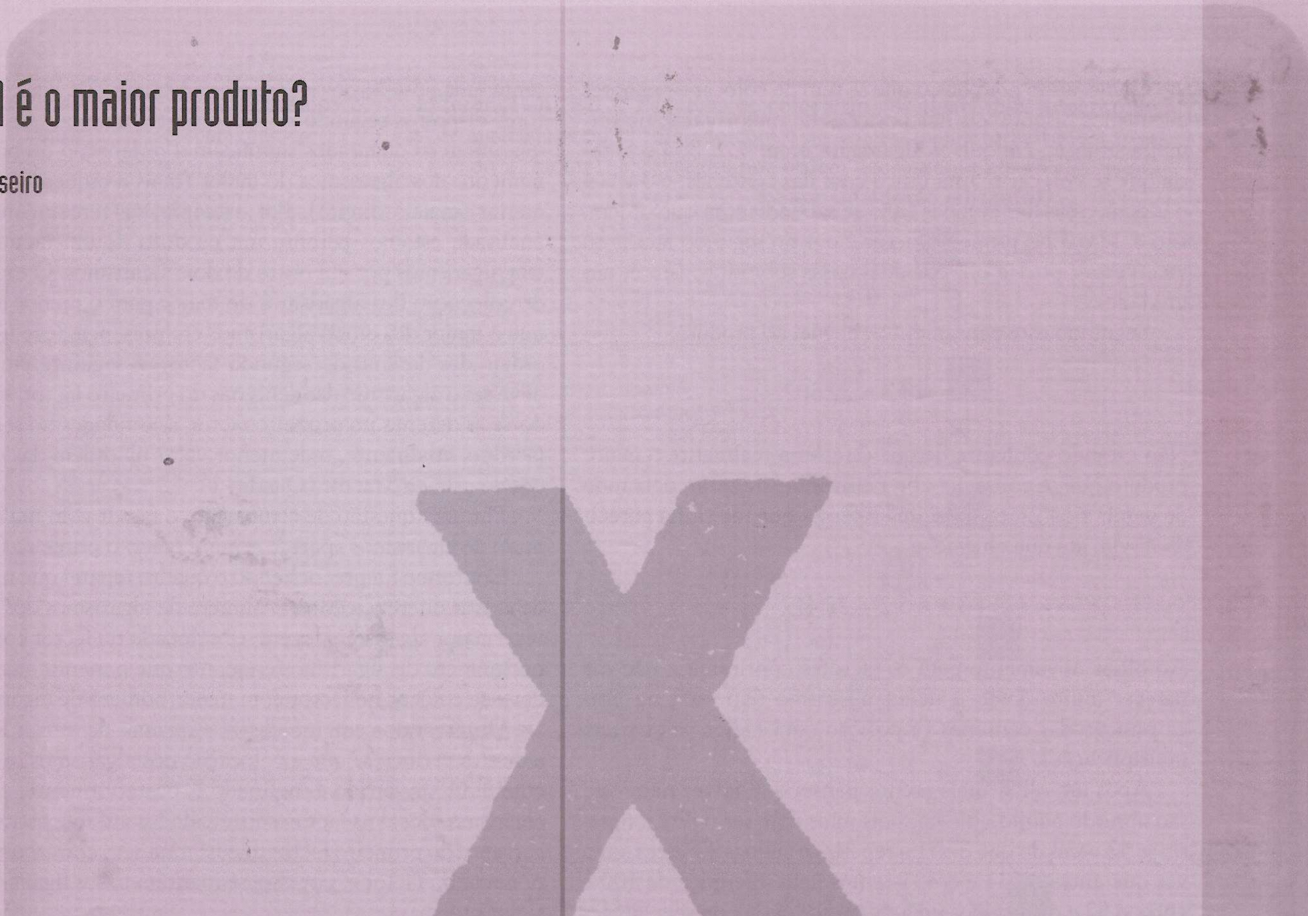
# Qual é o maior produto?

Ana Caseiro



Certo dia ao preparar uma das minhas aulas deparei-me com um desafio que me pareceu extremamente interessante, não só para mim como para propor aos meus alunos.

O desafio designava-se «Tenta-estima-tenta» e consistia em pedir que em cada alínea da questão 1 se descobrisse como distribuir 5 algarismos dados num esquema de multiplicação _ _ _ × _ _, de modo a obter-se o maior e o menor produto. Na questão 2 era pedido que se referisse como distribuir 5 algarismos dados de modo a obter o maior e o menor quociente e com 6 algarismos dados a maior e a menor soma e a maior e a menor diferença.

Ao longo de todo o texto vai ser necessário utilizar várias vezes a expressão «maior (ou menor) número representado pelo algarismo» que irei substituir por maior (ou menor) algarismo.

No caso da divisão pareceu-me evidente que para obter o maior quociente teria de colocar os algarismos do maior para o menor pela seguinte ordem: 5° 4° 3° 2° : 1°, ou seja, se pretendo obter o maior quociente possível torna-se necessário ter o maior número possível a dividir pelo menor dos algarismos; no caso de pretender obter o menor quociente, tenho de ter o menor número possível a dividir pelo maior número que se consiga formar, tendo de se dispor os algarismos do seguinte modo: 1° 2° 3° : 5° 4°.

No que diz respeito à adição pareceu-me evidente que para obter a maior soma teria de ter as maiores parcelas que fosse possível formar. Na situação de cinco algarismos, para formar duas parcelas: uma com três algarismos e outra com dois, o procedimento é colocar o maior algarismo na posição de maior valor (centenas), os dois seguintes indiferentemente na posição das dezenas dos dois números e, finalmente, os dois algarismos menores indiferentemente na posição das unidades. Exemplo:

$$\begin{array}{r}542\\+31\\\hline 573\end{array}\qquad\begin{array}{r}541\\+32\\\hline 573\end{array}\qquad\begin{array}{r}532\\+41\\\hline 573\end{array}\qquad\begin{array}{r}531\\+42\\\hline 573\end{array}$$

Deste modo se chega à conclusão que não existe apenas uma hipótese de resposta certa, mas sim várias (no exemplo apresentado, quatro). Com o mesmo raciocínio se verifica que para se ter a menor soma se tem de utilizar as menores parcelas que se consigam formar e, do mesmo modo, será indiferente em termos de resultado trocar entre si os algarismos em posições do mesmo valor em ambas as parcelas.

Na subtracção, para obter a maior diferença tornou-se evidente que teria de colocar o maior número que conseguisse formar como aditivo e o menor número que se pudesse formar como subtractivo. Por outro lado, para obter a menor diferença é necessário formar os dois números o mais próximo possível um do outro, ou seja, formar como aditivo o menor número possível e como subtractivo o maior número possível.

Verificando todas as situações apresentadas o grande desafio que desperta real interesse prende-se com a descoberta do maior e do menor produto e, como tal, a ordem pela qual os algarismos devem ser colocados para se obter tais resultados.

Começando por pensar que se tem de colocar os maiores algarismos disponíveis nas posições de maior valor, na primeira situação em que os algarismos eram 1, 2, 3, 4 e 5, teria que se colocar o 5 na única casa das centenas, o 3 e o 4 nas duas casas das dezenas (não se sabendo com que ordem, isto é, se o 3 no primeiro factor e o 4 no segundo factor ou vice-versa) e o 1 e o 2 nas duas casas sobrantes, isto é, nas unidades.

Seguindo este pensamento cheguei ao produto:

$$5\,3\,1 \times 4\,2 = \mathit{22\,302}.$$

Não estando confiante de que este seria realmente o maior produto que se consegue obter continuei a tentar, deixando de seguir a constatação acima referida que me tinha parecido óbvia, até que cheguei a

$$4\,3\,1 \times 5\,2 = \mathit{22\,412}$$

Ao olhar novamente para os factores continuou a não me parecer muito óbvio o maior algarismo não estar na única posição das centenas (a posição com maior valor nesta multiplicação).

Após um olhar mais atento pensei que talvez não fosse tão absurdo aquilo que via, pois mais vale ter o 431 a repetir-se 52 vezes do que o 531 a repetir-se apenas 42 vezes, uma vez que entre o 531 e o 431 temos uma diferença de 100 e entre o 52 e o 42 temos uma diferença de 10, ou seja, de dez vezes o outro factor.

Tal constatação parece levar-nos a pensar que só acontece com algarismos consecutivos, pois se trabalhar com outros algarismos a diferença entre os factores das duas situações já iria ser superior o que talvez fizesse com que já não fosse vantajosa essa troca.

Experimentei, então, com os algarismos dados na alínea B: 2, 4, 5, 6 e 9. Depois de muito testar verifiquei que para obter o maior produto teria de colocar os algarismos segundo a mesma ordem estabelecida anteriormente (na alínea A do desafio), ou seja, cheguei a:

$$6\,5\,2 \times 9\,4$$

Depois de chegar a este produto, experimentei com outros algarismos (mas sempre apenas com 5 algarismos) tendo chegado à conclusão que a ordem de distribuição dos algarismos se mantém constante, sendo os algarismos apresentados por ordem crescente, ou seja, o 1° o menor e o 5° o maior:

$$4°\ 3°\ 1° \times 5°\ 2°$$

Para perceber se esta regra se mantinha constante utilizando outro número de algarismos fui experimentando várias situações que foram desde os dois factores com o mesmo número de algarismos até aos dois factores com uma diferença de quatro algarismos. No quadro síntese seguinte, onde sistematizo todas as experiências feitas, cada quadrado representa uma posição dos algarismos nos numerais, em dois factores dispostos segundo o algoritmo tradicional. As linhas que unem os quadrados significam a ordenação do posicionamento dos algarismos do maior (mais à esquerda) para o menor (mais à direita). Por exemplo, na terceira situação analisada estamos perante um produto de um factor com três algarismos por um outro de dois algarismos. O esquema de colocação dos algarismos do maior para o menor mostra que o maior dos cinco algarismos em presença deve ficar na ordem das dezenas do segundo factor; o seguinte em valor deve ser o algarismo das centenas do primeiro factor, seguindo-se as dezenas no primeiro factor, as unidades no segundo factor e, finalmente, o de menor valor na ordem das unidades do primeiro factor (Quadro 1).

Por uma questão de arrumação, o factor com maior número de algarismos aparece sempre como o primeiro factor.

Conforme fui preenchendo o quadro reparei que no caso de existir diferença entre o número de algarismos dos factores o maior algarismo deverá ser colocado no factor com menor número de algarismos enquanto que o menor algarismo deve-se colocar no factor com maior número de algarismos.

Observando cada um desses esquemas da esquerda para a direita verifica-se que a colocação dos algarismos se inicia com um U invertido e inclinado e, posteriormente, com os algarismos dos dois factores intercalados até só existirem algarismos do primeiro factor que ficaram sem correspondente no segundo factor e, por isso, se mantêm todos ligados entre si por ordem.

Ao analisar novamente os resultados obtidos verifica-se que quando os dois factores têm igual número de algarismos a regra de colocação dos algarismos é a de que o factor que contém o menor algarismo também contém o maior, ao contrário do que acontece quando existe diferença entre o número de algarismos dos factores.

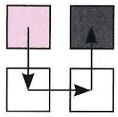
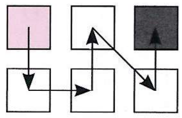
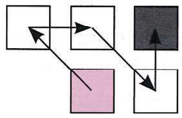
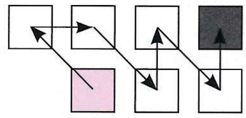
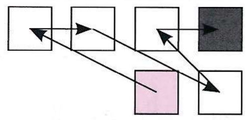
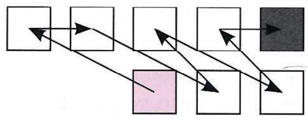
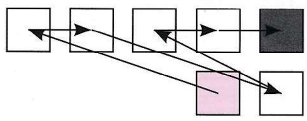
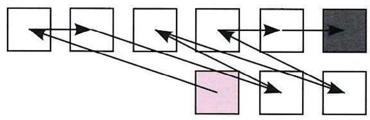
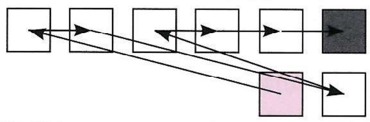
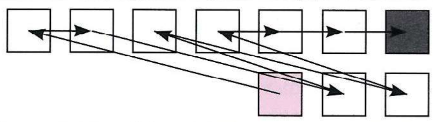
Para mim foi bastante interessante chegar a esta regularidade pois nunca me tinha ocorrido que existisse sempre uma determinada ordem para colocar os algarismos, independentemente da sua quantidade, de modo a obter o maior produto possível.

Mas qual a explicação matemática para esta regularidade se manter? Porque é que o maior algarismo tem de ficar no factor com menor número de algarismos? Não faria mais sentido ser ao contrário, isto é, colocar o maior algarismo no maior factor? Matematicamente é possível provar todas estas constatações?

Para tentar responder a estas questões explorei mais pormenorizadamente, que operações ocorriam em cada um dos casos e qual a mais vantajosa para a nossa situação-problema, ou seja, qual a que daria o maior produto.

Comecei por pensar no desafio que me tinha sido colocado inicialmente, ou seja, um factor com três algarismos e o outro com dois. Como me é pedido o maior produto, sei que os factores têm de começar com os maiores algarismos, embora ainda não saiba com que ordem colocá-los.

Considerando os algarismos ordenados do menor para o maior como: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, e $\boldsymbol{e}$, temos as seguintes possibilidades de colocação dos algarismos, tendo em consideração que o

| Nº algarismos 1º factor | Nº algarismos 2º factor | Diferença entre o nº de algarismos do 1º e do 2º factor | Esquema de colocação dos algarismos (o percurso é iniciado com o algarismo maior (quadrado a rosa) e segue por ordem decrescente até ao algarismo menor (quadrado cinzento)) |
|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 0 |  |
| 3 | 3 | 0 |  |
| 3 | 2 | 1 |  |
| 4 | 3 | 1 |  |
| 4 | 2 | 2 |  |
| 5 | 3 | 2 |  |
| 5 | 2 | 3 |  |
| 6 | 3 | 3 |  |
| 6 | 2 | 4 |  |
| 7 | 3 | 4 |  |

Quadro 1. Esquema de colocação dos algarismos em produtos de dois factores

*a* (algarismo de menor valor absoluto) só poderá ficar numa posição, enquanto que o ***d*** e o ***e*** podem ficar em duas posições distintas (trocando entre si), assim como o ***b*** e o ***c***:

A

$$\begin{array}{r} d\,b\,a \\ \times \quad e\,c \\ \hline cd\ cb\ ca \\ ed\ eb\ ea \end{array}$$

B

$$\begin{array}{r} e\,b\,a \\ \times \quad d\,c \\ \hline ce\ cb\ ca \\ de\ db\ da \end{array}$$

C

$$\begin{array}{r} d\,c\,a \\ \times \quad e\,b \\ \hline bd\ bc\ ba \\ ed\ ec\ ea \end{array}$$

D

$$\begin{array}{r} e\,c\,a \\ \times \quad d\,b \\ \hline be\ bc\ ba \\ de\ dc\ da \end{array}$$

O número obtido que vai ficar na posição com maior valor relativo (o resultante do produto **ed** ou **de** (igual)) é igual em todas as hipóteses, portanto não é este que irá influenciar no resultado final.

Observando a posição relativa seguinte, verifica-se que já existe uma diferença:

- A = D → be + dc
- B = C → bd + ec

**a b c d e**

Como **e** é o maior algarismo convém tê-lo sempre a multiplicar pelo maior algarismo possível, por isso, há vantagem nas hipóteses *B* e C, tal como se pode verificar no esquema acima apresentado. Vejamos alguns exemplos numéricos:

*1*

**1 2 3 4 5**

$2 \times 5 + 3 \times 4 = 22$

$2 \times 4 + 3 \times 5 = 23$

*2*

**1 2 3 8 9**

$2 \times 9 + 3 \times 8 = 42$

$2 \times 8 + 3 \times 9 = 43$

Pensando que **b** e **c** se mantêm constantes nos factores, o que influencia o produto é a distribuição de **d** e de **e**, que apenas podem ficar um a multiplicar por **b** e o outro por **c**.

Como os algarismos se encontram ordenados é fácil perceber que o mais rentável é ter o **e** a multiplicar pelo maior algarismo possível, neste caso o **c**.

Sendo assim, as hipóteses *A* e *D* já se encontram excluídas. Resta-nos saber entre as hipóteses *B* e C qual a mais vantajosa.

B

$$\begin{array}{r} e\,b\,a \\ \times \quad d\,c \\ \hline ce\ cb\ ca \\ de\ db\ da \end{array}$$

C

$$\begin{array}{r} d\,c\,a \\ \times \quad e\,b \\ \hline bd\ bc\ ba \\ ed\ ec\ ea \end{array}$$

Como é possível verificar estas duas situações diferem apenas nas zonas assinaladas:

**a b c d e** **a b c d e**

Se repararmos, na primeira situação o C fica em vantagem comparativamente com o *B* enquanto que na segunda situação apresentada é o C que fica em desvantagem. Mas qual será a situação com maior interferência no resultado final? A primeira porque se está a trabalhar numa posição superior, ou seja, nas dezenas.

Neste caso, e verificando todas as hipóteses, chega-se à conclusão que a possibilidade mais vantajosa para se obter o maior produto é a C, ou seja:

$$\begin{array}{r} d\,c\,a \\ \times \quad e\,b \\ \hline \end{array}$$

(tal como estava referido anteriormente no quadro 1)

Mas será que esta regularidade se mantém quando a diferença entre o número de algarismos de cada factor é outra? Pensemos num produto com um factor com quatro algarismos e outro com dois algarismos, ou seja, onde a diferença entre o número de algarismos dos factores é de 2.

Neste caso, e seguindo o mesmo raciocínio, os maiores algarismos têm de ser colocados nas posições com maior valor de cada factor e assim continuamente.

Considerando os algarismos ordenados do menor para o maior como: ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, e e ***f***, temos as seguintes possibilidades de colocação dos algarismos:

A

$$\begin{array}{r} e\,c\,b\,a \\ \times \quad f\,d \\ \hline de\ dc\ db\ da \\ fe\ fc\ fb\ fa \end{array}$$

B

$$\begin{array}{r} f\,d\,b\,a \\ \times \quad e\,c \\ \hline cf\ cd\ cb\ ca \\ ef\ ed\ eb\ ea \end{array}$$

C

$$\begin{array}{r} e\,d\,b\,a \\ \times \quad f\,c \\ \hline ce\ cd\ cb\ ca \\ fe\ fd\ fb\ fa \end{array}$$

D

$$\begin{array}{r} f\,c\,b\,a \\ \times \quad e\,d \\ \hline df\ dc\ db\ da \\ ef\ ec\ eb\ ea \end{array}$$

Tal como no primeiro caso estudado, o número obtido que vai ficar na posição com maior valor (o resultante do produto **ef** ou **fe** (igual)) é igual em todas as hipóteses, portanto não é este que irá influenciar no resultado final.

No que diz respeito à posição seguinte, verifica-se que já existe uma diferença:

- A = D → de + cf
- B = C → df + ce

**a b c d e f**

Tal como já vimos anteriormente é vantajoso ter o maior algarismo (**f**) a multiplicar pelo maior algarismo restante possível, neste caso entre **c** e **d** é preferível multiplicá-lo por **d** e isso só se verifica nas hipóteses *B* e *C*, ficando as restantes duas já excluídas.

| B | | C | |
|---|---|---|---|
| | f d b a | | e d b a |
| × | e c | × | f c |
| | cf cd cb ca | | ce cd cb ca |
| | ef ed eb ea | | fe fd fb fa |

Como é possível verificar estas duas situações diferem apenas nas zonas assinaladas, mas como já vimos anteriormente o que nos interessa verificar é sempre a diferença entre as hipóteses que se encontrem na posição com maior valor possível. Deste modo, será a seguinte diferença:

a b c d e f

Neste caso, e verificando todas as hipóteses, chega-se à conclusão que a possibilidade mais vantajosa para se obter o maior produto é a C, ou seja, aquela que apresenta, neste último caso, o **b** a multiplicar pelo maior dos algarismos (**f**) uma vez que na hipótese *B* este aparece a multiplicar pelo segundo maior algarismo (e), logo, indo dar um produto menor do que o primeiro. Deste modo, a situação mais vantajosa é a C:

| | |
|---|---|
| | e d b a |
| × | f c |
| | ce cd cb ca |
| | fe fd fb fa |

(tal como estava referido anteriormente no quadro 1)

Daqui se verifica que o número de algarismos do maior factor não altera a posição anteriormente estudada. Resta-nos, então, saber se isso se altera quando os dois factores têm igual número de algarismos.

Neste caso, e seguindo o mesmo raciocínio, os maiores algarismos têm de ser colocados nas posições com maior valor de cada factor e assim continuamente.

Considerando os algarismos ordenados do menor para o maior como: ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, ***e*** e ***f***, temos as seguintes possibilidades de colocação dos algarismos:

| A | | B | |
|---|---|---|---|
| | e c a | | f c a |
| × | f d b | × | e d b |
| | be bc ba | | bf bc ba |
| | de dc da | | df dc da |
| | fe fc fa | | ef ec ea |

| C | | D | |
|---|---|---|---|
| | e b a | | f d a |
| × | f c b | × | e c b |
| | be bd ba | | bf bd ba |
| | ce cd da | | cf cd ca |
| | fe fd fa | | cf cd ea |

Tal como nos restantes casos estudados, o número obtido que vai ficar na posição com maior valor é igual em todas as hipóteses, portanto não é este que irá influenciar no resultado final.

No que diz respeito à posição seguinte, verifica-se que já existe uma diferença:

- A = D → de + cf
- B = C → df + ce

a b c d e f

Tal como já vimos anteriormente é vantajoso ter o maior algarismo (**f**) a multiplicar pelo maior algarismo restante possível, neste caso entre **c** e **d** é preferível multiplicá-lo por **d** e isso só se verifica nas hipóteses *B* e *C*, ficando as restantes duas já excluídas.

| B | | C | |
|---|---|---|---|
| | f c a | | c b a |
| × | e d b | × | f c b |
| | bf bc ba | | be bd ba |
| | df dc da | | ce cd da |
| | ef ec ea | | fe fd fa |

Como é possível verificar estas duas situações diferem apenas nas zonas assinaladas, mas como já vimos anteriormente o que nos interessa verificar é sempre a diferença entre as hipóteses que se encontrem na posição com maior valor possível. Deste modo, será a seguinte diferença:

a b c d e f

Neste caso, e verificando todas as hipóteses, chega-se à conclusão que a possibilidade mais vantajosa para se obter o maior produto é a *B*, ou seja, aquela que apresenta, neste último caso, o b a multiplicar pelo maior dos algarismos (**f**) uma vez que na hipótese *C* este aparece a multiplicar pelo segundo maior algarismo (**e**), logo, indo dar um produto menor do que o primeiro. Deste modo, a situação mais vantajosa é a *B*:

| | |
|---|---|
| | f c a |
| × | e d b |
| | bf bc ba |
| | df dc da |
| | ef ec ea |

(tal como estava referido anteriormente no quadro síntese)

E assim se comprova que realmente existe uma única maneira de colocar os algarismos de modo a obter o maior produto possível entre dois factores, independentemente do número de algarismos dos dois factores e da diferença entre esse número.

Ana Caseiro, ESE de Lisboa