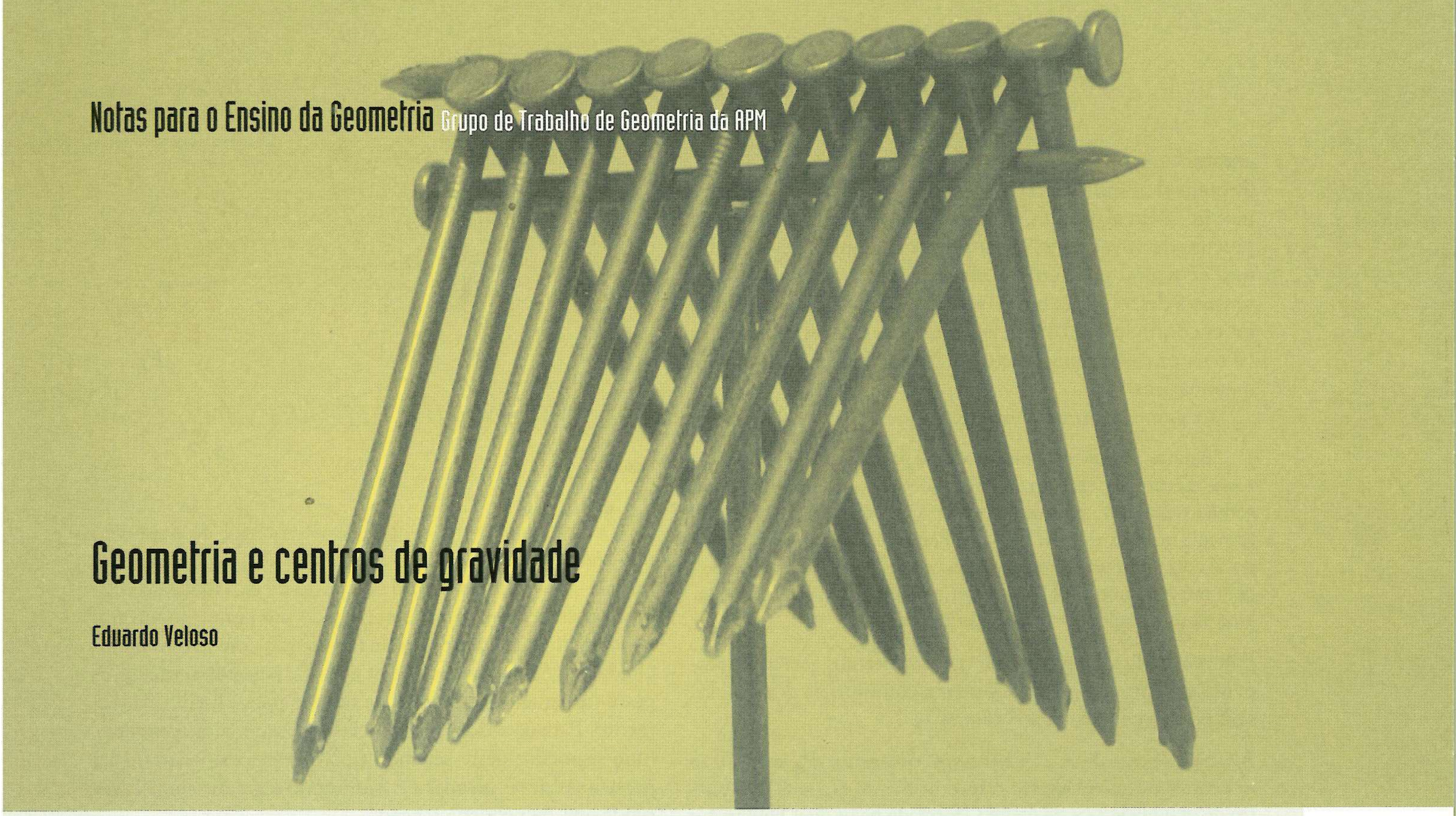


Geometria e centros de gravidade

Eduardo Veloso

Depois de termos tido no GTG uma discussão sobre centros de gravidade de polígonos, foi sugerido que seria um bom tema para uma destas notas... e eu aceitei a incumbência de a escrever. Naturalmente, como é já um hábito em muitos de nós, antes de começar a escrever a nota fui dar uma volta pela Internet, e coloquei no *Google* a palavra Arquimedes, pois sabia que este famoso matemático grego tinha estudado os centros de gravidade de diversas figuras, além de muitas outras coisas interessantes. Entre outros recursos, encontrei um livro *online* em português chamado *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*, de André Koch Torres Assis. Fiz o *download*, imprimi-o (243 páginas!), e pus-me a lê-lo. Trata-se de um livro que surgiu de um «curso de aperfeiçoamento para professores do ensino fundamental e médio» no âmbito do projecto *Teia do Saber* da Secretaria de Educação do Governo do Estado de S. Paulo. O livro trata dos trabalhos de Arquimedes (287–212 a.C.) e de Euclides (c. 325–c. 265 a.C.) sobre os temas indicados no título e descreve uma enorme quantidade de experiências muito sugestivas feitas com materiais simples e baratos. Entrevi um mundo maravilhoso e riquíssimo de conexões entre a geometria e a física elementar, mas consegui resistir a alterar radicalmente o tema da nota a escrever. Esse mundo será certamente explorado em futuras notas, por exemplo sobre as medidas em geometria, mas nesta nota resistiremos a alongá-la demasiado, e assim, depois de uma curta apresentação dos resultados de Arquimedes que nos serão úteis, trataremos exclusivamente da determinação de centros de gravidade de polígonos planos.

Preliminares arquimedianos...

De acordo com André Assis, o conceito de centro de gravidade de Arquimedes «não aparece definido explicitamente em nenhuma das obras existentes» de Arquimedes e apenas o conhecemos por comentários — por exemplo, de Papo de Alexandria (c. 290–c. 350) —, a obras suas desaparecidas. A sua definição poderia ser nos seguintes termos:

A1. O centro de gravidade de qualquer corpo é um ponto — pertencente ao corpo ou no espaço vazio — tal que, se for concebido que o corpo está suspenso por este ponto, o corpo assim sustentado permanece em repouso e preserva a sua posição original, sem se inclinar em nenhuma direcção, qualquer que seja a sua orientação inicial em relação à Terra.[1]

A primeira dúvida que pode surgir ao leitor é sobre o que se entende por *corpo*, e pedimos-lhe que entenda a palavra corpo como sinónimo de *figura* (conjunto de pontos) plana ou de figura tridimensional (que habitualmente designamos por *sólido*), mas que não devemos identificar com poliedro, pois pode tratar-se de qualquer outro corpo rígido.

Depois, um leitor professor de Matemática colocará provavelmente algumas dúvidas legítimas acerca desta «definição». Não sobre o seu sentido, mas sobre o aparente pressuposto de que existe sempre o centro de gravidade de qualquer corpo, ou seja um ponto com as propriedades indicadas. Nesse caso, pedimos-lhe que considere essa afirmação como um axioma, ou seja como uma afirmação que aceitamos sem demonstração.

Na realidade, de acordo com a tradição grega, Arquimedes abre o seu livro *Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas* com o enunciado de 7 postulados (hoje diríamos axiomas) nos quais baseia a sua teoria. Em seguida Arquimedes enuncia e demonstra um certo número de proposições. Não cabe no âmbito desta nota transcrever os postulados e as demonstrações de Arquimedes. Note-se que nas suas demonstrações Arquimedes usava processos de dedução completamente rigorosos, muitas vezes através de reduções ao absurdo. No entanto, quando se tratava de descobrir novos resultados, Arquimedes servia-se da sua grande intuição e experiência mecânica em alavancas, balanças e centros de gravidade na procura de novas relações entre, por exemplo, áreas e volumes de figuras geométricas planas e tridimensionais, como se veio a descobrir no fim do séc. XIX. O seu texto *O Método* foi encontrado em 1899, em Jerusalém, e aí estão descritos os seus processos mecânicos de descoberta de proposições matemáticas.

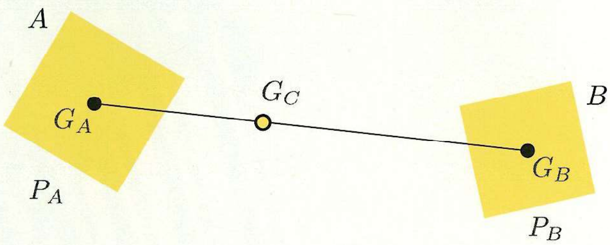
Arquimedes afirma nesse texto que:

«... algumas coisas tornaram-se claras para mim através de métodos mecânicos, embora tivessem que ser demonstrados depois geometricamente, porque a investigação pelo dito método não fornecia uma prova real. Mas é evidentemente mais fácil, quando se adquiriu previamente algum conhecimento das questões, pelo método mecânico, encontrar a demonstração do que imaginá-la sem qualquer conhecimento prévio».

Um resultado importante de que nos iremos servir diz respeito ao centro de gravidade de um conjunto de dois sólidos sem pontos comuns A e B (figura 1).

A2. Se os pesos de A e B são respectivamente P_A e P_B, e se os centros de gravidade são respectivamente G_A e G_B, o centro de gravidade G_C da figura C formada pelos duas figuras A e B é o mesmo que o da figura formada pelos pontos G_A e G_B, considerando agora que estes pontos pesam respectivamente P_A e P_B. E esse centro G_C está situado no segmento G_AG_B, de tal modo que se tem

$$P_A \times \text{comp}(G_AG_c) = P_b \times \text{comp}(G_bG_c).$$



$$C = A \cup B \qquad P_C = P_A + P_B$$

Figura 1

Centros de gravidade de segmentos

Quando estudamos geometria, embora tracemos figuras no papel, utilizemos o *Sketchpad* para as construir no ecrã do computador, ou as manipulemos (os *polydrons*, por exemplo), os nossos raciocínios estão a ser feitos sobre imagens mentais que abstracções desses objectos concretos, como pontos sem dimensão e triângulos planos sem espessura. Essas figuras abstractas não têm, obviamente, peso.

No entanto, quando queremos determinar centros de gravidade de figuras, isso implica essas figuras tenham realmente peso, o que quer dizer que imaginamos ou construímos modelos concretos dessas figuras abstractas.

Segmentos

Por exemplo, seja AB um segmento. Podemos considerar que o segmento é constituído por uma matéria homogénea (uma haste de metal)[2]. Essa haste pode por exemplo ser cilíndrica, mas para constituir um bom modelo de segmento o diâmetro da secção desse cilindro deve ser muito pequeno quando comparado com o comprimento da haste.[3]

No que diz respeito aos segmentos, Arquimedes demonstrou que

A3. O centro de gravidade de um segmento é o seu ponto médio.

Mas podemos imaginar um modelo concreto de segmento em que o peso esteja concentrado nos vértices A e B. Ou seja, consideramos que os pontos do interior do segmento não têm peso. Neste caso, o resultado **A2** de Arquimedes fornece-nos a determinação do centro de gravidade do conjunto desses dois pontos, como sendo um ponto do interior do segmento AB que depende (de acordo com a fórmula incluída em A2) dos pesos de A e de B. Naturalmente, se os pesos forem iguais, obtemos de novo o ponto médio do segmento. Para continuar a dar ideias sobre modelos concretos, num segmento deste segundo tipo os vértices poderiam ser pequenas esferas pesadas e o interior do segmento uma haste rígida mas de pequena secção.

Centros de gravidade de polígonos[4]

Quando passamos aos polígonos, temos diferentes possibilidades de considerar a distribuição do peso. Podemos imaginar os três casos seguintes:

I. O peso está distribuído homogeneamente pelo polígono, incluindo o interior, os lados e os vértices; um modelo concreto, neste caso, poderia ser uma lâmina (ou seja uma superfície relativamente rígida mas com muito pequena espessura) com a forma do polígono, de matéria homogénea (cartolina grossa, madeira, metal);

II. O peso está apenas nos n vértices (e distribuído igualmente por eles); a figura de que queremos encontrar o centro de gravidade é portanto o conjunto dos quatro vértices do polígono; nem os lados nem o interior têm peso; um modelo concreto neste caso é impossível de construir, mas podemos aproximá-lo com n esferas pesadas (pesos iguais) e unidas por hastes muito finas de uma material muito leve mas suficientemente rígido; tenta-se assim que o peso dessas hastes seja desprezável em face do peso das esferas;

III. O peso está apenas nos lados; um modelo concreto neste caso é fácil, pois consiste em construir com um material homogéneo a linha poligonal, tendo o cuidado de não acrescentar peso aos vértices nos pontos de união dos lados.

Note-se que Arquimedes, quando refere centros de gravidade de polígonos, *está a considerar sempre o primeiro destes casos*. E demonstra por exemplo o seguinte:

A4. O centro de gravidade de um paralelogramo é o ponto de encontro das diagonais.

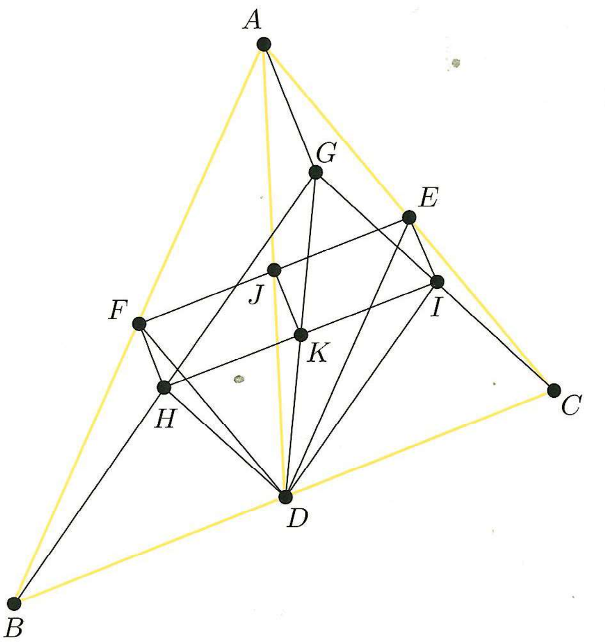


Figura 2

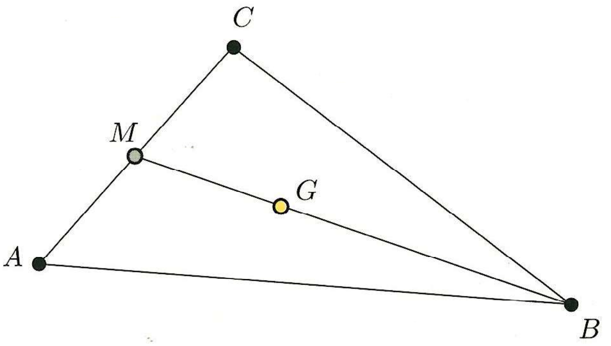


Figura 3

Tendo como base esta apresentação de alguns resultados de Arquimedes que nos serão necessários, estudamos em seguida a determinação dos centros de gravidade dos polígonos em geral. Começaremos pelos triângulos, e depois passamos aos quadriláteros, que representarão por assim dizer o caso geral.

Triângulos

Consideraremos os três casos que indicámos na página anterior.

I. Vamos enunciar e demonstrar o teorema de Arquimedes relativo ao centro de gravidade de um triângulo para ficarmos a conhecer melhor o estilo de Arquimedes. O texto é adaptado da tradução de Arquimedes feita por André Assis.

Em qualquer triângulo, o centro de gravidade está situado sobre o segmento de recta que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto.

Seja dado o triângulo ABC (figura 2). Tracemos o segmento AD, que liga o vértice ao ponto médio do lado BC. Afirmo que o centro de gravidade do triângulo ABC está situado sobre AD.

Com efeito, suponhamos que não é assim, mas que o centro de gravidade é, se possível, o ponto G. Tracemos os segmentos AG, BG e CG, e liguemos os pontos médios dos lados de ABC pelos segmentos FD, FE e DE. Tracemos FH e EI paralelamente ao segmento AG, e tracemos os segmentos HI, HD, DI, DG e JK.[5] Como o triângulo ABC é semelhante ao triângulo EDC, pois AB é paralelo a ED, e como, por hipótese, o centro de gravidade de ABC é G, o centro de gravidade de EDC é I, pois os pontos G e I estão situados semelhantemente em cada um dos triângulos (Arquimedes invoca aqui um dos seus postulados). Pelos mesmos motivos também o centro de gravidade do triângulo FBD é H, de modo que o centro de gravidade da grandeza que é a soma dos triângulos FBD e EDC é o ponto médio do segmento HI (invocação de uma proposição já demonstrada).

Mas esse ponto é K (quer o leitor ver porquê, usando o teorema de Tales?). Por outro lado, no paralelogramo $AFDE$, o centro de gravidade é o ponto J (ponto de encontro das diagonais). Então, o centro de gravidade da soma das três grandezas (triângulos FBD e EDC e paralelogramo $AFDE$) está sobre a recta JK. Mas como a soma das três grandezas é o triângulo ABC, cujo centro de gravidade, por hipótese, é G, chegámos a uma contradição, pois a recta JK é paralela e não coincidente com AG e não pode portanto passar por G. Assim, o centro de gravidade G *não pode não estar* sobre o segmento AD. Logo está situado sobre AD, como queríamos provar.

Estando sobre AD, tem também que estar sobre BE e sobre CF (porquê?), logo as três medianas encontram-se num único ponto. Este ponto é chamado, como sabemos, o baricentro do triângulo.

II.

Se o peso de um triângulo ABC estiver concentrado e distribuído igualmente pelos vértices, o centro de gravidade é também o baricentro do triângulo.

O centro de gravidade do conjunto $\{A,C\}$ é o ponto M, ponto médio do segmento AC, se tivermos em atenção o resultado de Arquimedes **A2** (figura 3). Ou seja, podemos considerar concentrada no ponto M a soma dos pesos de A e de C, ou seja, o dobro do peso de B. Por sua vez, o centro de gravidade do conjunto $\{M,B\}$ será um ponto G situado

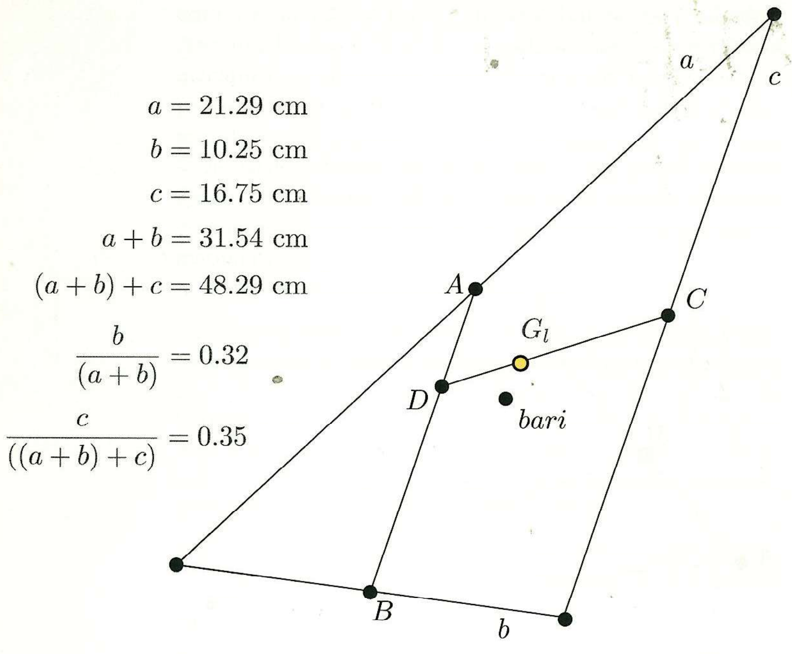


Figura 4

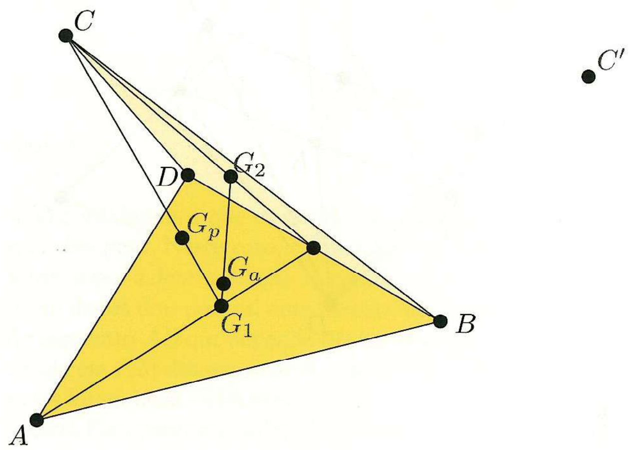


Figura 5A

no segmento MB, mas como M tem o dobro do peso de B, então G tem que seccionar o segmento MB de tal modo que GB tenha o dobro do comprimento de MG.

Vemos assim que obtemos o mesmo centro de gravidade G tanto no caso do peso do triângulo estar concentrado nos vértices (1/3 em cada vértice) como no caso do peso estar espalhado uniformemente no seu interior.

III. Vamos considerar um triângulo em que o peso existe apenas nos lados. Portanto temos apenas três segmentos a, b e c, em geral desiguais, constituídos por uma matéria homogénea (por exemplo um arame grosso) e unidos pelas suas extremidades (figura 4). Os centros de gravidade dos lados são os pontos médios A, B e C, de acordo com o resultado de Arquimedes **A3**. Mas nestes pontos os pesos que aí se concentram não são iguais, pois estamos a supor lados desiguais. Os pesos de cada lado são proporcionais aos comprimentos.

Determinamos primeiro o ponto D, centro de gravidade do conjunto $a \cup b$ (em que a representa o conjunto de pontos do lado a), utilizando o resultado A2, depois o centro de gravidade G_l (em que o índice l se refere ao triângulo em que apenas os lados têm peso), ou seja o centro de gravidade do conjunto $(a \cup b) \cup c$. G_l é calculado tendo em atenção que os pesos em D e em C são proporcionais aos comprimentos $a + b$ e c, respectivamente.

Para comparação, assinalámos a posição do baricentro ($bari$), que é o centro de gravidade quando se considera o peso apenas existente no interior do triângulo ou quando se considera o peso apenas distribuído igualmente pelos vértices do triângulo.

Vemos assim que nos objectos de forma triangular, nos casos I e II os centros de gravidade ocupam a mesma posição, o que não acontece em geral no caso III.[6]

Quadriláteros

Vamos também considerar os três casos I, II e III indicados anteriormente.

I. Consideremos os dois triângulos ABD e DBC (figura 5A) e os seus centros de gravidade G_1 e G_2. Como o material de que é feita a lâmina com a forma do quadrilátero é homogéneo, os pesos dos dois triângulos são proporcionais às áreas, e portanto o centro de gravidade do interior do quadrilátero é o ponto G_a que secciona o segmento G_1G_2 de tal modo que se tenha a igualdade das seguintes razões $\text{área}ABD/\text{área}DBC = \text{comp}G_2G_a/\text{comp}G_aG_1$.

II. Seja $ABCD$ o quadrilátero e consideremos o triângulo ABD e o seu centro de gravidade G_1 (figura 5A). Estamos a supor agora, recordemos, que o peso está concentrado e dividido igualmente pelos quatro vértices do quadrilátero.

Podemos então supor concentrados no ponto G_1 os pesos dos três pontos A, B e D. Portanto, o conjunto dos quatro vértices do quadrilátero terá um centro de gravidade G_p situado sobre o segmento G_1C, de tal modo que o ponto G_p seccione o referido segmento de modo que a razão $G_pC/G_1G_p = 3$.

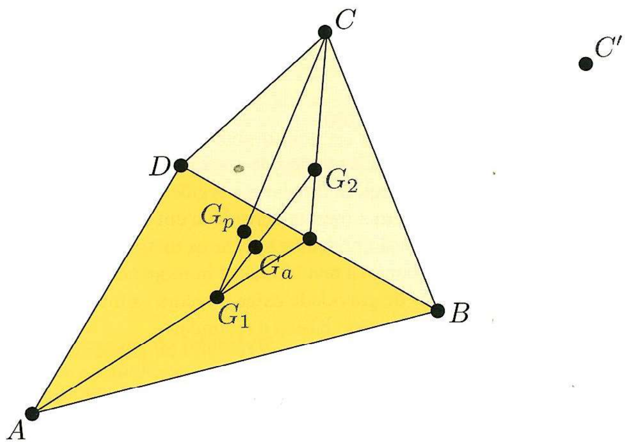


Figura 5B

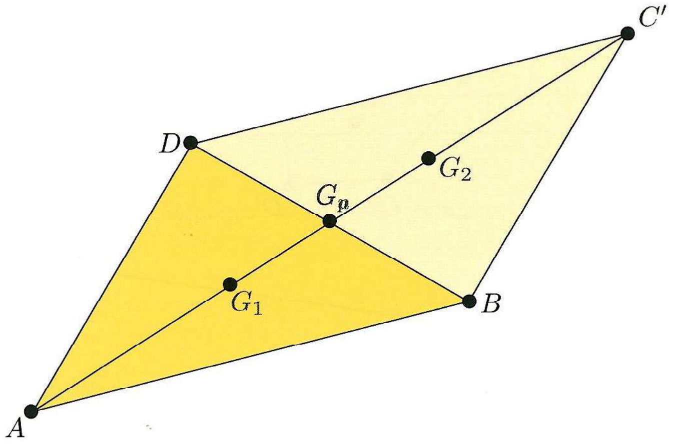


Figura 5C

Como se vê na figura 7A, os dois centros de gravidade são em geral diferentes. Seja no entanto C' um ponto tal que $ABC'D$ seja um paralelogramo. Fizemos esta construção no *Sketchpad* e fomos arrastando o ponto C para sobre o ponto C (figuras 5B e 5C). Vemos como os dois centros de gravidade se vão aproximando, até que são coincidentes no caso do paralelogramo (como de resto já devíamos intuir, dado o resultado de Arquimedes apresentado anteriormente).

III. Deixamos ao leitor o cuidado de construir o centro de gravidade neste caso, em que o peso do quadrilátero $ABCD$ reside apenas nos seus lados, supostamente feitos num material homogéneo, mas de comprimentos diferentes. A determinação do centro de gravidade é inteiramente análoga à que adoptámos no caso do triângulo. O leitor deverá encontrar um centro de gravidade, que designaremos por G_l, numa posição distinta dos anteriores G_a e G_p.

Que podemos concluir a respeito de polígonos com maior número de lados: pentágonos, hexágonos, ... ? Como todo o polígono pode ser dissectado num certo número de triângulos, os processos adoptados para o quadrilátero podem adoptar-se, *mutatis mutandis*, a um polígono de n lados qualquer. Um exercício que deixamos ao leitor.

Descoberta de uma regularidade interessante

Vamos reexaminar, relativamente ao triângulo e ao quadrilátero, a determinação do centro de gravidade no caso em que supomos que o peso está concentrado e distribuído igualmente pelos vértices. E chamaremos a esse centro de gravidade simplesmente G, para simplificar a escrita.

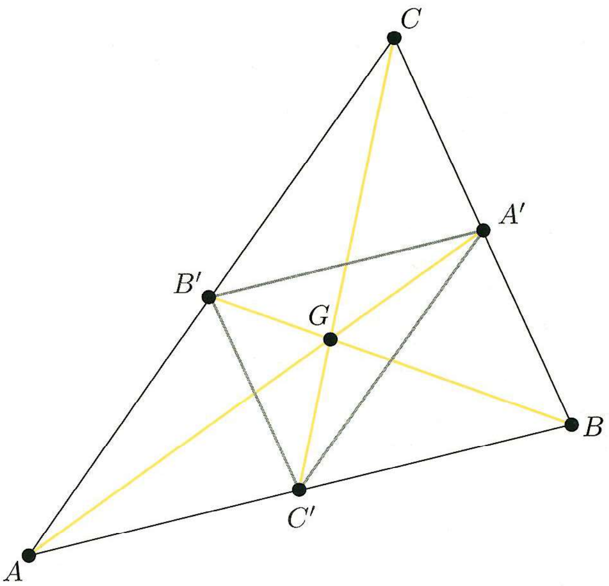


Figura 6A

No triângulo ABC (*consideramos os vértices com pesos unitários*), determinamos os pontos médios dos lados, A', B' e C' (que formam um triângulo, o chamado triângulo medial) (figura 6A). Depois escolhemos um desses pontos, por exemplo A', ponto médio de BC, e consideramos o conjunto de dois pontos, A' (peso 2) e A. Então o centro de gravi-

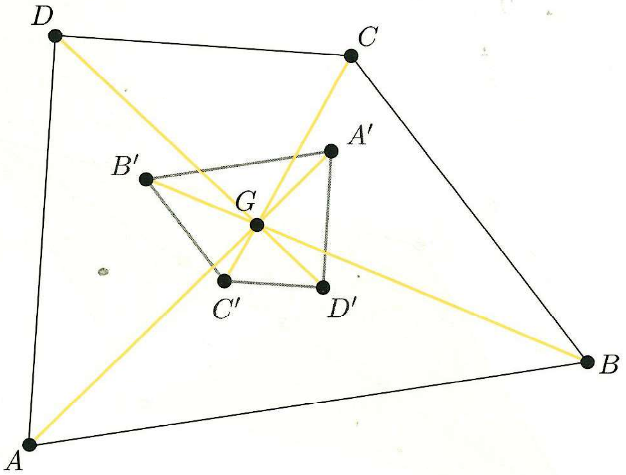


Figura 6B

dade do triângulo irá estar no segmento $A'A$, de tal forma que é centro de uma dilação de razão $-1/2$ que transforma A em A'. Se tivéssemos partido dos pontos B' e B (ou C' e C), a conclusão seria análoga. Portanto, o centro de gravidade do triângulo é centro de uma dilação de razão $-1/2$ que transforma o triângulo dado no triângulo medial. Note-se que o ponto G é determinado apenas com uma escolha (A' e A, por exemplo) mas que ao construirmos os outros dois casos chegámos a uma nova conclusão: o centro de gravidade como centro de uma dilação que transforma o triângulo dado no triângulo medial.

Se no triângulo o processo foi substituir o conjunto de *dois vértices* (por exemplo B e C) pelo seu centro de gravidade A' e depois determinar o cento de gravidade do sistema formado por A' e pelo vértice que sobrava, A, no quadrilátero podemos seguir um processo inteiramente análogo: substituir *três* vértices (A, B, D) pelo seu centro de gravidade, que designamos por C', e depois determinar o centro de gravidade do sistema formado por C' e pelo vértice que sobrava, precisamente C (figura 6B). No triângulo obtivemos *três* pontos A', B', C' formando o triângulo medial, homotético do triângulo dado (na dilação em que o centro é o centro de gravidade do triângulo e a razão é $-1/2$), no quadrilátero obtemos *quatro* pontos A', B', C', D' formando um quadrilátero homotético do quadrilátero dado (na dilação que tem como centro o centro de gravidade do quadrilátero e a razão $-1/3$). Atenção que estamos a considerar os polígonos com o peso concentrado e dividido igualmente pelos seus vértices.

Irresistivelmente, estamos a ver aqui nascer um padrão e isso diz-nos que estamos a construir qualquer coisa de interessante e importante em matemática. Um processo destes, baseado em algumas leis intuitivas da estática, mas que nos permite de modo elementar, não retorcido, natural, chegar a este tipo de resultados, cuja descoberta está claramente ao nosso alcance, deve ser um paradigma do trabalho em educação matemática. Se for bem conduzido, fará que qualquer aluno deseje ele próprio tentar o passo seguinte: e se fosse um pentágono? e um hexágono? e um...

Notas

1 Assis, obra citada, pág. 200.

2 Suporemos sempre que a matéria de que são feitos os nossos objectos (segmentos, regiões do plano e regiões do espaço) é homogénea, ou seja tem a mesma densidade em todos os pontos. Apenas nesta situação podemos aplicar os métodos da geometria elementar. Quando a matéria não é homogénea, a determinação dos centros de gravidade exige o recurso a integrais, que estão para além do ensino básico e secundário.

3 Se o leitor está chocado com a linguagem que estamos a adoptar («muito pequeno»...!) pense que o domínio em que estamos agora a trabalhar assumidamente não é o da geometria «pura» habitual, mas sim o de uma geometria-física experimental.

4 Adoptamos para definição de polígono de n ($n \geq 3$) lados aquela que o GTG recomenda que seja utilizada nos primeiros anos, e em que o polígono é formado:

- por n pontos (vértices) A_1, A_2, ... A_n;
- por n lados (segmentos), que formam uma linha poligonal fechada A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1, com a seguinte condição: cada dois lados apenas têm no máximo (isto é, quando são consecutivos) um ponto comum;
- pela região do plano limitada pela linha poligonal (que existe sempre pelo teorema de Jordan).

5 Se o leitor estranha que Arquimedes escreva «tracemos FH e EI», sem ter préviamente definido H e I, isso é simplesmente o magnífico estilo de escrita geométrica de Arquimedes e de Euclides, que usam sem hesitar as figuras para apoiar o seu texto. Em vez de escrever «tracemos a recta passando por F e paralela ao segmento AG, determinemos a sua intersecção H com BG e tracemos o segmento FH» Arquimedes escreve simplesmente «tracemos FH paralela a AG» e, tendo em atenção a figura, fica tudo dito e compreensível... Outros exemplos do mesmo estilo existem nesta demonstração.

6 Para um estudo mais completo da determinação de G_l, veja as primeiras páginas do livro de Honsberger, referido na bibliografia.

Bibliografia

Assis, André Koch Torres. *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*. Montreal: Apeiron, 2008

Honsberger, Ross. *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*. Washington, The Mathematical Association of America, 1995.

Eduardo Veloso