Que resposta dar à Carolina?

Eduardo Veloso

Os colegas que gerem o *Pergunta Agora* — um serviço de consultório matemático *online* oferecido pela APM a professores e alunos —, pediram-me para responder à seguinte pergunta da Carolina, uma aluna do terceiro ciclo (12 anos):

Porque é que o baricentro divide uma mediana em duas partes em que uma é o dobro da outra?

Tenho sempre prazer em tentar responder a este tipo de perguntas, pois aprende-se sempre qualquer coisa e é estimulante ver alunos (e colegas) curiosos em perceber a *razão das coisas* e não apenas *como se faz isto ou aquilo*. Mas não é fácil escolher a resposta adequada, pois desconhece-se em geral um conjunto de factores importante: conhecimentos anteriores de quem pergunta, maturidade do aluno ou aluna que faz a pergunta, motivações para fazer uma pergunta específica, etc.

Duas respostas

Pensei numa resposta a dar, redigi uma primeira versão e enviei para crítica aos colegas do *Grupo de Trabalho de Geometria* da APM e a outros colegas que sei que gostam destas coisas. É a *Resposta à Catarina — versão* A (ver caixa). Como não gostava muito desta minha primeira resposta, por razões que explicarei mais à frente, fui fazer uma pesquisa na *Web*. Encontrei, ao consultar os arquivos do *Ask Dr. Math*, um serviço semelhante do *Math Forum*, que nos inspirou — a mim, à Alexandra Pinheiro e ao Fernando Nunes —, no saudoso grupo de trabalho da Internet, a criar o *Pergunta Agora*, uma resposta que, por razões que também darei a seguir, me pareceu melhor estruturada, e resolvi seguir essa estrutura e redigir uma segunda versão (*Resposta à Carolina — versão B*, ver caixa). Acabei por enviar esta versão como resposta do *Pergunta Agora*, pois me parecia definitivamente melhor que a primeira que tinha imaginado. Enviei também para críticas aos mesmos colegas a quem tinha enviado a *versão* A. Da Carolina não tive qualquer reacção. Algum tempo depois, discutimos as duas respostas numa reunião do GTG. Mais do que relatar o que discutimos — sem chegar naturalmente a qualquer conclusão definitva —, esta nota destina-se a suscitar a reflexão dos nossos leitores sobre esta questão: se um dos vossos alunos vos fizesse aquela pergunta, qual vos parece a melhor resposta? Porquê? Que conhecimentos anteriores dos vossos alunos poderiam ser úteis para facilitar essa escolha? Que lacunas tem, a este respeito, o ensino da geometria? Como poderia ser melhorado? Parece-nos que uma tal reflexão pode ter utilidade para o nosso desenvolvimento profissional sobretudo se tiverem a paciência e generosidade de enviar para a revista resultados dessa reflexão, embora infelizmente isso não seja muito habitual nos leitores da *Educação e Matemática* (que até tem uma secção dedicada e essas reacções...).

Estrutura e fundamento das duas respostas

Sabemos que depois do disparate que se fazia antigamente de obrigar os alunos a decorar, na maior parte dos casos sem perceber, as demonstrações de muitas proposições dos *Elementos* de Euclides, passou-se para o extremo oposto em que praticamente, salvo alguns pequenos argumentos isolados, os alunos passam ao lado da demonstração, que deveria ser uma base fundamental do estudo da matemática, em particular da geometria. Mas, precisamente, o que a Carolina está a perguntar é como se demonstra que «*o baricentro divide uma mediana em duas partes em que uma é o dobro da outra*». Portanto, se queremos responder à Carolina, teremos que incluir, obviamente, demonstrações na resposta a dar. Além disso, para quem acredita que o principal objectivo do ensino da Matemática no ensino básico e secundário é a progressiva compreensão da natureza da matemática como ciência, deve tudo fazer para que os alunos possam ir intuindo, a partir de alguma prática — como por exemplo do que é explicado nestas respostas — que para demonstrar alguma afirmação *temos que partir de outras que admitimos como verdadeiras*. Por outras palavras (que não são empregues, evidentemente, no diálogo com os alunos) *a verdade em matemática é relativa*.

Como se vê pelo modo como está formulada a pergunta da Carolina, estamos a admitir que aceita como verdadeiro o facto de que existe um ponto, o baricentro, que pertence às medianas de um triângulo e que o que se pretende demonstrar é que esse ponto divide cada mediana em duas partes, na proporção de um para dois.

Resposta à Carolina: Versão A

1. O que é uma mediana?

Mediana é o segmento que num triângulo une um vértice com o ponto médio do lado oposto. Assim, o segmento CD é uma mediana do triângulo ABC (fig. 1). Como todo o triângulo tem três vértices, tem sempre três medianas (fig. 2).

2. O que é o baricentro?

Repara que no triângulo ABC as três medianas encontram-se num mesmo ponto, a que chamei G. *Isso não acontece por acaso.* As medianas de qualquer triângulo encontram-se sempre num mesmo ponto. Vê na figura 3 quatro exemplos de triângulos diferentes e nota que as medianas se cruzam sempre no mesmo ponto.

Mas como há infinitos triângulos, quatro exemplos não chegam para termos a certeza que a afirmação «as medianas de um triângulo encontram-se sempre num mesmo ponto» é verdade, ou seja é um teorema da matemática. É preciso demonstrar essa afirmação, o que está já feito em muitos livros... Mas se vamos demonstrar tudo nesta resposta só escrevendo um novo livro! Portanto vamos acreditar nesses livros e aceitar que realmente é sempre assim:

As medianas de um triângulo encontram-se sempre num mesmo ponto.

(Se quiseres saber a demonstração, escreve outra vez ao *Pergunta Agora*, que eu respondo-te!)

Pois bem, chama-se baricentro de um triângulo ao ponto de encontro das suas medianas.

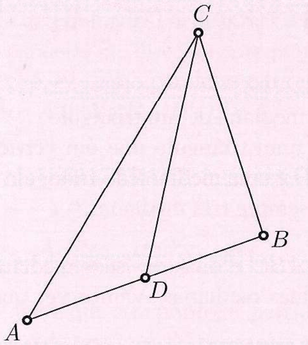

Figura 1

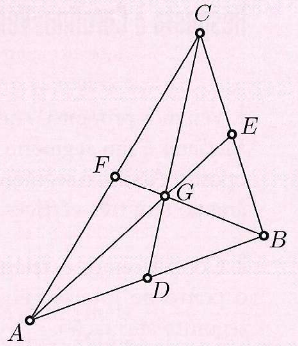

Figura 2

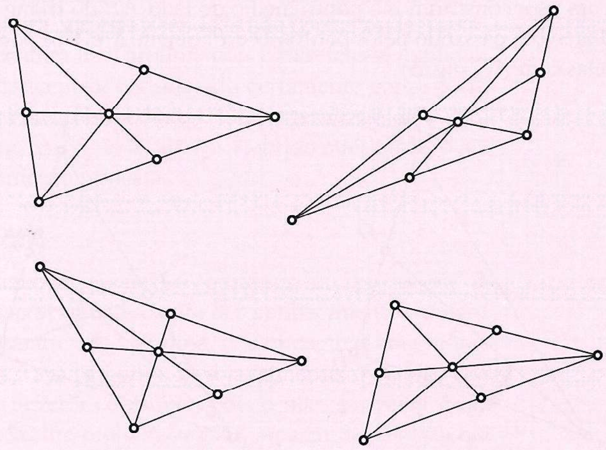
Figura 3

3. Agora, que já sabemos o que são *medianas* de um triângulo e o que é o *baricentro*, posso tentar responder à tua pergunta, que vou repetir aqui:

Porque é que o baricentro divide uma mediana em duas partes em que uma é o dobro da outra?

Vamos desenhar de novo o triângulo ABC com que começámos, mas agora apenas com uma das medianas (CD) desenhada e com o ponto G assinalado. Vamos ainda traçar os segmentos que unem os pontos médios D, E, F (fig. 4). Além disso vou assinalar alguns ângulos.

Repara que o triângulo EFD é mais pequeno mas tem a mesma forma que o triângulo ABC de que partimos (costumamos dizer que são *semelhantes*). Vou fazer algumas afirmações que são verdadeiras, mas que, pela mesma razão anterior não vamos demonstrar (algumas julga-se que foram demonstradas pelo matemático grego Tales há 2600 anos!):

- os lados do triângulo ABC são paralelos aos lados do triângulo EFD (AB a EF, BC a FD e DE a CA) e têm o dobro do comprimento;
- os ângulos assinalados com o mesmo número de tracinhos são iguais: por exemplo, o ângulo EDF é igual ao ângulo BCA.

Para vermos melhor a situação, vamos imaginar que o triângulo EFD era uma peça de plástico e o rodávamos 180° (meia-volta) em torno do ponto G. Obteríamos um novo triângulo $E'F'D'$, igual a EFD mas noutra posição (fig. 5). Percebe-se ainda melhor agora que o triângulo ABC é uma ampliação do triângulo $E'F'D'$. Uma ampliação para o dobro, pois sabemos que o lado AB de ABC tem um comprimento igual ao dobro do lado EF de EFD. Tudo aumenta para o dobro!

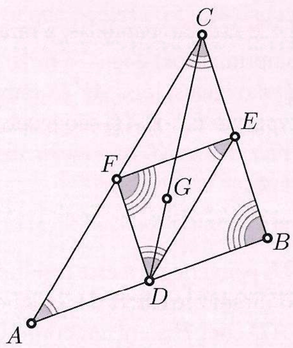

Figura 4

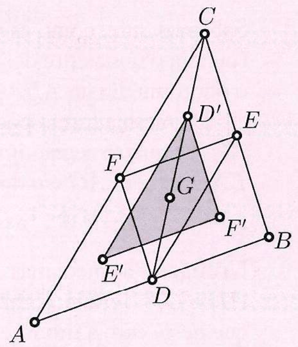

Figura 5

Por exemplo, o segmento GD' transforma-se em GC. e portanto o comprimento de GC é o dobro do comprimento de GD' (que é igual a GD).

Mas isto responde exactamente à tua pergunta!.

Carolina (ou alguma outra pessoa que leia esta resposta), esta tua pergunta é um pouco avançada, julgo, para o 7° ano. Mas é muito interessante e ainda bem que a enviaste. A resposta, como vês, é longa, pois tem que se apoiar em conhecimentos anteriores. Por esta razão, esta resposta deve ser lida devagar, e se não perceberes alguma destas explicações faz outra pergunta, pois teremos muito gosto em te responder.

Resposta à Carolina: Versão B

1. Vejamos primeiro o que é a mediana de um triângulo
Mediana é um segmento que num triângulo une um vértice com o ponto médio do lado oposto. Assim, o segmento AD é uma mediana do triângulo ABC (fig. 1). Como todo o triângulo tem três vértices, tem sempre três medianas.

2. Consideremos o triângulo ABC e duas das suas medianas, AD e BE (fig. 2). Seja G o ponto de intersecção das duas medianas. Vamos ver que, sendo assim, é verdadeira a seguinte afirmação:

O segmento AG tem um comprimento igual ao dobro do comprimento do segmento GD.

Para isso. construímos o ponto médio do lado AB do triângulo, e traçamos paralelas à mediana BE passando pelos pontos D e F. Sejam X e Y os pontos de intersecção dessas paralelas com AC (fig. 3).

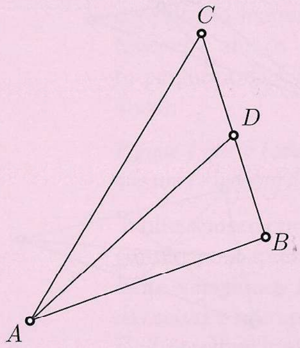

Figura 1

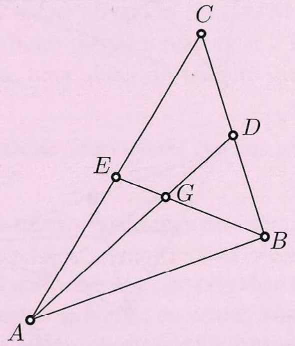

Figura 2

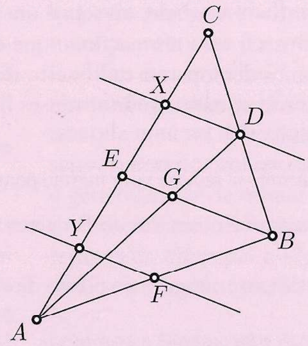

Figura 3

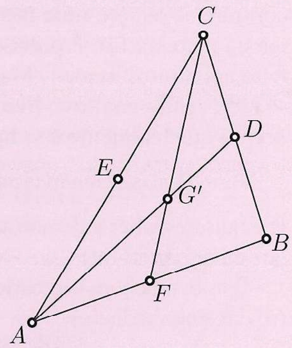

Figura 4

Sabemos que[1], como as rectas FY e BE são paralelas, a razão entre os segmentos AY e YE (ou seja o quociente dos seus comprimentos) é igual à razão entre AF e FB. Mas sendo F é o ponto médio de AB, AF e FB são iguais, logo AY é também igual a YE.

Da mesma forma podíamos ver que EX e XC são iguais, e como E é o ponto médio de AC, os quatro segmentos AY, YE. EX e XC são iguais. E então, como AE é o dobro de EX, também AG é o dobro de GD.

3.
Utilizámos as medianas AD e BE para chegar a este resultado, mas podíamos ter escolhido AD e CF. Teríamos chegado ao mesmo resultado? Certamente que sim, pois suponhamos que neste caso a intersecção de AD com BE era um ponto G' (fig. 4). Por uma demonstração semelhante à anterior, chegaríamos à conclusão que AG' era o dobro de $G'D$. Sendo assim, G tem que coincidir com G'.

Ou seja:

As medianas de um triângulo encontram-se num único ponto.

A esse ponto costuma chamar-se *baricentro*. E como vimos, o baricentro divide cada uma das medianas em duas partes, sendo uma o dobro da outra.

Nota

1. Não há a certeza, mas julga-se que demonstração foi feita pelo geómetra grego Tales há 2600 anos! Podes ver uma demonstração (em inglês!) no *site* *http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookVI/propVI2.html*

Carolina, se tiveres algumas dúvidas sobre esta resposta, diz as tuas dúvidas ao *Pergunta Agora*, pois teremos muito gosto em te responder.

Na *versão* A, portanto, parti desta admissão e assim, depois de recordar a definição de mediana, salientei qual era o nosso *ponto de partida:* que as três medianas, em qualquer triângulo, se encontravam sempre num mesmo ponto. Insisti que admitíamos esse facto como verdadeiro, que era um teorema que estava demonstrado «em muitos livros...» e que não íamos ali demonstrar. Na realidade, estava a pensar no teorema de Ceva, pois a partir dele é imediato que as medianas de um triângulo se encontram num mesmo ponto.

Teorema de Ceva[1]

Seja ABC um triângulo e K, L e M três pontos respectivamente sobre as rectas AB, BC e CA (fig. 1). Consideremos os segmentos orientados AK, KB, BL, LC, CM e MA. Então, as rectas AL, BM e CK encontram-se num mesmo ponto se e só se

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 \qquad (1)$$

Ora, se os pontos K, L, e M são os pontos médios dos lados, é imediato que a igualdade (1) se verifica e daí que as medianas de qualquer triângulo se encontram num mesmo ponto.

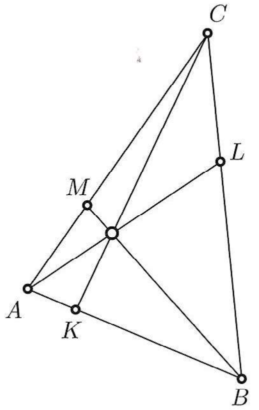

Figura 1

Mas o teorema de Ceva não tem uma demonstração acessível aos alunos do ensino básico, e o próprio enunciado é tudo menos evidente. Foram estas constatações que me levaram a abandonar a ideia de dar esta resposta à Carolina e a procurar outra via para a demonstração.

Ainda relativamente à versão A, a opção de obter a imagem do triângulo medial por uma meia-volta com centro no baricentro deveu-se à minha hesitação em utilizar homotetias de razão negativa, pois desconheço se são correntemente utilizadas no ensino, actualmente. Pareceu-me que por meio desta meia-volta poderia depois recorrer directamente a uma simples ampliação e que isso tornaria mais provável a compreensão da demonstração por parte da Carolina. Mas não tenho a certeza se terá sido uma boa opção.

Quanto à *versão* B, o ponto de partida utilizado é fácil de aceitar sem demonstração. Quando o aprendi pela primeira vez — nos anos quarenta do século passado —, esse resultado era conhecido como teorema de Tales[2], e enunciado (mais ou menos) da seguinte forma:

Os segmentos determinados em duas rectas oblíquas por um feixe de rectas paralelas são directamente proporcionais, ou seja, se as rectas a, b, c, ... são paralelas e intersectam as rectas r e s nos pontos A e A', B e B', C e C', ..., respectivamente, então tem-se

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \cdots$$

Pareceu-me assim que este ponto de partida seria muito mais aceitável que o da *versão* A. No entanto, nesta versão existe um inconveniente: não é assumido de princípio que as medianas de um triângulo se encontram num mesmo ponto, e assim a resposta que está a ser dada não corresponde inteiramente à pergunta da Carolina, pois esta refere-se explicitamente ao baricentro, considerado certamente como ponto de encontro das três medianas. Ora, o resultado de que tal ponto existe, na *versão* B, apenas é obtido mais tarde, e não quando se inicia a resposta.

Moral desta nota

Verdadeiramente, apenas o professor ou professora da Carolina, supostamente ciente dos conhecimentos e maturidade matemática da Carolina, pode imaginar uma resposta adequada à sua pergunta. Desejavelmente, o diálogo com a Carolina deveria continuar, pois o mais provável é que novas dúvidas lhe tenham surgido, a partir da resposta que foi dada.

Que pensa de tudo isto, leitor? Quer propor uma resposta alternativa que poderia ter sido dada à Catarina?

Notas

1. Os irmãos Ceva, Giovanni (1647–1734) e Tommaso (1648–1737), foram dois matemáticos italianos. Giovanni ficou célebre por este teorema, que serve de ponto de partida para a demonsração de diversos teoremas da geometria elementar.

2. Nos *Elementos* de Euclides, trata-se da proposição nº 2 do livro VI:

   Se uma recta r é paralela ao lado AB de um triângulo e intersecta os outros dois lados AC e BC nos pontos D e E respectivamente, então AD está para CD como BE está para CE. E reciprocamente (fig. 2).

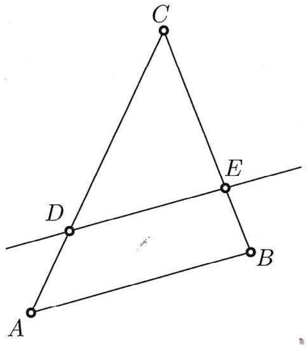

Figura 2

Eduardo Veloso