A Matemática Recreativa e o estabelecimento de Conexões Matemáticas

Paulo Afonso

Introdução

A experiência tem-me feito ver que quando os alunos, designadamente os do ensino básico, são desafiados com actividades associadas à matemática recreativa, evidenciam comportamentos muito diferentes de quando são confrontados com tarefas ditas da matemática formal ou da matemática convencional, pois mostram-se mais entusiastas e interessados pela resolução das tarefas.

Ainda que concorde com Balbuena e Coba (1992), quando referem que não é fácil definir matemática recreativa de forma consensual, tentarei clarificar o que quero dizer quando me refiro a esta perspectiva, bem como à matemática formal. Sobre este último caso, refiro-me à matemática prescrita nos curricula, que depois é implementada ao nível da sala de aula, muitas vezes enfatizando uma «tendência para o algebrismo árido e enfadonho» (Tahan, 2003, p. 6).

Por norma, as actividades propostas segundo esta componente da matemática têm como principal finalidade as aprendizagens matemáticas enunciadas nas planificações a curto e a médio prazo, elaboradas pelos professores, e exigem que na sua resolução os alunos dominem os respectivos conteúdos matemáticos. Além disto, por se tratar de uma matemática escolar, as tarefas propostas não podem ser dissociadas da componente da avaliação, isto é, o facto de o professor ter que avaliar aprendizagens e o facto de o aluno saber que tem que ser avaliado sobre as matérias que trabalha em sala de aula, poderá estar na base da existência desse tal cenário referenciado por Tahan (2003).

Já a matemática recreativa costuma ser associada não a contextos formais de ensino-aprendizagem nem de avaliação, mas, sim, a contextos de lazer, ludicidade, ocupação de tempos livres, exercitação e desenvolvimento do raciocínio lógico, etc. Contudo, a fronteira entre estas duas perspectivas não é muito evidente, pois muitos livros de texto já costumam apresentar tarefas vulgarmente associadas a esta perspectiva, servindo essencialmente como motivação inicial para os conteúdos matemáticos a explorar em sala de aula (Balbuena e Coba, 1992).

Comparando as tarefas associadas à componente da matemática recreativa com as que costumam ser associadas à matemática dita formal, aquelas parecem não exigir o domínio de grandes conhecimentos matemáticos para se conseguir uma correcta resolução, e podem ser resolvidas, não ao ritmo imposto pelo professor, mas, sim, ao ritmo imposto por cada um que as queira resolver. Por norma apelam à intuição, à perspicácia, ao pensamento criativo, à persistência, à proposição de conjecturas e à utilização da estratégia da tentativa e erro. Além disto, incutem à matemática um cariz enigmático e mágico, atributos indispensáveis para contagiar positivamente os resolvedores para esta ciência.

Em síntese, concordo com a visão apresentada por Espinoza, González e Monge (2002), quando referem que a matemática recreativa é:

«[...] todo aquel conjunto de actividades, juegos, y pasatiempos matemáticos que regularmente se plantean más como «curiosidades» que como conocimiento matemático verdadero, y que, dicho sea de paso, pocas veces se les encuentra en los libros de texto radicionales de esta asignatura en cualquier nivel educativo» (p. 2).

Relevância das conexões matemáticas

Como referi num outro momento (Afonso, 2006), o tema das conexões matemáticas é explicitamente assinalado pelo documento americano Standards do National Council of Teachers of Mathematics, traduzido para língua portuguesa pela APM e IIE em 1991. Para cada conjunto de ciclos de escolaridade (K–4, 5–8 e 9–12), esta associação de professores encara este tema como sendo uma das mais de dez normas básicas consideradas para o ensino e aprendizagem da matemática. A sua justificação assenta no pressuposto de que se o ensino-aprendizagem da matemática enfatizar a inter-relação das ideias matemáticas, leva a que os alunos não aprendam somente matemática, mas aprendam, também, a reconhecer o seu sentido útil (NCTM, 2000). Assim, na matemática dever-se-iam estabelecer ligações entre os aspectos conceptual e processual, bem como entre os diferentes tópicos programáticos a considerar, para além da ligação da matemática a outras áreas do currículo ou a vários aspectos da vida quotidiana dos alunos (House e Coxford, 1995; Afonso, 2008b).

Esta associação americana salienta que «só um vasto contacto com tópicos integrados poderá proporcionar uma melhor retenção dos conceitos e destrezas ensinados» (APM e IIE, 1991, p. 42). Trata-se, pois, de uma visão contrária à concepção da matemática como sendo um mero somatório de matérias avulsas, planeadas para serem ensinadas em momentos perfeitamente delimitados no tempo e sem ligação entre si.

Mais recentemente, o reajustamento do Programa de Matemática para o ensino básico, produzido por Ponte *et al.* (2007), refere várias vezes o tema das conexões matemáticas como sendo uma orientação metodológica importante ao serviço dos docentes.

Como verdadeiros agentes do currículo, os professores deveriam fazer um esforço para não ficarem reféns da estruturação segmentada do programa veiculado pelos manuais escolares adoptados. Aos professores caberá, pois, a função de envolver os alunos na resolução de tarefas que impliquem o estabelecer de relações entre os conceitos e os procedimentos matemáticos (APM e IIE, 1994; NCTM, 2000). No cumprimento dessa função, as actividades de recreação matemática poderão ser um palco privilegiado para se motivarem os alunos para a matemática, ajudando-os a perceber o sentido estético desta ciência e levando-os a constatar o quão útil ela é para o seu dia-a-dia.

Assim, os exemplos seguintes pretendem evidenciar como actividades aparentemente associadas à recreação matemática podem contribuir para, em contexto de sala de aula, potenciar verdadeiras aprendizagens matemáticas aos alunos. Iniciarei um percurso a partir do número 111 e conectá-lo-ei a outros números «mágicos», que por sua vez nos levarão a viajar por determinados conteúdos matemáticos, como seja a adição de números inteiros, os números pares e ímpares, os números primos, os padrões numéricos e as capicuas.

Propriedades mágicas do número 111

Cada soma seguinte — 111 — resulta da adição de seis parcelas. O total das trinta e seis parcelas envolvidas nestas seis adições utilizam os trinta e seis números naturais apenas uma vez, não havendo, portanto, nenhum número que se repita. Distribua esses números pelos espaços correspondentes, de modo que cada soma fique correcta (adaptado de Balbuena e Coba, 1992, p. 30):

—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
111	111	111	111	111	111

Perante esta tarefa, e após alguma perseverança, intuição e até mesmo devido a um eventual golpe de sorte, os resolvedores poderiam sugerir múltiplas respostas, como sejam as seguintes:

a)

1	5	9	13	17	21
25	29	33	2	6	10
14	18	22	26	30	34
36	32	28	24	20	16
12	8	4	35	31	27
23	19	15	11	7	3
111	111	111	111	111	111

b)

1	3	5	7	9	11
13	15	17	19	21	23
25	27	29	31	33	35
36	34	32	30	28	26
24	22	20	18	16	14
12	10	8	6	4	2
111	111	111	111	111	111

Como podemos verificar, a resolução da tarefa ou quebra-cabeças anterior não implica o domínio de grandes conhecimentos de matemática. Ainda que pouco provável, o simples recurso à estratégia de resolução da tentativa e erro pode gerar a resposta correcta. Contudo, a mesma tarefa pode ser resolvida através de uma estratégia matematicamente mais estruturada. Um raciocínio possível é tentar averiguar se a soma 111 é divisível por seis (número de parcelas). Como o resultado é 18,5 pode-se concluir que cada par de parcelas terá que originar a soma 37. Logo, por cada soma 111 somente há que se encontrar três pares de parcelas cujas somas sejam 37. Assim, uma possível resolução poderia ser a seguinte:

36	33	30	27	24	21
1	4	7	10	13	16
35	32	29	26	23	20
2	5	8	11	14	17
34	31	28	25	22	19
3	6	9	12	15	18
111	111	111	111	111	111

Esta tarefa poderia servir de motivação para se abordar, de uma forma simplificada, isto é, sem a duplicação da sequência de números envolvida, o episódio de sala de aula relacionado com o tema da soma de Gauss. De facto, ter seis vezes a soma 111, isto é, ter o valor 666, é o mesmo que encontrar dezoito pares de somas cujo valor é sempre trinta e sete:

1 + 36	2 + 35	3 + 34	4 + 33	5 + 32	6 + 31
7 + 30	8 + 29	9 + 28	10 + 27	11 + 26	12 + 25
13 + 24	14 + 23	15 + 22	16 + 21	17 + 20	18 + 19

Conectando o valor 111 com determinadas somas mágicas

Por baixo do número 111 escrever duas parcelas formadas por três algarismos, se possível diferentes. Quais as duas novas parcelas, contendo três algarismos cada, a adicionar a estas três anteriores para que a soma seja 2109?.

Na resolução deste desafio torna-se importante comparar o valor da primeira parcela — 111 com o valor da soma — 2109. Note-se que a diferença entre ambos os valores é 1998. Logo, as outras quatro parcelas, quando adicionadas, deverão perfazer o valor 1998. Por outro lado podemos verificar que o valor 1998 também pode ser lido como sendo dois mil menos dois. Esta constatação é muito importante, pois permite que se pense a resolução do desafio anterior da seguinte forma: a quarta parcela deverá ser formada por três algarismos de modo a permitir a soma 999 quando adicionada com a segunda parcela. Isto é, estas duas parcelas originam uma soma intermédia de mil menos um (999). Por sua vez, a quinta parcela também deverá ser formada por três algarismos de modo a permitir a soma 999 quando adicionada com a terceira parcela. Logo, surge uma nova soma intermédia de mil menos um. Assim, comparando a soma final — 2109 com a primeira parcela — 111, a diferença entre ambos os valores é de 1998, ou seja dois mil menos duas unidades. Exemplifiquemos:

$$\begin{array}{crl} & 111 & \\ & 235 & \\ \boxed{999} & 481 & \\ & 764 & \boxed{999} \\ + & 518 & \\ \hline & 2109 & \end{array}$$

Esta tarefa pode ser muito interessante em contexto de sala de aula, pois o professor pode envolver vários alunos numa mesma situação. Assim, pode começar por pedir a um aluno para escrever no quadro um número formado por três algarismos diferentes, por exemplo, 824.

De seguida, o professor pode passar por esse aluno e entregar-lhe um bilhete contendo o valor 3821, sem que o aluno veja, para ser apenas divulgado no final da tarefa. Em continuação pode pedir a outro aluno que escreva por baixo do número já escrito no quadro, um novo número formado por três algarismos, preferencialmente diferentes entre si e diferentes dos que já foram usados no número anterior, por exemplo, 357. De seguida pede a outros dois alunos para escreverem, cada um, um novo número formado por três algarismos, por exemplo, 615 e 273.

Finalmente será o professor a completar a operação de adição, criando o ambiente de magia necessário para que ele tenha que escrever as três parcelas que faltam, que serão: 642, 384 e 726. Ora, efectuando a adição destas sete parcelas, obtém o esperado valor 3821:

$$\begin{array}{cr} & 824 \\ & 357 \\ & 615 \\ & 273 \\ & 642 \\ & 384 \\ + & 726 \\ \hline & 3821 \end{array}$$

Após o professor pedir ao aluno para revelar o valor que contém no bilhete que lhe entregou, deverá desafiar os alunos na procura da justificação matemática para esta magia verificada. Espera-se que sejam capazes de ver que o valor final é maior em três mil menos três unidades do que o valor da primeira parcela.

Conectando o valor 111 aos valores 1001, 111111, 37037 e 142857

Se ao número 111 acrescentarmos novamente este número obtém-se um outro, formado por seis dígitos — 111111. Qual a ordem de grandeza deste novo número quando comparado com o inicial, formado pelos três uns? Servirá de ajuda se se pedir para se multiplicar o valor inicial por sete, depois, o resultado obtido por 11 e, por fim, o novo produto obtido por 13?

Perante esta tarefa, é possível que a maioria dos resolvedores refira apenas que:

$111 \times 7 = 777$; $777 \times 11 = 8547$; $8547 \times 13 = 111111$

ou $111 \times 7 \times 11 \times 13 = 111111$. Contudo seria desejável responderem que o 111111 é 1001 vezes maior do que o 111. Esta relação pode ser confirmada pela seguinte multiplicação:

$$7 \times 11 \times 13 = 1001$$

Logo, $111 \times 7 \times 11 \times 13 = 111 \times 1001 = 111111$.

Este exemplo, para além de poder servir como motivação para o estudo do tema dos números primos (quer o sete, como o onze ou o treze são números primos consecutivos), poderia ser conectado a uma outra situação envolvendo uma certa magia matemática:

Escrever em seis cartões os seis primeiros números naturais, conforme a figura seguinte:

1	2	3	4	5	6

Depois, no verso de cada cartão deve-se dar continuidade à sequência numérica, iniciando no último cartão agora escrito e terminando no primeiro.

Fazer uma situação semelhante, escrevendo em seis novos cartões os primeiros seis números pares, conforme a figura:

2	4	6	8	10	12

Depois, no verso de cada cartão devem-se escrever os primeiros seis números ímpares, iniciando no último cartão agora escrito e terminando no primeiro. Comparar os dois conjuntos de seis cartões e tirar conclusões.

Em contexto de sala de aula o professor poderá colocar no estojo de um aluno um papel escrito com o valor 1001, sem que o aluno o veja. Após lançar esta tarefa à turma, dividindo-a ao meio, isto é, metade trabalha com os números naturais e a outra metade trabalha com os números pares e ímpares, o professor pode pedir para cada aluno escolher o cartão que preferir e, após adicionar ambos os valores desse cartão, deve multiplicar a soma obtida pelo sete e pelo onze. Como todos os resultados coincidirão com o valor 1001, o professor deve solicitar ao aluno que retire o papel existente no seu estojo e leia para a turma o valor aí escrito (esta situação terá maior impacto junto dos alunos se o professor conseguir colocar o valor 1001 no estojo do aluno ou em outro local sem que ninguém se aperceba). Face a esta magia matemática o professor deve desafiar os alunos a serem eles próprios a descobrir a causa desta coincidência.

De facto, esta tarefa está conectada com a anterior, porque a soma dos dois valores existentes em cada cartão, independentemente do conjunto a que pertençam, é sempre treze. Ora, este valor a multiplicar por sete e depois pelo onze, origina, como se viu acima, o valor 1001. A magia matemática pode voltar a ser usada no novo exemplo seguinte:

Multiplicar o número 37037 pelo número preferido, de um a nove, que é o número secreto. O resultado agora obtido deve ser multiplicado por três. Qual foi o valor final? Tem alguma relação com o número inicial secreto?

Esta tarefa revela-se muito enigmática, pois o resolvedor terá vontade em saber o porquê de funcionar com qualquer número secreto, do um ao nove:

$37037 \times \mathbf{1} = 37037$ $37037 \times 3 = \mathbf{111111}$	$37037 \times \mathbf{2} = 74074$ $74074 \times 3 = \mathbf{222222}$
$37037 \times \mathbf{3} = 111111$ $111111 \times 3 = \mathbf{333333}$	$37037 \times \mathbf{4} = 148148$ $148148 \times 3 = \mathbf{444444}$
$37037 \times \mathbf{5} = 185185$ $185185 \times 3 = \mathbf{555555}$	$37037 \times \mathbf{6} = 222222$ $222222 \times 3 = \mathbf{666666}$
$37037 \times \mathbf{7} = 259259$ $259259 \times 3 = \mathbf{777777}$	$37037 \times \mathbf{8} = 296296$ $296296 \times 3 = \mathbf{888888}$
$37037 \times \mathbf{9} = 333333$ $333333 \times 3 = \mathbf{999999}$	

Uma vez mais, a magia reside no facto de o valor 37037 originar o 111111 após ser multiplicado pelo valor 3. Logo, multiplicando o 111111 pelo número secreto só pode originar as sucessivas réplicas desse número secreto.

Este exemplo, transportado para o ambiente de sala de aula, poderá levar o professor a questionar os alunos sobre se haverá outros dígitos inteiros, do 2 a 9, que dividam exactamente o número 111111. Espera-se que identifiquem o divisor sete, pois 111111 / 7 = 15873.

De seguida poderia sugerir-se aos alunos para serem eles os dinamizadores de uma situação semelhante à anterior, que vise adivinhar o número secreto do colega a partir do valor inicial 15873. Seria interessante que os alunos solicitassem a multiplicação deste valor por um determinado número secreto, do um a nove, e depois pedissem para o produto obtido ser multiplicado pelo valor 7, com o intuito de adivinharem o valor secreto usado pelo colega.

De facto:

15873 × **1** = 15873 15873 × 7 = **111111**	15873 × **2** = 31746 31746 × 7 = **222222**
15873 × **3** = 47619 47619 × 7 = **333333**	15873 × **4** = 63492 63492 × 7 = **444444**
15873 × **5** = 79365 79365 × 7 = **555555**	15873 × **6** = 95238 95238 × 7 = **666666**
15873 × **7** = 111111 111111 × 7 = **777777**	15873 × **8** = 126984 126984 × 7 = **888888**
15873 × **9** = 142857 142857 × 7 = **999999**	

Tirando partido, ainda do número 111111, sabe-se que multiplicado por nove origina este valor 999999. Este número, dividido por sete origina outro número mágico, que é o seguinte: 142857. Curiosamente, ao converter-se a fracção 1/7 em número decimal, volta a obter-se este valor: 0,(142857).

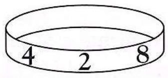
Multiplicar o número 142857 por cada dígito do um ao nove e verificar se existe alguma regularidade matemática nos nove produtos obtidos.

Em contexto de sala de aula, a magia deste número leva a que os produtos obtidos mereçam ser alvo de reflexão, pois são todos formados pelos mesmos algarismos de onde se partiu, dispostos da mesma maneira (142857), iniciando, apenas, num algarismo diferente. Exceptuam-se os casos em que se multiplica por sete, por oito e por nove. Note-se que no caso de o número ser multiplicado por oito ou por nove, o valor excedente, existente à esquerda dos seis números obtidos deve ser adicionado ao respectivo valor obtido, de seis dígitos, voltando a originar o número 142857:

142857 × **1** = 142857 142857 × **2** = 285714
142857 × **3** = 428571 142857 × **4** = 571428
142857 × **5** = 714285 142857 × **6** = 857142
142857 × **7** = 999999 142857 × **8** = 1142856
142857 × **9** = 1285713

Como refere Barry (1995), é fácil o professor saber por quanto foi multiplicado o número 142857. Basta pedir ao resolvedor o algarismo das unidades do produto obtido. Se se tratar do sete, saberá que o número foi multiplicado por um (pois, 1 × 7 = 7). Se for o quatro, saberá que multiplicou o número por dois (pois, 2 × 7 = 14), e assim sucessivamente.

Outra possível exploração mágica, proposta por Martín (2006), é o professor levar para a sala de aula várias coroas numéricas (tiras de cartolina), formadas pelo número 142857. Como os algarismos estão dispostos em círculo, os alunos não se apercebem que se trata do número 142857, pois apenas será dito que se trata de uma coroa numérica. O professor coloca a coroa na cabeça e pede a um aluno para escrever no quadro aquele número de seis algarismos. Depois pede-lhe que o multiplique pelo número que sair no lançamento de um dado. Enquanto os alunos efectuam a multiplicação, o professor rasga a coroa no sítio certo, de modo a que ao mostrar a tira de cartolina, apareça o resultado dessa operação aritmética. Veja-se o seguinte exemplo: Se o número multiplicado pelo 142857 for o 3, o produto final será 428571, pelo que o professor deverá cortar a coroa a seguir ao número 1:



4	2	8	5	7	1

Conectando o 111111 com o tema das capicuas e dos padrões numéricos

Qual o produto do 111111 por si próprio? E qual o produto de 11111 por si próprio? E qual o produto de 1111 por si próprio? E qual o produto de 111 por si próprio? Há algo de comum nos vários resultados obtidos? Se assim for, qual o produto de 11111111 por si próprio?

Esta simples tarefa de recreação matemática, envolvendo o conceito de potência, pode, em contexto de sala de aula, levar a que os alunos concluam a existência de algo comum a todos os produtos obtidos, que é o facto de serem capicuas. Além disto, facilmente descobrirão que estão perante um padrão ou regularidade numérica, pois o valor central de cada capicua coincide com o número de uns envolvidos em cada factor respectivo. Logo, para o caso de a multiplicação envolver oito uns em cada factor, o resultado obtido será novamente uma capicua, tendo o valor oito como valor central:

$$111111 \times 111111 = 12345654321$$
$$11111 \times 11111 = 123454321$$
$$1111 \times 1111 = 1234321$$
$$111 \times 111 = 12321$$
$$\ldots$$
$$11111111 \times 11111111 = 123456787654321$$

Esta tarefa permite, pois, que o professor a possa conectar com o fascinante tema dos padrões numéricos, levando os alunos a detectar a lei de formação de determinadas regularidades, dando-lhes continuidade. Eis possíveis exemplos a serem usados (recolhidos de Santos, 1997):

Dar continuidade aos seguintes padrões:

111111 = 6 + 12345 × 9 11111 = 5 + 1234 × 9 1111 = 4 + 123 × 9 111 = 3 + 12 × 9 ... *Quanto será* *10 + 123456789 × 9?*	111111 × 24 = 2666664 11111 × 32 = 355552 11111 × 13 = 144443 11111 × 21 = 233331 ... *Quanto será* *111111111 × 72?*

Note-se que no padrão da esquerda, o número de uns em cada linha é exactamente igual ao valor da parcela que se adiciona ao produto envolvido nessa linha.

No padrão da direita, os dois dígitos de um dos factores surgem nas extremidades do produto respectivo. Além disto, o algarismo que se repete em cada produto resulta da soma desses dois dígitos. A sua quantidade é igual ao número de uns envolvidos na respectiva multiplicação menos uma unidade.

Após a análise de cada um destes padrões fica sempre a dúvida relativamente à pergunta que se deve colocar, no sentido de ser a mais interessante para proporcionar o sentido de indagação empenhada dos alunos. No primeiro caso, como alternativa à pergunta colocada, seria interessante analisar o desempenho dos alunos face ao seguinte desafio: «Dar continuidade ao padrão para o caso do produto obtido ser 1111111111». Por sua vez, para o outro padrão, um desafio alternativo à pergunta colocada seria: «Dar continuidade ao padrão, de modo a descobrir os dois factores que originam o produto 7999999992».

Estes são apenas alguns exemplos, muito associados à recreação matemática, mas que podem servir de base para que os alunos entendam a matemática como a ciência dos padrões (Devlin, 2002).

Conclusão

Muitos poderiam ser os exemplos a acrescentar a esta reflexão, como seja a conexão ao tema das potências (Afonso, 2008a) ou inclusivamente ao fascinante e enigmático triângulo de Pascal (Pappas, 1995 e Ensensberger, 1998), entre outros. Estou em crer que se os múltiplos problemas, quebra-cabeças, enigmas, ou jogos existentes em variadíssimas publicações, não necessariamente escolares ou académicas, forem bem aproveitados pedagogicamente para a sala de aula de matemática, contribuirão decisivamente para aumentar a motivação dos alunos para com esta disciplina e favorecerão o desenvolvimento do seu raciocínio lógico.

O que a experiência também me diz é que quando os alunos gostam da magia matemática incutida em aulas onde a recreação matemática existe, isso leva a que se sejam eles próprios a contar, com entusiasmo, aos colegas e aos familiares os episódios matemáticos ocorridos nessas aulas. Este aspecto contribui necessariamente para o desenvolvimento da comunicação matemática.

Não queria terminar esta reflexão sem, contudo, referir que a matemática recreativa transportada para a sala de aula não deveria ficar apenas pela função de motivação inicial para os conteúdos matemáticos a abordar. Além dessa importante função, também deveria ser criado o ambiente de indagação e pesquisa acerca do porquê da magia matemática ocorrer. É na procura e na compreensão das causas que se aprecia com mais paixão a beleza desta ciência!

Bibliografia

Afonso, P. (2006). A Magia das Conexões Matemáticas — um caso envolvendo os números triangulares. *Educação e Matemática*, Novembro/Dezembro, pp. 35–38.

Afonso, P. (2008a). Conexões Matemáticas: As Potências de Base 2. *Educação e Matemática*, Março/Abril, pp. 33–36.

Afonso, P. (2008b). *O mundo Mágico das Conexões Matemáticas*. Castelo Branco: Instituto Politécnico de Castelo Branco.

APM e IIE (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar. Tradução portuguesa dos Standards do National Council of Teachers of Mathematics*. Lisboa: Autor.

APM e IIE (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática. Tradução portuguesa dos Professional Standards do National Council of Teachers of Mathematics*. Lisboa: Autor.

Balbuena, L. e Coba, M. (1992). *La Matemática Recreativa vista por los alumnos*. Granada: Proyecto Sur de Ediciones.

Barry, S. (1995). *Brincadeiras e Truques para Atrapalhar os teus Amigos*. Lisboa: Replicação.

Devlin, K. (2002). *Matemática — A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Enzensberger, H. (1998). *O Diabo dos Números*. Porto: ASA.

Espinoza, G.; González, G. e Monge, A. (2002). *De la matemática recreativa a la matemática formal: una herramienta didáctica para la enseñanza de la geometria en sétimo año*. Consultado no dia 25 de Junho de 2008 em: *http://www.cimm.ucr.ac.cr/una/tesis/De%20la%20matematica%20recreativa%20a%20la%20matematica%20formal.pdf*

House, P. e Coxford, A. (1995). *Connecting Mathematics across the Curiculum*. Reston: NCTM.

Martín, R. (2006). *Magia fácil para todos*. Málaga: Ediciones Aljibe.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: Autor.

Pappas, T. (1995). *More Joy of Mathematics:exploring mathematics all around you*. San Carlos: Wide World Publishing/Tetra.

Ponte, J. *et al.* (2007). *Programa de Matemática para o ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Santos, N. (1997). *Curiosidades Numéricas*. Porto: Menabel.

Tahan, M. (2003). *Matemática Divertida e Curiosa*. Rio de Janeiro: Dinalivro, 19ª Ed.

Paulo Afonso

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco