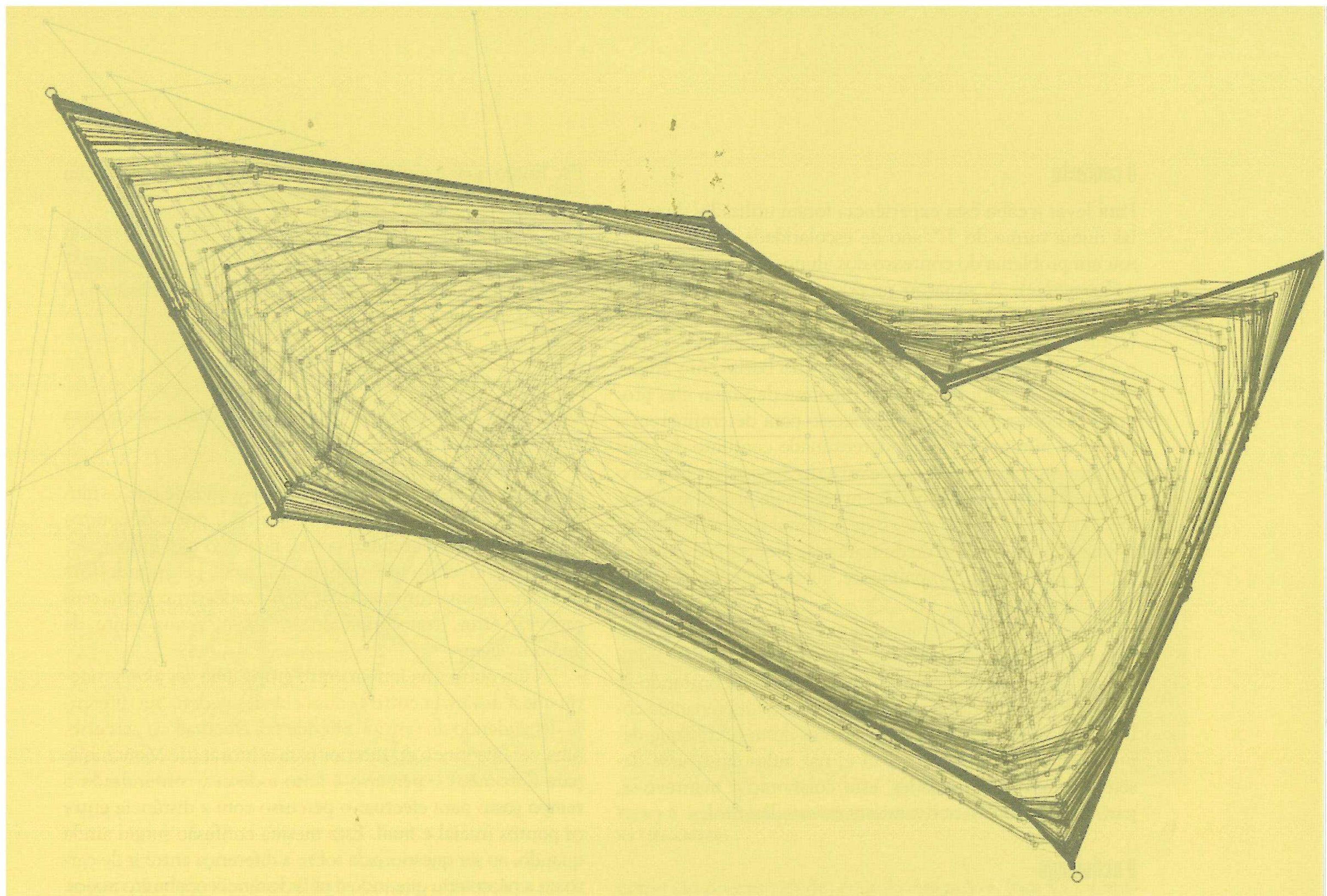

# O problema do caixeiro-viajante: uma abordagem no 3.º ciclo

**Rui Feiteira**
**Carlos Miguel Ribeiro**

No programa de Matemática para o ensino básico, em todos os ciclos, podemos encontrar referências à necessidade de utilizar problemas do contexto e realidade próxima do dia-a-dia dos alunos, bem como ao facto de os alunos deverem modelar matematicamente estas situações. No novo do programa de matemática (Ponte *et al.*, 2007), encontramos também, como aliás não poderia deixar de ser, referências a esta necessidade.

«Os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações. Isto é, devem ser capazes de: (...) usar representações para modelar, interpretar e reflectir sobre situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais.» (p. 5)

Esta modelação matemática de situações diárias poderá ser efectuada utilizando a teoria de grafos, porém, nos programas de Matemática, não é realizada referência alguma à possibilidade da sua utilização, exceptuando-se o programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS) (DES, 2001).

Imbuídos num espírito de aventura e de vontade de proporcionar aos alunos vivências ricas e diversificadas, resolvemos unir esforços e desenvolver um conjunto de tarefas que possibilitasse aos alunos novas experiências e situações relacionando a proporcionalidade directa (tema do actual programa do 7.º ano) com a utilização de diversas representações matemáticas, nomeadamente os grafos. Aulas que nos permitem encorajar os alunos a criar, explorar e explicar distintas representações que lhes são efectivamente úteis e possuem para si significado, transformam-se em aulas em que a atribuição, discussão e negociação de significados representa um papel fundamental no processo de aprendizagem dos alunos, permitindo que estes não se limitem a considerar como suas as representações do professor (Doerr & English, 2006).

Neste texto apresentamos um breve relato das actividades desenvolvidas pelos alunos aquando da resolução da tarefa em que relacionam a proporcionalidade directa com a teoria de grafos.

## O contexto

Para levar a cabo esta experiência foram utilizadas duas aulas numa turma do 7.º ano de escolaridade onde se utilizou um problema do contexto dos alunos (relacionado com o *Zoomarine*). A situação proposta relacionava-se com a proporcionalidade directa, mais propriamente com escalas (conteúdo que a turma estava a abordar naquele momento), e a leitura e interpretação de mapas (do Barlavento Algarvio), onde lhes foi facultada a hipótese de serem eles próprios os construtores de um processo para determinarem a distância mínima entre um determinado conjunto de cidades, por onde passam os autocarros do *Zoomarine*. Este tipo de problemas é denominado, em teoria de grafos, por Problema do caixeiro-viajante. É de salientar que, em momento algum, previamente ou durante este processo de construção, foi introduzido, formalmente, algum conceito de teoria de grafos.

Estas actividades foram realizadas por vinte e um alunos, de quatro nacionalidades diferentes com idades compreendidas entre os doze e os catorze anos, encontrando-se os alunos distribuídos por grupos. A tarefa foi preparada colaborativamente entre os dois autores deste texto (que denominamos aqui por P1 e P2) e, nas aulas em que se desenvolveram as actividades, esta colaboração manteve-se, participando ambos activamente no seu desenrolar.

## A actividade

Para o desenvolvimento da actividade foi distribuído parte de um mapa do Algarve, à escala, e um conjunto sequenciado de questões a que os alunos teriam de responder com o objectivo final de determinar um percurso mínimo para os autocarros do *Zoomarine* de modo a poluírem o mínimo (consumirem a mínima quantidade de combustível ou efectuarem o número mínimo de *km*). O mapa tinha uma escala de 1:400000 (figura 1).

Na primeira actividade, os alunos, utilizando a escala, tinham de determinar as distâncias, em linha recta, entre as cidades de Portimão, Monchique e Silves, que correspondiam às cidades por onde o autocarro do *Zoomarine* teria de deslocar-se de modo a recolher os visitantes. Sem grande dificuldade, os alunos modelaram a situação, efectuaram as medições e transformaram as medidas obtidas em distâncias reais (em linha recta, utilizando a escala fornecida).

Ao efectuarem as medições e conversões, a distância real em linha recta, entre Portimão e Monchique, obtida foi de 2200000*cm*, porém um dos grupos, ao efectuar a conversão para *km*, indicou que esta distância era de 2,2*km*. Confrontado com esta resposta, o professor inquiriu-os sobre a razoabilidade da mesma, efectuando um paralelismo com uma realidade ainda mais próxima:

*P1*: Então qual a distância entre Portimão e Monchique?

*Diogo*: 2,2km.

*P1*: Porque dizes isso?

*Diogo (indica o cálculo)*: Porque isto [2200000cm] são 2,2km.

*P1*: Então qual é a distância aqui de Portimão até à Rocha [praia da Rocha]?

*Luís*: Eu de skate demoro aí uma meia hora logo deve ser um km e meio...

*P1*: Então e acham que daqui até Monchique a distância é pouco maior?

*Pedro*: Não, é muito mais!

*Luís*: É aí umas dez vezes mais...

*Diogo (indica a conversão)*: Então isto está mal... não podem ser 2,2km...

Ao efectuar um paralelismo com uma realidade que os alunos sentem como sua tornou-se possível, por esta comparação, levá-los a entender, por si, que algo não estava correcto na conversão que tinham realizado, permitindo-lhes deste modo uma construção de significados através dos seus próprios erros, transformando-os, assim, numa fonte de aprendizagem.

A um outro nível, num outro grupo uma das alunas referiu que a distância entre as duas cidades poderia ser diferente dependendo do sentido em que era efectuado o percurso, uma vez que vindo do interior para o litoral (de Monchique para Portimão) o percurso é feito a descer, confundindo o tempo gasto para efectuar o percurso com a distância entre os pontos inicial e final. Esta mesma confusão surgiu ainda quando, ao ser questionada sobre a diferença entre ir de carro ou a pé, referiu que indo a pé a distância era muito maior. Mais uma vez as dúvidas foram esclarecidas, mas desta feita por uma das colegas de grupo, utilizando uma situação vivida por ambas e que se prendia com o percurso que faziam para a escola — a pé ou de carro.

Depois de os alunos terem calculado todas as distâncias, e com o objectivo de os contextualizar ao problema do percurso mínimo a realizar entre três cidades (percurso mais ecológico), foi-lhes pedido que indicassem os trajectos diferentes que o autocarro poderia fazer entre as três cidades. Os alunos recorreram ao mapa para efectuarem a modelação da situação — sobrepuseram uma folha branca ao mapa, desenharam os pontos representando as cidades e uniram-nos pelos segmentos de recta que determinam as distâncias, em linha recta, entre cada par de cidades (Figura 2).

Ao efectuarem a sobreposição para modelarem a situação, os alunos evidenciam já uma compreensão intuitiva do facto de que para simplificar a situação poderiam utilizar um modelo representativo da mesma, simplificando-a.

Esta actividade não gerou dificuldade uma vez que todos os grupos indicaram os dois possíveis trajectos, para o autocarro, partindo de Portimão, dizendo inclusivamente que era apenas um, pois variava somente o sentido.

De forma a tornar a situação ainda mais real, foram introduzidas novas informações e questões, originando uma segunda tarefa. Como, na realidade, os autocarros do *Zoomarine* partem e chegam ao parque aquático que se localiza perto da Guia, os alunos foram questionados sobre que alterações teriam de fazer aos percursos indicados anteriormen-

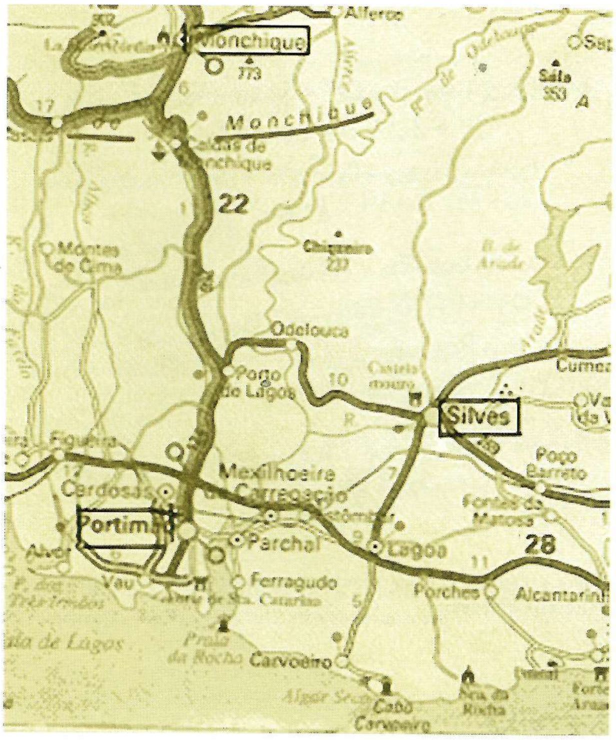


Figura 1

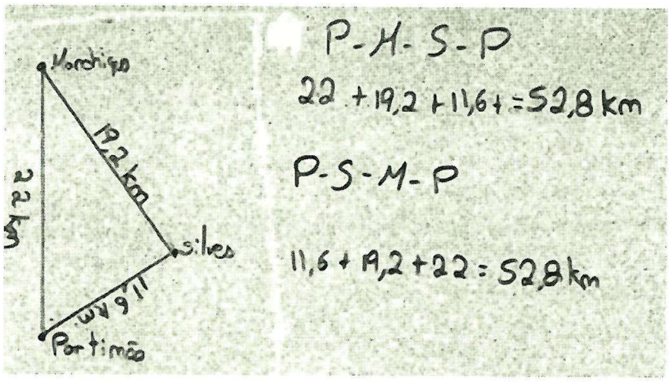


Figura 2. Trajecto(s) possível(is) entre as três cidades

te para os adequarem à realidade, ou seja, o autocarro partir e chegar à Guia.

Esta nova tarefa (levar os alunos a adaptar um enunciado à realidade efectiva e que é do seu contexto) estava directamente relacionada com os nossos objectivos de introdução do estudo dos grafos neste ano de escolaridade e também com o desejo de percebermos até que ponto estes alunos estariam aptos a modelar uma situação do seu contexto e a construir os processos (algoritmos) que lhes permitissem determinar o percurso mais curto entre um determinado conjunto de cidades (que no caso modelaram por pontos). Uma vez que tinham sido os próprios alunos os dinamizadores das discussões ocorridas, não sendo portanto possível que tomassem para si as representações dos professores, quando lhes foi solicitado que indicassem os percursos possíveis para o autocarro, de forma a garantirem o percurso mínimo, modelaram a situação sem dificuldades.

Para determinar o percurso mínimo os grupos seguiram duas estratégias distintas: (a) determinar todos os percursos que o autocarro poderia fazer para depois escolher aquele que melhor serviria os seus interesses e (b) encontrar uma estratégia *«rápida»* que lhes indicasse o melhor percurso.

A primeira hipótese implicava o registo de todos os percursos possíveis entre estas quatro cidades (uma vez que o autocarro iniciava e terminava a viagem na mesma cidade, passando por todas as outras uma só vez — circuito Hamiltoneano — e não considerando um modelo circular, teremos de registar cinco posições distintas, onde a primeira e a última se repetem), ou seja, uma listagem por exaustão, que como são poucas cidades é ainda exequível. Esta foi a estratégia seguida pela maioria dos grupos.

Um dos grupos, porém, seguiu uma estratégia bastante distinta que era, para os elementos do grupo, a melhor, pois desse modo não tinham de efectuar tantos cálculos. O aparecimento desta estratégia foi despoletado pelo tipo de diálogo entre os alunos e o professor, que ao devolver a questão as levou a equacionar novas hipóteses.

*Rita:* São muitos [percursos], professor... Para descobrir o melhor temos que fazê-los todos [percursos]?

*P2:* O que acham...?

*Mariana:* já sei, já sei... vá-se embora professor, já o chamamos.

(...)

*Rita [indica a figura]:* Professor, já está. Já descobrimos!

*P2:* Explica lá como é que pensaram.

*Mariana:* Pensei nos mais curtos...

*P2:* Nos mais curtos... Porquê esses?

*Mariana:* Oh, professor... não comece... evitei os mais longos. Assim vou sempre pelos mais curtos... e ando menos!

Estas distintas estratégias foram apresentadas à turma pelos elementos de cada grupo, o que possibilitou a todos «conhecer e compreender os diferentes tipos de representações, ser capazes de as utilizar em diferentes situações e de seleccionar a representação mais adequada à situação.» (Ponte *et al.*, 2007, p. 5)

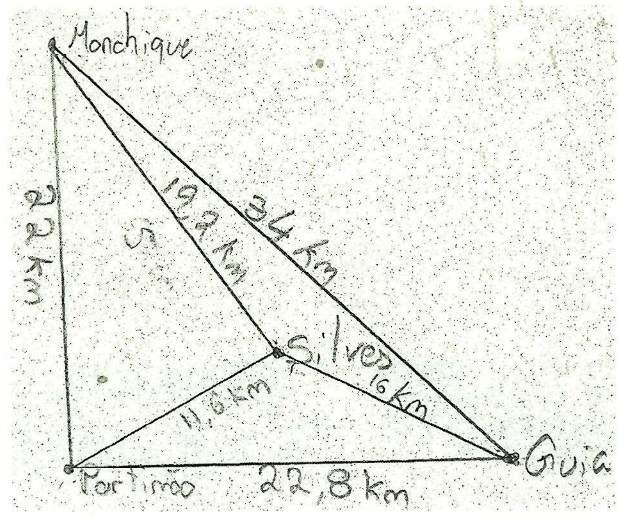


Figura 3. Distâncias entre as quatro cidades

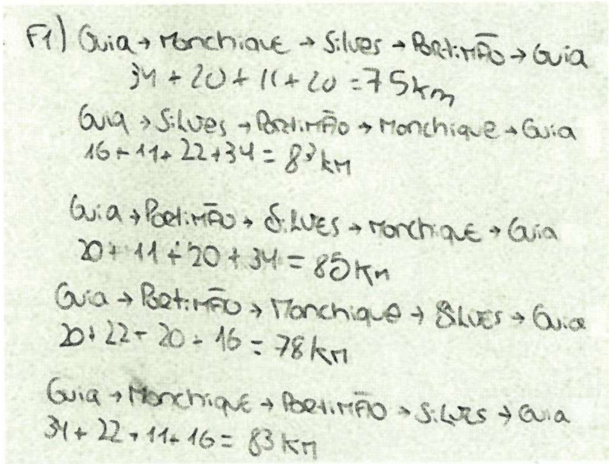


Figura 4. Cálculo do comprimento de todos os circuitos possíveis entre as 4 cidades

As duas estratégias descobertas pelos grupos correspondem a dois dos algoritmos existentes para determinar a distância mínima entre um conjunto de cidade (solucionar o problema do caixeiro viajante). O primeiro fornece a solução óptima, apesar de muito trabalhoso, pois é um método exaustivo, enquanto que no segundo — denominado algoritmo do vizinho mais próximo —, procurarmos sempre a cidade mais próxima do local em que nos encontramos, mas nem sempre obtemos a solução óptima. Este último poderá não ser a melhor opção para determinar o caminho mais curto entre diversas cidades quando temos poucas cidades, mas torna-se muito vantajoso quando o número de cidades aumenta pois fornece-nos rapidamente uma boa estimativa para essa solução.

Durante a apresentação e discussão dos dois processos foi abordado o paralelismo entre ambos e discutidas vantagens e desvantagens da utilização de cada: no caso de necessitarmos efectivamente da solução óptima teriam de utilizar o primeiro método, enquanto que, caso pretendessem apenas um valor aproximado (sem a garantia de que fosse o óptimo), poderíamos utilizar o segundo método, poupando assim imenso tempo e esforço.

## Uma breve viagem pelo problema do caixeiro-viajante

Na modelação da situação proposta o que os alunos utilizaram, intuitivamente, denominam-se por grafos. Informalmente um grafo pode ser definido por um conjunto de pontos (vértices) e um conjunto de relações (representadas por ligações) entre esses pontos (arestas).

O problema proposto aos alunos enquadra-se, tal como foi já referido, na procura da solução mínima, de um circuito, de modo a começar e terminar um determinado trajecto num mesmo local (ponto). Se abordamos esta situação sob a perspectiva da teoria de grafos (formal), e por pretendermos, para além de levar os alunos a elaborarem o seu próprio entendimento sobre os diversos conteúdos, levá-los também a expressarem-se com recurso a uma linguagem matematicamente correcta, seríamos levados a referir que encontrar um caminho que começa e acaba no mesmo vértice (cidade) percorrendo todos os vértices uma só vez, excepto, obviamente, o primeiro, que é simultaneamente o último, corresponde a encontrar o que se denomina, na teoria de grafos, de circuito Hamiltoneano.

Durante o desenrolar da actividade os alunos construíram os seus processos para determinar tais circuitos, conseguindo obter inclusivamente dois dos três algoritmos possíveis para solucionar este problema. Encontraram o algoritmo da força bruta (listagem de todos os circuitos possíveis); o algoritmo do vizinho mais próximo (procura da cidade mais próxima do ponto onde nos encontramos), não conseguindo encontrar o terceiro, o algoritmo de ordenação de arestas (Estes alunos do 7.° ano encontraram apenas os algoritmos mais intuitivos, o que aliás temos vindo a constatar que acontece também com os alunos do 11.° ano de MACS).

Na figura 2, os alunos apresentaram a listagem de todas as hipóteses possíveis, o que poderia ser apresentado utilizando o que se denomina de árvore (Figura 6).

Como conhecemos todas as distâncias entre as cidades, este processo fornece-nos todas as soluções porém, se o número de cidades aumentar este processo, apesar de simples, torna-se demasiado moroso. Ao analisarmos, por exemplo, o que se passa num conjunto de seis cidades, todas elas li-

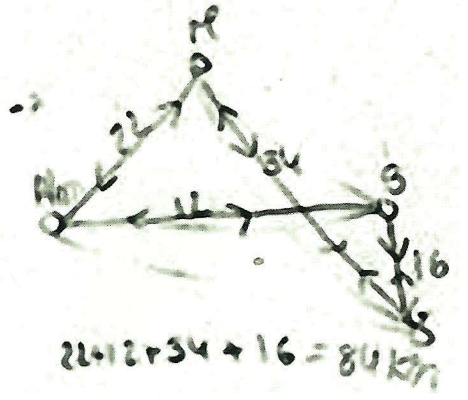


Figura 5. Cálculo do comprimento de um circuito mais curto escolhendo as arestas com valores mais pequenos

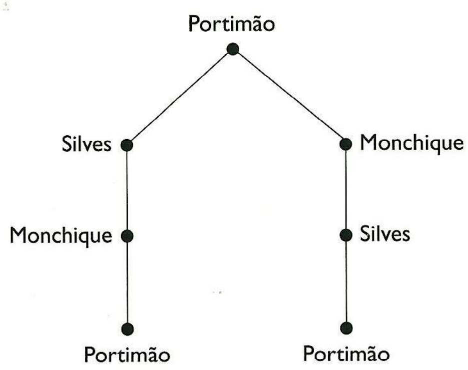


Figura 6. Representação em árvore

gadas entre si, a determinação da solução óptima torna-se bastante morosa pois necessitamos de analisar um total de 60 circuitos distintos. Se em vez das seis cidades tivermos já um total de quinze, o número de circuitos a analisar é de (15 – 1)! que corresponde a, aproximadamente, $6 \times 10^{11}$ (o número total de circuito entre n cidades estando todas ligadas entre si é de $(n-1)!$). De modo a evitar o trabalho árduo de determinar todos os circuitos possíveis, o que se faz na prática é aplicar um algoritmo de natureza heurística que nos forneça uma boa aproximação.

## Alguns comentários

Foi nosso objectivo ilustrar uma possível abordagem ao estudo dos grafos — concretamente ao problema do caixeiro-viajante — logo no início do 3.° ciclo, bem como algumas das mais valias obtidas pelos alunos com este tipo de actividade. Desde logo os alunos sentiram necessidade de simplificar a situação apresentada o que conduziu intuitivamente à modelação matemática, estimulando e desenvolvendo a sua criatividade levando-os, ao longo do percurso, a discutir e argumentar os seus pontos de vista, verificando-se desse modo uma verdadeira negociação de significados, onde todos desempenham um papel importante nas aprendizagens do grupo, sendo portanto também responsáveis por elas.

Este tipo de actividades, em que ao efectuar uma modelação da situação (utilizando um grafo) esta se torna necessariamente mais simples, coloca em evidência, a utilização e presença da Matemática em todas as actividades quotidianas. Recorrendo à teoria de grafos podemos modelar muitas dessas situações (redes de transportes, comunicações, resolução de conflitos, ...), contribuindo assim para evidenciar a importância da Matemática na sociedade, desmistificando também, face aos alunos, a sua complexidade, demonstrando a sua aplicabilidade, de que tantas vezes duvidam.

Uma das notas que nos fica desta experiência, e que nos dá ânimo para irmos preparando tarefas que permitam aos alunos tomarem contacto com conteúdos e perspectivas distintas daquelas que obteriam se fossem confrontados apenas com tarefas ditas «normais» foi verbalizada pelo Luís:

«... parecia complicado mas é fácil. E porque é que não aprendemos isto este ano?»

## Referências

Departamento do Ensino Secundário. (2001), *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*, Lisboa: Ministério da Educação.

Doerr, H. M. & English, L. D. (2006). Middle grade teacher's learning through students engagement with modeling tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 5–32.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação — DGIDC.

Rui Feiteira
Agrupamento Vertical de Escolas Prof. José Buisel, Portimão

Carlos Miguel Ribeiro
Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve