na sexta aula deste tema, os alunos já conseguiram generalizar com mais facilidade mas continuaram a evidenciar dificuldades em escrever uma expressão simbólica da generalização feita, como é evidente nas resoluções que a seguir se apresentam, referentes à tarefa A *torre dos ímpares* (*aula 30/01/2008*)(figura 5).

Era pedido aos alunos o valor da soma dos números de cada linha do triângulo, por ordem descendente. Apresentamos, como exemplo, as respostas da Isa e da Rosa a esta questão (figura 6 e 7).

À semelhança das resoluções da Isa e da Rosa, a maioria dos alunos determinou alguns termos da sequência e verbalizou correctamente a regra de construção, mas revelou alguma dificuldade em escrever simbolicamente a expressão algébrica que traduzia a generalização da situação.

Em geral, os alunos consideraram essencialmente casos concretos. Foi necessária a intervenção da professora para que os alunos dessem o passo para a generalização e para a construção da expressão algébrica generalizada. Porém, houve uma evolução positiva no que refere à capacidade da argumentação matemática. O excerto de entrevista que apresentamos a seguir, relativo à tarefa A *festa das irmãs gémeas* (análoga à tarefa O *Aniversário do João*) e realizada no fim das aulas da unidade didáctica Números e Álgebra, é exemplo disso. A aluna verbaliza correctamente a regra de generalização da sequência, sem o apoio da professora:

Rosa: Eu consigo saber sempre o número de cumprimentos, mas tenho de saber o número de cumprimentos anterior, tenho de saber sempre o que vem antes. Sabendo este número de cumprimentos, soma-se este valor ao número de amigos e dá sempre o número de cumprimentos que queremos saber.

(*Entrevista 28/05/2008, grupo A*)

No final do estudo, a generalização já é feita com mais frequência, no entanto a escrita da expressão simbólica continua a surgir apenas com o auxílio da professora. Os alunos, em geral, conseguem construir mentalmente uma regra ge-

$(n-1)\times n+n$

Por exemplo na linha 20 é:

$19\times 20+20=400$

Figura 8. A resposta do Manuel à tarefa A torre dos ímpares

z → Luís
z·2 → Sofia
z+2 → Marta

z + z·2 + z+2 =
= 3z

Figura 9. Extracto da resolução da tarefa O problema das idades, grupo A

radora dos termos do padrão, alguns deles verbalizam-na, no entanto não conseguem expressá-la simbolicamente — talvez resulte da interpretação que dão às letras.

Dificuldade dos alunos em dar significado às letras

O uso e a atribuição de significado aos símbolos nem sempre é um processo fácil para muitos alunos. Neste estudo, os alunos manifestaram dificuldades em dar sentido a n, enquanto número generalizado, tal como sugere a seguinte discussão, ainda referente à tarefa *O aniversário do João:*

Professora: E se tivermos um número qualquer de amigos?

António: Então é esse número qualquer vezes o número antes desse e depois dividimos por dois.

Professora: Então, simplificando, se dissermos que esse número qualquer é n, como podemos determinar o número de cumprimentos?

Manuel: O número de cumprimentos é outro número qualquer, por exemplo y.

Professora: Assim, continuamos sem saber nada. Eu digo que foram n amigos à festa. Tu dizes que houve y cumprimentos. Conseguimos alguma informação?

Nelson: E com n também não sabemos nada, porque tínhamos de saber quantos amigos são n.

Professora: Como é que raciocinámos para 1000 amigos? Podemos raciocinar da mesma maneira para n amigos!

António: Mesmo sem sabermos quanto é n?

Rosa: Eu acho que já sei. É n vezes o número que está antes, que é $n - 1$.

António: Então e podemos multiplicar números sem sabermos quanto valem? E depois como é que sabemos o resultado?

Rosa: O resultado depende de quantos amigos são n.

(*Aula 16/01/2008*)

Para a maioria dos alunos, nos momentos em que a letra n assumiu o papel de variável independente (como o número de amigos), eles tiveram, em geral, muita dificuldade em perceber a sua função nesse contexto. Por outro lado, a dificuldade dos alunos em atribuir um significado a n prende-se com o facto de não conhecerem o seu valor. Há também, claramente, uma dificuldade na interpretação da letra como um número generalizado, tal como se verifica no extracto de diálogo que a seguir se apresenta:

Professora: Então usando a letra n o que é que resulta desse raciocínio?

António: Eu queria chegar a uma maneira de fazer uma equação, mas não sei o que é a incógnita. Eu acho que a incógnita é o número que se vai sempre aumentando ao número de cumprimentos à medida que os amigos aumentam, mas não sei.

Professora: Pensem lá mais um bocadinho. Fizeram uma tabela, o que é que acontece à medida que o número de amigos aumenta?

Marco: Se houver n amigos, ..., não, ..., n cumprimentos. Não sei o que andamos à procura.

(...)

Professora: Se houver um número qualquer de amigos?

António: Pois isso era o que eu queria, mas não sei o que é a incógnita, porque os amigos aumentam e o número de cumprimentos também, mas não aumentam da mesma maneira, por isso o que é que vai ser a incógnita?

(*Aula 16/01/2008*)

Na tarefa *A torre dos ímpares*, a maioria dos alunos explica em linguagem natural o que acontece numa determinada linha. Porém, alguns alunos resolveram a questão designando o número de uma linha qualquer da torre por uma letra, parecendo ter construído uma relação simbólica com significado matemático, como sugere a figura 8.

O Manuel necessitou de apresentar um caso específico para confirmar a sua expressão simbólica, semelhante à usada na tarefa *O aniversário do João*, revelando um transporte de processos utilizados anteriormente — o que realça a importância da experiência matemática anterior.

Tal como sugerem os extractos de discussão apresentados, grande parte dos alunos indiciou muita dificuldade na transição do concreto para o abstracto, manifestando grandes dificuldades na escrita simbólica da generalização de uma sequência. A maioria dos alunos determinou os primeiros termos de uma sequência e descreveu a regra em linguagem natural por recorrência (usando o termo anterior),

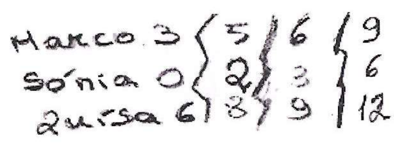

Figura 10. Extracto da resolução da tarefa *Os três irmãos*, grupo B

mas não conseguiu simbolizar a generalização sem uso recursivo. Ou seja, nas situações em que a letra estava inserida num contexto funcional, onde era necessário relacionar o termo (variável dependente) com a ordem desse termo (variável independente), a maioria dos alunos manifestou dificuldades na compreensão do papel da letra e em construir simbolicamente uma expressão generalizada — pois foram confrontados com dois valores desconhecidos a variar em simultâneo (termo e ordem desse termo).

Durante a entrevista (grupo A), numa questão da tarefa *O problema das idades* [O Luís tem mais dois anos que a Sofia e menos dois que o Martim. A soma das idades dos três irmãos é igual ao triplo da idade do Luís?], a compreensão conceptual da letra como valor possível indeterminado sucedeu de discussões ocorridas durante as entrevistas, como a seguinte, relativa ao significado da expressão obtida por estes alunos, $3z$, e pela extensão feita em torno de $2z$, durante a resolução da tarefa (figura 9).

Professora: Sim, mas z representa o Luís?

A professora chamou à atenção para a imprecisão, bastante frequente na maioria dos alunos, em relação ao significado da letra («z representa o Luís»).

Manuel: z representa a idade do Luís.

Professora: Ah! A idade do Luís! Então e $z - 2$? E $z + 2$?

Manuel: $z - 2$ a idade da Sofia e $z + 2$ a idade do Martim.

Professora: Sim, as idades! Então e o que é $3z$?

Rosa: A idade do Luís multiplicada por 3.

Professora: Então e o que é a idade do Luís multiplicada por 3?

Isa: É o triplo da idade do Luís.

Manuel: E se virmos bem, a soma da idade da Sofia com a do Martim, $(z - 2) + (z + 2)$ [escrevendo na folha de respostas] é a idade do Luís vezes dois, ou seja $2z$.

(*Entrevista 28/05/2008, grupo* A)

Nas situações em que a letra assumia o papel de incógnita, os alunos manifestaram uma maior compreensão do significado da letra e evidenciaram uma boa capacidade de argumentação e resolução. Exemplo disso é a discussão que se segue, ocorrida durante a entrevista ao grupo B, numa questão da tarefa *Os três irmãos* [O Marco tem mais três anos que a Sónia e menos três que a Luísa. A soma das idades das duas irmãs será sempre um número par?]

António: Números ímpares mais números ímpares vai dar números pares.

Professora: Então e se as irmãs tiverem um número par de idades?

José e Mara: Par e par dá par.

António: Mas se for um número ímpar com um número par não vai dar.

Professora: Mas há alguma possibilidade de uma das irmãs ter um número par de anos e a outra ter um número ímpar de anos?

António: É melhor fazer aqui, assim (figura 10).

Mara: Não. As idades delas dependem da idade do Marco. E vão ser as duas números pares ou as duas números ímpares.

Professora: Se o Marco tiver um número par de anos ...

António: As duas irmãs têm idades ímpares. E se o Marco tiver um número ímpar de anos, as duas irmãs têm idades pares.

(*Entrevista 28/05/2008, grupo* B)

A discussão em torno da soma de números pares e ímpares conduziu à correcta verbalização da resolução do problema, como a seguir se mostra:

Professora: Então o que é que concluem?

António: Quando o Marco tem um número par de anos, as irmãs têm as duas um número ímpar de anos e a soma das idades das irmãs é um número par. Quando o Marco tem um número ímpar de anos as irmãs têm as duas um número par de anos e soma das idades das irmãs também é um número par.

(*Entrevista 28/05/2008, grupo* B)

A adopção de estratégias distintas face à mesma situação decorreu de discussões como a seguinte (referente à da tarefa *Os três irmãos*):

Mara: Então, o Marco tem 8 anos, a Sónia tem 5 e a Luísa tem 11.

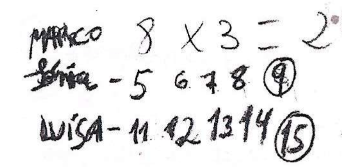

Figura 11. Extracto da resolução da tarefa Os três irmãos, grupo B

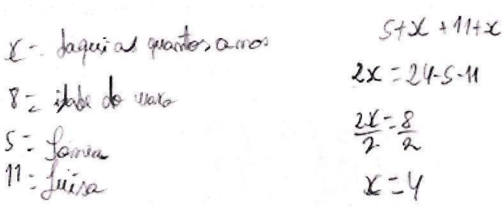

Figura 12. Extracto da resolução da tarefa O problema das idades, grupo A

Professora: Então vamos lá escrever.

José: Vamos tentando e quando a soma das duas irmãs der 24, já sabemos daqui a quantos anos é que ...

(*Entrevista 28/05/2008, grupo* B)

A estratégia de resolução usada por alguns alunos foi a de calcular os valores das idades actuais de cada um dos irmãos e tentar, ano a ano, perceber o que ocorre, usando, por exemplo, um esquema como o que apresenta na figura 11.

No decurso da entrevista ao grupo A, referente à tarefa *O problema das idades*, alguns alunos optaram pela formulação e resolução de uma equação que traduzia o problema, como a resolução que a seguir se apresenta:

António: É mais fácil fazer por uma equação.

Professora: Então vá!

Mara: Pois é, se calhar é mais rápido com uma equação!

Professora: Então o que é que queremos?

Mara: Então o que queremos é somar estas duas $5 + x$ com $11 + x$.

Professora: Então vá!

Mara: Então $(5 + x) + (11 + x)$ ...

António: Que vai dar 24.

Mara (escrevendo no caderno): Então

$$(5 + x) + (11 + x) = 24.$$

(*Entrevista 28/05/2008, grupo* A)

No entanto, a variedade de estratégias de resolução contribuiu para a sua discussão dialéctica, permitindo a partilha e a discussão de resultados, como a seguir se exemplifica com a resolução da equação $5 + x + 11 + x = 24$ (figura 12).

Mara: Já está, $x = 4$. Então é daqui a 4 anos.

José: Foi o que me deu a mim! Daqui a 4 anos.

Professora: Então e o que é que significa esse $x = 4$?

José: São os anos que são precisos para que a soma da idade das irmãs seja o triplo da idade do Marco.

(*Entrevista 28/05/2008, grupo* A)

Outros alunos optaram por resolver mentalmente a questão, como a resolução que a seguir se apresenta, referente à tarefa *O problema das idades*:

José: António e Mara, vocês fazem com uma equação que eu vou fazer por contas, está bem?

Mara e António: Está!

José: Eu já sei! É daqui a 5 anos. Não! É daqui a 4 anos. Então não é?

Professora: Como é que fizeste? Escreve.

José: Escrever não! Fiz de cabeça. Então, não está bem?

Professora: Espera um bocadinho pelos teus colegas e já vamos ver, está bem? Então vamos lá pensar.

(*Entrevista 28/05/2008, grupo* A)

Nas situações onde a letra assumiu o papel de incógnita de uma equação possível determinada, a maioria dos alunos não manifestou grandes dificuldades em traduzir simbolicamente a situação, em resolvê-la e em dar-lhe sentido — porque nessas situações existia apenas um desconhecido que se mantinha invariante, pois a letra escolhida no início da resolução para designar a incógnita representava sempre o mesmo desconhecido ao longo da resolução do problema. Onde a letra assumiu o papel de um valor generalizado — como é o caso da letra de uma expressão, em que essa expressão pode ter um significado independente da estrutura matemática de que faz parte (neste caso a estrutura é a equação), os alunos necessitaram de um maior acompanhamento por parte da professora na análise às decisões e estratégias que adoptaram, a fim de maximizarem a compreensão dos significados matemáticos nelas envolvidos.

A concluir

Neste estudo, os alunos deram, de forma clara, um sentido à letra quando esta assumia o papel de incógnita. Porém, tiveram mais dificuldade em dar significado à letra quando esta estava enquadrada num contexto funcional, assumindo dificuldades em generalizar e na escrita simbólica da generalização de uma sequência. Os alunos determinaram os primeiros termos de uma sequência e descreveram a regra dessa sequência em linguagem natural por recorrência (usando o termo anterior), mas tiveram muita dificuldade em simbolizar tal generalização. Poder-se-á afirmar que os alunos estão na segunda etapa de generalização de um padrão referida por Rojano (2002). Talvez esta situação se deva à ambiguidade dos símbolos, pois, tal como afirma Caraça (1998), n, individualmente, não sendo um número natural representa-os a todos.

A professora, bem como as tarefas de exploração e de investigação propostas, assumiram um papel importante para a promoção, nos alunos, da sua capacidade de traduzir simbolicamente uma situação dada. Foi possível identificar as dificuldades dos alunos no que respeita à interpretação das letras e à capacidade de generalizar. Fica a certeza da importância de ter sempre presente os contextos onde as letras estão inseridas e que o significado de uma letra como incógnita é mais assumido pelos alunos do que o de uma letra como número generalizado — talvez seja necessário insistir no desenvolvimento da imaginação e, consequentemente, da abstracção, dos alunos («Então e podemos multiplicar números sem sabermos quanto valem? E depois como é que sabemos o resultado?»).

Notas

1 A investigação que serviu de base à elaboração deste artigo integra-se na Tarefa 1 (*Estimativa, Sentido do Símbolo e Funções*) do projecto de investigação *Promover a aprendizagem matemática em Números e Álgebra*, financiado pela FCT, MCTES, Portugal.

2 As resoluções apresentadas são de alunos portugueses da Escola Básica Integrada c/JI da Amareleja que frequentavam pela primeira vez o 7° ano de escolaridade e que participavam num estudo realizado por Magda Pereira (a sua professora). A metodologia de investigação foi qualitativa e interpretativa. A recolha dos dados incluiu registos escritos da professora nas aulas, resoluções e relatórios dos alunos e entrevistas.

3 Das tarefas propostas, a primeira, *O aniversário do João* (de natureza investigativa) insere-se no tema *Sequências*; a segunda, *À descoberta do valor das letras* (de natureza exploratória), insere-se no tema *Equações*; a terceira, *A torre dos ímpares* (de natureza exploratória) insere-se no tema *Sequências*; e a quarta tarefa, *Os Mealheiros* (problema) insere-se no sub tema *Resolução de Problemas Envolvendo Equações*.

Bibliografia

Caraça, B. J. (1998). *Os conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Davis, P. & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics*: 11–16 (pp. 102–119). London: Murray.

Pereira, M., & Saraiva, M. J. (2005). A integração de tarefas de investigação no ensino e na aprendizagem das sucessões. *Quadrante*, 14 (2), pp. 43–69.

Ponte, J. P., Oliveira, H. & Borcardo, J. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Rojano, T. (2002). Mathematics Learning in the Junior Secondary School: Students' Access to Significant Mathematical Ideas. In L. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh &D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (vol. 1, pp. 143–161). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. (2005). Curriculum Development, Teaching, and Assessment. In In L. Santos, A. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Proceedings of the international meeting in honour of Paulo Abrantes Mathematics Education: paths and crossroads*, pp. 13–41. Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemática.

Linchevski, L. & Sfard, A. (1991). Rules without reasons as processes without object — The case of equations and inequalities. In Furenghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 317–324). Assis, Itália: PME.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Schulte (eds.), *The ideas of algebra, K–12* (1988 Yearbook, pp. 8–19). Reston, VA: NCTM.

Magda Nunes Pereira
Escola EB 2,3/S de Vilar Formoso

Manuel Joaquim Saraiva
Departamento de Matemática da UBI e CIEFCUL

Número Temático da Educação e Matemática de 2010

Como habitualmente o último número do ano da *Educação e matemática* será temático.

Desta vez o tema escolhido foram as conexões matemáticas. As conexões Matemáticas referidas em vários documentos, nomeadamente no *Currículo Nacional* (ME, 2001), no *Novo Programa de Matemática do Ensino Básico* (M.E., 2008) e nos *Princípios e Normas para o Ensino da Matemática* (NCTM), são potenciadoras de uma compreensão mais profunda e duradoura da Matemática.

Assim, neste número temático da E&M serão discutidos/reflectidos diferentes aspectos das conexões matemáticas, considerando as conexões com a realidade, com outras do currículo e entre diferentes tópicos matemáticos.

Aqui fica o convite a todos os interessados em escrever e/ou partilhar ideias ou reflexões sobre este tema, para que nos façam chegar os vossos contributos.