Problemas sem solução

Uma pequena investigação sobre o problema de Collatz

Rui Feiteira

O processo iterativo ou recursivo é um dos processos mais importantes e actuais dentro da Matemática, pois podem modelar processos sequenciais, desempenhando, por exemplo, um papel extremamente importante na teoria da computação. Segundo a NCTM (2008), estes processos devem ser desenvolvidos de forma sistemática desde o final do 3.º ciclo do Ensino Básico. No que concerne aos documentos nacionais, o Currículo Nacional do Ensino Básico (2001) afirma que a disciplina de Matemática deve proporcionar um contacto com ideias e métodos fundamentais e deve permitir que os alunos apreciem o seu valor e a sua natureza. O novo programa do ensino básico também reserva um papel importante às sequências numériças:

«O estudo de sequências envolve o trabalho com números e operações e proporciona o estabelecimento de relações e a explicitação de leis de formação. Os alunos devem ganhar desembaraço na manipulação de expressões numéricas, compreendendo o papel e a necessidade dos parênteses, a prioridade das operações e os efeitos das operações sobre os números.» (Programa de Matemática do Ensino Básico, p. 40)

Por outro lado, os alunos nestas idades tendem a olhar para a matemática como um produto acabado e, muitas vezes, desinteressante. As tarefas e/ou actividades que o professor escolhe para a sala de aula, ajudam, ainda que inconscientemente, a que os alunos tenham uma determinada visão da Matemática. Uma forma de contribuir para a formação de jovens matematicamente competentes e críticos é confrontá-los, ao seu nível, com problemas reais com que os verdadeiros matemáticos se confrontam no dia-a-dia. Foi com este intuito que apresentei o problema de Collatz, também conhecido como o problema $3x + 1$, a uma turma do 8.º ano de escolaridade. Este problema que é muito fácil de enunciar é, de facto, muito difícil de resolver, e ainda hoje é um problema em aberto.

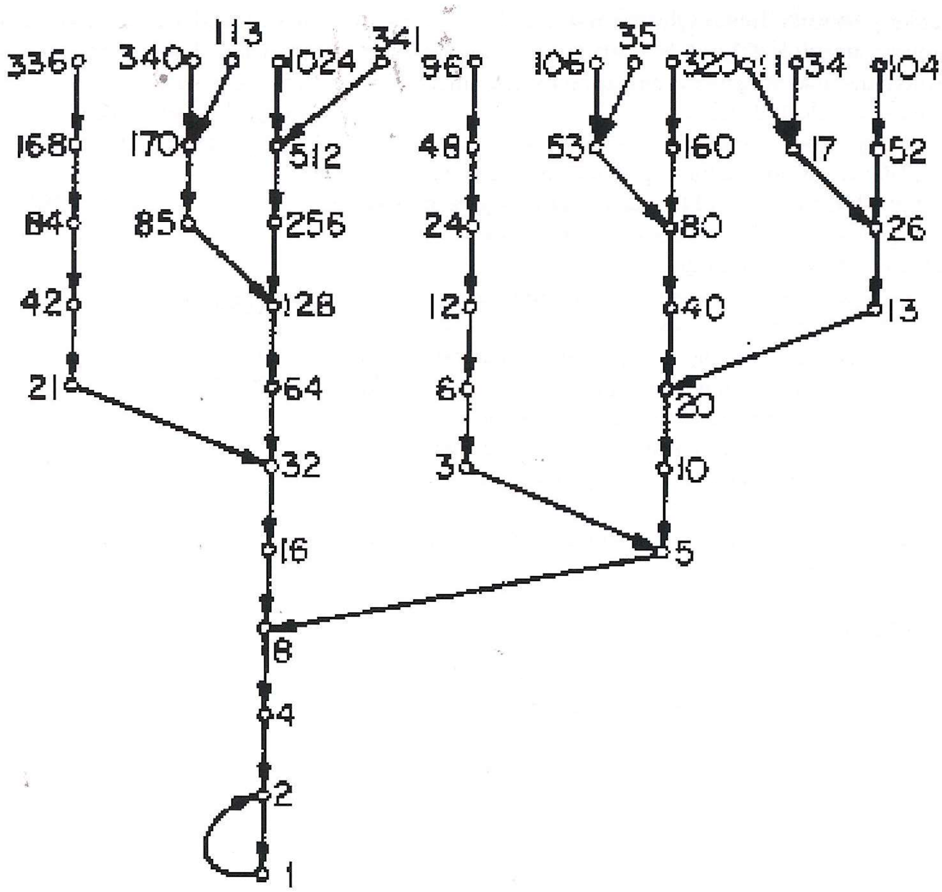

Figura 1

O problema 3n+1

Escolha um número natural qualquer. Se esse número for par divida-o por 2. Se o número escolhido for ímpar, multiplique-o por 3 some-lhe 1 e, de seguida, divida o resultado anterior por 2. Obtido um número através deste processo repita-o várias vezes. Descobriu alguma invulgaridade? A sucessão de números criada atinge inevitavelmente o número 1.

Segundo alguns autores este problema teve origem, nos anos 30, do século passado, na Universidade de Hamburgo, onde Lothar Collatz preparava o seu doutoramento. O problema foi ganhando alguma dimensão, mas apenas como uma pequena curiosidade matemática, até que, na década de 50, Hasse o discutiu intensamente no meio académico. O problema ganhou outra dimensão, e na década de 60, os melhores matemáticos de Yale e de Los Alamos trabalharam intensamente neste problema, mas sem o conseguir demonstrar.

Mas o que torna realmente interessante este problema? Comecemos por formalizar matematicamente o mesmo. Seja $C : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$C(n) = \begin{cases} \dfrac{3n+1}{2}, & n \text{ é ímpar} \\ \dfrac{n}{2}, & n \text{ é par} \end{cases}$$

Vejamos como partindo desta função podemos obter uma sucessão de valores. Comecemos por escolher, por exemplo, o número 5 e vamos repetir várias vezes o processo. Como 5 é ímpar, o número seguinte será 8, o seguinte 4, o seguinte 2, o seguinte 1, e a partir daqui iremos entrar no ciclo 1, 2, 1, 2, ... Curiosamente se o leitor escolher inicialmente outro número natural qualquer, irá atingir sempre o ciclo anterior. Seja $C^2(n) = C(C(n))$ e $C^3(n) = C(C(C(n)))$, então dizemos que a sucessão $C^k(n)_{k\in\mathbb{N}}$ que é obtida por iteração pela função C, é a órbita de n. A conjectura principal, que deu origem a todo o problema, afirma que: começando num número natural qualquer, a sucessão $C^k(n)_{k\in\mathbb{N}}$ atingirá, a partir de uma certa ordem, o valor de 1, sendo que depois de tal acontecer, o valor das iterações oscilará entre 1 e 2.

Além desta existem várias conjecturas associadas a este problema, sendo que a conjectura principal apenas tem sido comprovada experimentalmente. A este propósito o investigador português Tomás Oliveira testou todos os números inteiros[1] até $20 \times 2^{58} \approx 5,8 \times 10^{18}$ e não encontrou um número que não atingisse 1, ou que equivalentemente, não atingisse o ciclo 1, 2, 1,2 ...

Para melhor compreender o comportamento das órbitas, de qualquer número natural, podemos pensar num digrafo ou grafo dirigido (Figura 1), onde os vértices correspondem aos números naturais e os arcos correspondem ao valor que cada iteração vai assumindo.

Neste dígrafo[2], vê-se claramente as órbitas de vários números. Se escolhermos, por exemplo, 113, vemos que a órbita assume os seguintes valores 113, 170, 85, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1. Podemos notar ainda que as iterações têm comportamentos bastante distintos, pois existem órbitas bastante curtas e outras mais longas . A título de exemplo a órbita de 27 leva 70 iterações[3] até atingir finalmente 1. Outras considerações se poderiam fazer para melhor entender este problema mas este não é o espaço próprio, nem o objectivo do presente trabalho.

A preparação

Apesar de ser um problema que se enuncia facilmente, não é um problema fácil de colocar a uma turma do 8.° ano de escolaridade. De qualquer forma, a turma em questão, estava, naquele momento, a trabalhar a unidade temática de sequências e já conseguiam determinar os termos de uma determinada sequência através do seu termo geral, completar sequências numéricas ou geométricas, e posteriormente, foi feito um trabalho que encaminhasse os alunos para o estudo de progressões aritméticas. Vejamos, um exemplo, de como os alunos abordaram um problema que pode ser modelado através de uma progressão aritmética.

Uma sala de cinema tem 8 filas paralelas de cadeiras. A primeira fila tem 10 cadeiras, e todas as outras filas têm mais 4 cadeiras em relação à fila anterior. Quantas cadeiras tem a última fila da sala de cinema?

Apresentamos nas figuras 2 e 3 algumas das resoluções dos alunos.

Sem o saberem, para darem uma resposta à questão anterior, em qualquer das resoluções apresentadas, os alunos utilizaram implicitamente um processo recursivo, pois o número de cadeiras da fila da frente corresponde à soma do número de cadeiras da fila anterior com quatro. Portanto, para dar a resposta final, basta actualizar o número de cadeiras por fila. De facto, este problema pode ser modelado pela sucessão, definida por recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + 4, n \geq 2 \end{cases}$$

Começamos por onde?

A abordagem ao problema $3x + 1$ dividiu-se em duas fases: numa primeira fase, os alunos deveriam compreender o enunciado do problema e deviam tentar calcular correctamente alguns termos; numa segunda fase, era minha intenção que os alunos concluíssem (experimentalmente) que todas as sequências terminavam em 1 ou no ciclo 1,2 independentemente do valor inicial.

De seguida apresentamos o problema tal como foi colocado aos alunos.

Considera uma sequência em que a lei de formação de cada um dos termos é:

- *Se o termo anterior for par, divide-o por 2;*
- *Se o termo anterior for ímpar, multiplica-o por 3, soma-lhe 1 e, depois divide esse número por 2.*

Descobre como se comporta esta sequência.

O problema com este pequeno enunciado colocava-se a dois níveis distintos: primeiro, os alunos debatiam-se com uma lei geral bastante diferente daquilo a que estavam habituados; segundo, os alunos necessitavam de compreender o enunciado para não se enganarem a calcular os termos da sequência, pois corriam o risco de não efectuarem as operações pela ordem correcta. Para garantir que todos os alunos da turma estariam em igualdade de circunstâncias, começou-se por analisar em grande grupo o enunciado.

A primeira dificuldade, que não havia previsto inicialmente, mas que agora, fazendo uma retrospectiva, fazia todo o sentido prever, acabava de aparecer: *começamos por onde, professor?* De facto, em todos os exercícios e problemas de sequências antes colocados era sempre fornecido o primeiro termo da sequência.

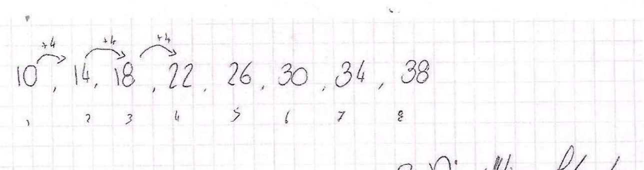

Figura 2

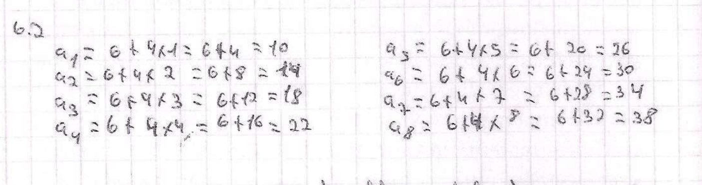

Figura 3

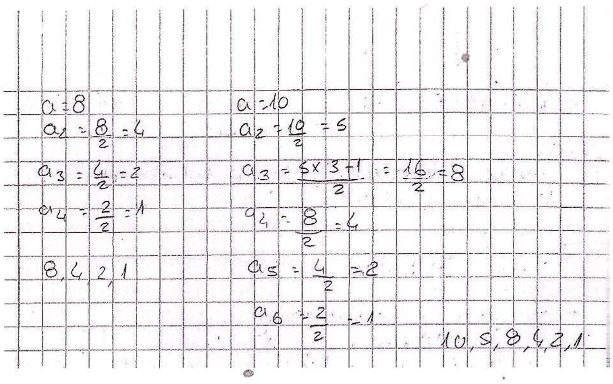

Figura 4

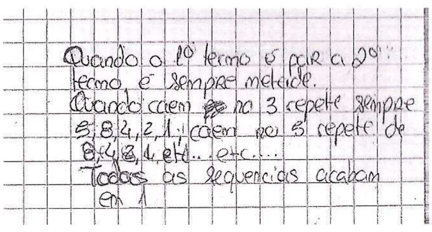

Figura 5

Aluno 1: Professor, qual é o primeiro número?

Aluna 2: Começamos por qual, professor?

Professor: Escolham vocês um número qualquer, mas escolham um número pequeno, ok?

Aluno 3: Um qualquer? E isso pode-se fazer?

Aluno 1: Esta é diferente, professor. As outras tinham sempre uma regra ...

Professor: Esta tem duas regras. Quando obténs um número par fazes isto [apontei para o primeiro ponto da lei de formação]. Quando obténs um número ímpar fazes isto [apontei para o segundo ponto da lei de formação].

Aluna 4: Escolho 6, professor. Pode ser?

Passada esta fase onde a turma, enquanto grupo, tentava perceber o que fazer, visto que a regra de formação geral era bastante diferente daquilo a que estavam habituados. Estava na altura de, em grande grupo, começarmos a calcular alguns termos da sequência.

Professor: 6 é par. Então fazemos o quê?

Aluna 4: Divido por 2. Dá 3. Agora divido outra vez?

Aluna 2: Não. 3 não é par. Tens que usar a debaixo. [aluno refere-se ao segundo ponto da lei de formação geral].

Aluno 3: Dá um número decimal ... 9,5 não é par, nem ímpar.

Professor: Como é que fizeste?

Aluno 3: 3 vezes 3 dá 9 mais um e meio dá 9,5.

Nesta altura tornava-se claro que o aluno em questão — e este aluno não foi o único a cometer este erro — não tinha percebido que primeiro deveria somar 9 com 1 e, só depois dividir o resultado por 2. Para conseguirem calcular os termos da sequência era fundamental que os alunos respeitassem a prioridade das operações. Depois de esclarecida esta questão a turma estava pronta para continuar a calcular mais alguns termos, para que desta forma, a turma se sentisse suficientemente confortável para que de uma forma, mais ou menos, autónoma, começassem a estudar o comportamento desta sequência numérica.

Nesta fase inicial, em que os alunos, aos pares, calculavam alguns termos, alguns iam reparando em algumas curiosidades.

Aluno 6: Professor, a mim deu-me sempre 1,2,1 ... Continuo?

Aluno 5: Não ... vai dar sempre a mesma coisa. É sempre assim?

Este grupo tinha redescoberto o primeiro ciclo que esta sequência assume. Esta é, de facto, uma das outras conjecturas a que já tínhamos feito referência anteriormente, pois este é o único ciclo conhecido até ao momento. Nesta altura um dos alunos, a propósito dos cálculos da Figura 4, referiu ainda que «era engraçado» que quando os termos «caem» no 8 todos os outros termos se repetiam. Seria este um caso único? Pedimos então que continuassem a calcular mais alguns termos para ver se este padrão se repetia noutros casos.

Como alguns alunos estavam a começar a ficar bastante curiosos sobre o comportamento da sequência dividi a turma em grupos de 4 elementos, isto para aumentar a velocidade dos cálculos a efectuar e para aumentar o número de sequências a estudar. Metade destes grupos começou por estudar o comportamento desta sequência para os números pares, enquanto que a outra metade estudava o comportamento da sequência para os números ímpares. Depois de calcularem alguns termos da sequência, cada grupo foi convidado a tentar colocar por palavras aquilo que estavam a observar.

Independentemente, os diferentes grupos começavam a retirar as suas primeiras conclusões. A título de exemplo, na Figura 5, o grupo destacava dois pontos interessantes: i) quando a sequência assume o número 3 todos os outros termos se repetem, assumindo sucessivamente 5, 8, 4, 2, 1; ii) todos as sequências que estudaram terminavam em 1. Curiosamente, este último aspecto, que é o mais interessante do ponto de vista matemático, não foi o aspecto mais interessante que este grupo decidiu destacar. Neste ponto, é justo afirmar que, como todos os grupos estavam a chegar à mes-

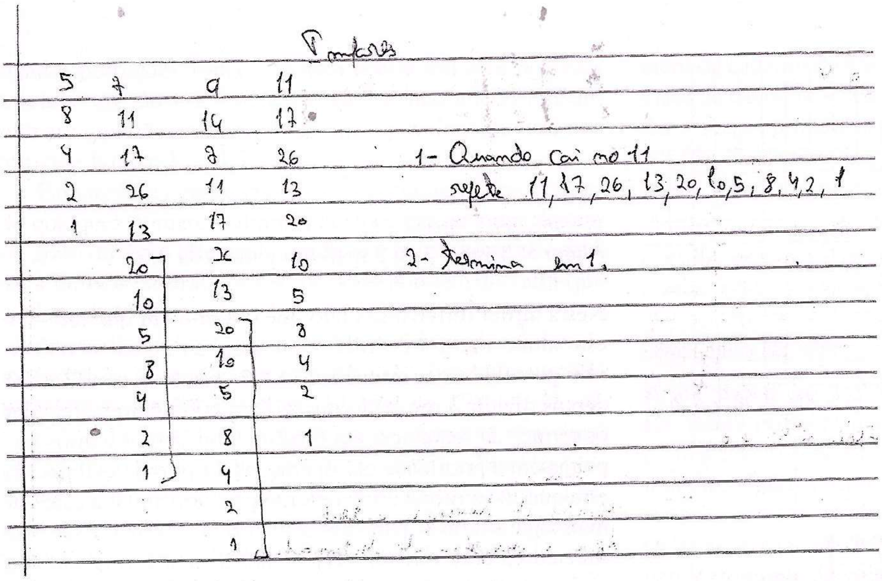

Figura 6

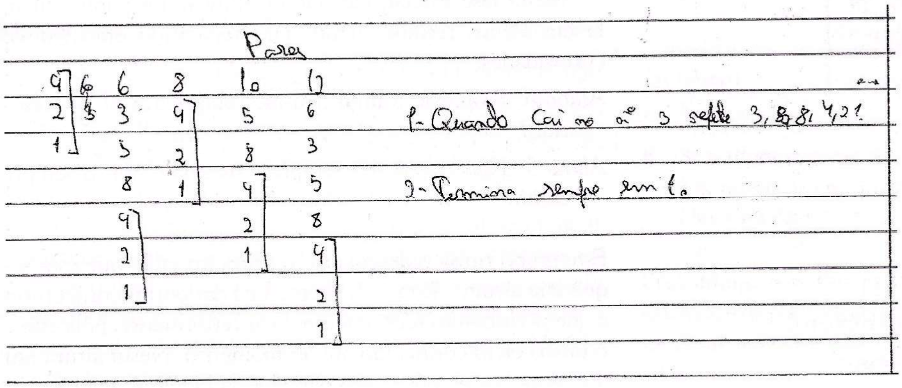

Figura 7

ma conclusão, isto é, que todas as sequências terminavam em 1, 2 e depois repetiam sempre estes mesmos números, decidi que os grupos, assim que nos seus cálculos, atingissem o número 1 podiam começar a estudar a sequência para outro valor inicial.

Para que toda a turma tivesse conhecimento de todas as trajectórias calculadas, comecei por pedir, que cada um dos grupos, dissessem em voz alta os termos das sequências pelas quais tinham ficado responsáveis.

Como ilustra a Figura 6, coloquei no quadro todas as trajectórias para os números ímpares, sendo que, de seguida, os alunos deveriam ler em voz alta as suas conclusões ou conjecturas. No entanto, quando estava no quadro a escrever a trajectória do número 9, um dos alunos interrompeu.

Aluno 3: Do 20 para frente repete tudo, não é, professor?

Aluno 6: Não … é a partir do 11! Todos os outros repetem …

Professor: Esperem. Vamos acabar, falta apenas o 11.

Aluno 5: 11, 17, …

Aluno 6: Já sei. Pára. 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 3, 4, 2, 1. [os dois alunos diziam em simultâneo os diferentes termos que a sequência ia assumindo].

O aluno 6, não conhecia à partida, o comportamento da sequência para o valor inicial de 11, isto porque tinha calculado apenas as trajectórias de alguns números pares. Pensamos que este aluno ao observar o que estava a ser escrito no quadro e, tendo presente as conjecturas que tinha construído para os números pares (Figura 5), facilmente as adaptou para o caso do valor inicial ser um número ímpar.

A turma, enquanto grande grupo, tinha conseguido verbalizar o que vemos no dígrafo da Figura 1, quando as iterações atingem um determinado valor é fácil de prever quais os valores que as seguintes iterações irão assumir. Se considerarmos apenas o trabalho efectuado em pequenos grupos, todos eles, independentemente, conseguiram formalizar a conjectura principal associada a este problema. Mas, talvez, o mais interessante, desta aula, ainda estivesse para acontecer. Depois de toda a turma ter discutido este problema para cerca de 10 valores iniciais diferentes, expliquei que este ainda era um problema em aberto e, portanto, ainda não resolvido. Informei ainda que a conjectura, que eles tinham acabado de testar, tinha sido verificada para todos os números naturais inferiores a, aproximadamente, 10^{18}.

Aluno 1: Que grande número ... Não sei dizer ...

Professor: Quantos zeros tem este número depois do 1?

Aluno 2: Muitos ...

Aluno 1: dezoito, professor. É mesmo muito grande. Tá em ... notação científica, não é, professor?

Os alunos ficaram um pouco espantados com a ordem de grandeza deste número, pois este é muito superior, aqueles números com os quais estão habituados a trabalhar. Ficaram ainda mais espantados quando afirmei que para além daquele número, aproximadamente, 10^{18}, não havia certezas e, por isso mesmo, estávamos perante uma conjectura e não um resultado matemático demonstrado e aceite. Um dos alunos referiu que pensava que em matemática isso era impossível. Outros indagavam-se sobre a razão pela qual não se estudavam todos os números.

Aluno 6: E porque é que não estudam todos os números?

Aluno 1: Porque são infinitos, não é professor?

Este aluno, que tinha estado bastante activo, desde o início da aula, tinha tocado, num ponto fundamental. Informalmente a resposta que deu o aluno 1 está correctíssima. A nível computacional torna-se muito complicado estudar todas as trajectórias, pois esta abordagem consome muito tempo e memória aos computadores à medida que a ordem de grandeza dos números vai aumentando e, simultaneamente, o espaço de memória disponível vai diminuindo. Mas o aluno 6 ainda não estava satisfeito com a resposta que recebeu.

Aluno 6: E porque é que não dividem os números todos? Uns ficam com uns e outros com outros?

Curiosamente esta ideia, a de investigar uma certa propriedade usando uma rede de computadores, que valeu alguns comentários jocosos por parte da turma, já foi implementada, com sucesso, na procura dos primos de Mersenne[4], na década de 90. Este projecto deu ainda a oportunidade a que pessoas, que não fossem cientistas de participar numa descoberta científica.

Considerações finais

Durante toda a actividade os alunos mantiveram-se bastante empenhados e foram revelando bastante curiosidade acerca de todos os cálculos que iam fazendo e do comportamento que cada sequência ia assumindo. A curiosidade foi, de facto, um factor determinante para que os alunos se mantivessem empenhados, pois os cálculos ao fim de algum tempo passam a ser rotineiros e pouco interessantes. Todos os grupos, independentemente, fizeram referência à conjectura principal, o que aconteceria sempre, eventualmente, se os alunos controlassem o processo de cálculo de cada iteração. Foi interessante verificar que, grande parte dos alunos, conseguiu perceber que os valores que as diferentes sequências iam assumindo eram afinal previsíveis. Sem usarem uma linguagem muito matemática conseguiram replicar o que a Figura 1 ilustra. Esta actividade foi ainda uma oportunidade de para que os alunos vejam a Matemática não como uma ciência fechada e acabada, mas sim, o oposto, é uma ciência aberta a todas as contribuições e está longe de se poder considerar acabada.

Notas

1 Resultado obtido em Janeiro de 2009.

2 Para sermos mais rigorosos este dígrafo representa apenas parte de todas as órbitas possíveis.

3 Em *www.numbertheory.org/php/collatz.html* está disponível uma calculadora de trajectórias para este problema.

4 *www.mersenne.org*

Referências

Araújo, V. (2004). *O problema 3x+1*, *Gazeta da Matemática*, n.º 146, pp. 38–44, Lisboa: SPM.

Buescu, J.(2001). *O Mistério do Bilhete de identidade e Outras Histórias, crónicas das Fronteiras das ciências*, Lisboa: Gradiva.

Departamento do Ensino Básico, (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico* — competências essenciais. Disponível em

http://www.dgidc.min-edu.pt/public/compessenc_pdfs/pt/LivroCompetenciasEssenciais.pdf

NCTM [National Council of Teacher of Mathematics]. (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, Lisboa: APM.

Oliveira e Serra,. T. (2009). *Computational Verification of the 3x+1 conjecture*. Disponível em *www.ieeta.pt/~tos/3x+1.html*

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação — DGIDC.

Rui Feiteira
Escola Secundária Poeta António Aleixo, Portimão