Modelos, aplicações da Matemática e computadores: o exemplo dos autómatos celulares

João Filipe Matos*
Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa

Tem vindo a ser reconhecido por numerosos educadores que as Aplicações da Matemática devem constituir uma das vertentes da actividade dos alunos naquela disciplina. Naturalmente que ao pensar naquilo a que se tem vindo a chamar de Aplicações da Matemática, não se limita esta componente a uma mera ideia de aplicabilidade no sentido estrito do termo. As aplicações da Matemática envolvem implicitamente criatividade e esta não consiste na simples aplicação de princípios conhecidos mas na descoberta e construção, frequentemente por via intuitiva, de novos algoritmos, novas relações, novos conceitos, em última análise, nova Matemática. Um exemplo interessante e real desta aplicação é apresentado por Feynman (1986).

Quando esses novos elementos são reconhecidos como válidos e incorporados no esquema coerente que caracteriza a Matemática, a sua aplicação torna-se num processo previsível, eventualmente rotineiro, e por isso mesmo preferencialmente realizado com o auxílio de meios automáticos, nomeadamente de computadores.

Neste artigo pretende-se aflorar a problemática das Aplicações da Matemática na educação sob a perspectiva da construção e exploração de modelos matemáticos simples em computador. São apresentados dois exemplos de simulações de processos dinâmicos através de modelos implementados em autómatos celulares.

A Construção de Modelos e os Computadores

Se a aprendizagem passa por proporcionar aos alunos ambientes favoráveis a uma situação em que eles sejam construtores activos das suas estruturas conceptuais, os processos de modelação e exploração de modelos podem contribuir para esse objectivo na medida em que encorajam os alunos a generalizar relações e processos, a definir as suas ideias de forma precisa, e a testar os seus próprios modelos detectando e corrigindo inconsistências. A vantagem de ter a possibilidade de interpretar e tornar externos os modelo «internos» será a de tender a conferir forma concreta a ideias abstractas. Acresce a isto a possibilidade de fazer coexistir representações múltiplas de um mesmo modelo (Fey, 1988).

Os exemplos que são apresentados neste artigo constituem modelos de sistemas dinâmicos. De facto, muitos dos processos naturais que podemos estudar através de modelos matemáticos têm um carácter dinâmico, isto é, a sua evolução tem que ver com o tempo, existindo assim automaticamente uma variável independente definida à partida. A simulação de processos deste tipo através de computador permite ensaiar, em segundos, fenómenos que durariam anos ou mesmo que é impossível realizar em situação real (por exemplo em projecções para o futuro). Naturalmente que existem muitos modelos interessantes que permitem uma larga exploração sem necessidade de computadores como por exemplo a chamada Geometria do Táxi (Krause, 1975).

Mas os computadores abrem a possibilidade de proporcionar aos alunos ambientes de aprendizagem em que as representações das ideias são flexíveis e que simultaneamente lhes permitem obter *feedback* imediato do computador a partir das suas experiências. Na terminologia de Papert (1980) os computadores constituem objectos com os quais se pode estabelecer uma relação que não pode ser reduzida a termos puramente cognitivos. Assim, os computadores podem constituir um meio em que os modelos podem ser facilmente manipulados, encorajando os alunos a expressarem os seus próprios modelos do mundo real, testá-los e avaliá-los, e voltando de novo à situação real num processo circular que pode ou não ter origem numa situação já definida e simplificada (Kerr & Maki, 1979). E a questão pode igualmente ser equacionada no contexto do trabalho dos professores (ver por exemplo Rubin e Rosebery, 1988).

Os programas de simulação de sistemas dinâmicos são talvez os instrumentos de modelação mais conhecidos, amplamente usados em actividades científicas e susceptíveis de serem utilizados na educação (para uma análise detalhada de diversos tipos de actividades de modelação ver por exemplo Webb e Hassel, 1988).

A construção de modelos dinâmicos em computador pode ser realizada através de diversos instrumentos desde que mantendo um grau adequado de fidelidade ao fenómeno real (a este propósito ver por exemplo Levin & Waugh, 1988). Para além das linguagens de programação relativamente acessíveis e de utilização genérica, como o Logo ou o BASIC, existe actualmente uma larga gama de programas vocacionados para a construção de modelos em computador. A simples Folha de Cálculo constitui um instrumento que permite a modelação de diversas situações e a formulação e exploração de problemas. No entanto têm vindo cada vez mais a surgir programas destinados específicamente à modelação, com diversos graus de complexidade na sua manipulação, como por exemplo o DYNAMO (Roberts, 1981) que consiste numa verdadeira linguagem de programação para a construção de modelos. Um dos exemplos que podemos situar na gama dos programas com interface mais amigável é o STELLA (para uma breve descrição deste programa ver por exemplo Whitfield, 1988) em que toda a construção do modelo é realizada através da manipulação de símbolos icónicos representativos das variáveis em jogo, e que são ligados directamente no ecrã de acordo com a relação de dependência entre os diversos factores intervenientes no processo.

A construção de modelos referida pressupõe o conhecimento das leis que regem o fenómeno de um ponto de vista global, o que poderá significar que é necessário conhecer exactamente as equações correspondentes ao processo dinâmico ou pelo menos alguma relação funcional mesmo que traduzida em termos gráficos pelo utilizador. Existem no entanto processos em que a definição das leis é estritamente local, isto é, realizada sobre cada elemento de modo uniforme mas individual. Nestes processos conhecem-se as leis «locais» do seu funcionamento mas o seu desenvolvimento global é muitas vezes extremamente difícil de prever. Naturalmente que estas duas classes de modelos não são disjuntas uma vez que certos fenómenos podem ser vistos quer de um ponto de vista local quer de um ponto de vista global e estas duas perspectivas podem ser complementares.

Ogborn (1990) distingue como particularmente interessante a modelação semi-quantitativa quando se dispõe de poucos dados para construir um modelo quantitativo exacto. Assim, a modelação semi-quantitativa consistirá na construção de diagramas causais cujas variáveis seriam representadas de forma icónica e relacionadas através do traçado de setas definidoras de dependência directa ou inversa entre elas.

Vamos analisar em pormenor dois exemplos de modelos matemáticos em que a definição local assume aspecto relevante.

Os Autómatos Celulares

Os autómatos auto-reprodutores de John Von Neumann são modelos formulados em termos matemáticos e baseados num conjunto de condições ou regras reconhecidas como necessárias para a auto-organização dos seus elementos. Uma característica dos autómatos de Von Neumann é a sua capacidade de auto-reprodução. Segundo Eigen e Winkler (1989) o primeiro deste tipo de modelos foi concebido em 1950 de uma forma muito realista mas com êxito precário. A máquina imaginada deslocar-se-ia para trás e para diante num grande armazém de peças, retirando os elementos necessários à sua própria construção. E a questão mais delicada é que os seus «descendentes» deveriam ter a mesma capacidade de se auto-reproduzir, num processo recursivo, capacidade esta que deveria portanto fazer parte do seu programa de construção. Poderia imaginar-se que, por meio de um dado tipo de modificação selectiva do programa de construção, seria teoricamente possível obter uma melhoria contínua da máquina, com extensão e aperfeiçoamento das suas capacidades no sentido da evolução darwiniana.

Em termos teóricos, as ideias de Von Neumann (Kac & Ulman, 1968) encontram exemplos interessantes, nomeadamente através da exploração dos chamados autómatos celulares. Pense-se no plano dividido em células tal como se se tratasse de um infinito tabuleiro de xadrez. A cada célula, isto é, cada casa desse tabuleiro, pode atribuir-se um número finito de estados, como por exemplo, estar vazio, ocupado ou ocupado por um determinado tipo ou classe de elementos, etc. Para cada célula pode ainda ser definida uma dada vizinhança. Por exemplo, poderíamos definir para cada célula A da figura 1 um tipo de vizinhança constituída pelas células numeradas de 1 a 8.

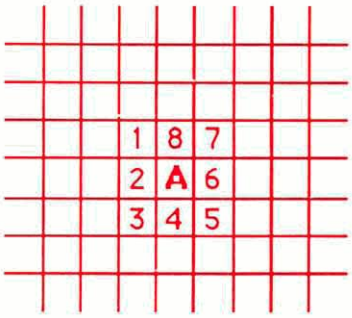

Fig. 1
Exemplo de vizinhança de uma célula A

Para que este pequeno mundo adquira uma dinâmica de «vida» podem ser definidas regras de transformação simultânea para cada célula. Isto significa que estas regras são aplicadas instantaneamente a todas as células deste espaço. Von Neumann conseguiu demonstrar que uma configuração de cerca de 200.000 células, cada uma com 29 estados possíveis e uma vizinhança de quatro casas ortogonais (no caso da figura 1, as casas 2, 4, 6 e 8), reúne todas as condições necessárias aos autómatos auto-reprodutores, podendo teoricamente realizar qualquer operação matemática (Eigen & Winkler, 1989).

Um exemplo interessante de um universo de autómatos celulares é conhecido por «jogo da vida». Desenvolvido no início dos anos setenta, pelo matemático inglês John Conway quando trabalhava intensamente em dois dos seus temas favoritos: as teorias dos números transfinitos e os jogos (ver por exemplo Conway, 1976). Na construção de um universo dinâmico de autómatos celulares — capaz de ser simultaneamente simples e interessante mas de resultados praticamente imprevisíveis — Conway investigou com os seus estudantes dezenas de hipóteses, ensaiando universos de texturas hexagonais e triangulares com as mais variadas regras de transformação. Um dos resultados deste estudo foi uma proposta extremamente simples: o jogo da vida, como lhe chamou, embora na sua essência não constitua um verdadeiro jogo.

Neste universo, a vizinhança de cada célula é constituida pelas oito células descritas na figura 1. O jogo decorre em fases sucessivas que são designadas habitualmente por gerações. Em cada geração, as regras são aplicadas simultaneamente em todas as células. Como regra base, uma célula deve estar sempre ou ocupada ou livre, isto é, só existem dois estados: célula ocupada (viva) ou vazia (morta). As regras deste verdadeiro micromundo são as seguintes:

1. **Sobrevivência**: Uma célula sobrevive e passa à geração seguinte se 2 ou 3 células vizinhas estiverem também vivas (isto é, ocupadas). A célula permanece portanto ocupada, isto é, viva.

2. **Morte**: Uma célula morre (isto é, passa de ocupada a vazia) se mais de 3 ou menos de 2 células da sua vizinhança estão vivas. No primeiro caso poderíamos dizer que o sistema estaria sobrepovoado e no segundo que o indivíduo está demasiado isolado.

3. **Nascimento**: Uma célula nasce (isto é, passa de vazia a ocupada) se 3 e só 3 células vizinhas já estiverem vivas.

Em cada geração, cada célula sofre uma transformação determinada por aquelas três regras.

Atente-se no desenvolvimento da evolução da configuração inicial da figura 2.

Naturalmente que este processo implementado em computador permite com grande rapidez apreciar o desenvolvimento de uma configuração inicial após dezenas ou centenas de gerações.

É possível desenvolver a simulação deste processo com o auxílio de diversos programas, existindo diversas implementações realisadas sobre diferentes suportes, como é o caso do programa LAZLife desenvolvido por Larry Hutchinson para os computadores MacIntosh.

As questões que se colocam podem permitir explorações extremamente interessantes. Haverá configurações iniciais que desaparecem, ou que se tornam estáveis, ou que alternam entre diferentes estados numa ou outra forma de estabilidade, ou que se desenvolvem e criam «colónias» que por sua vez se desenvolvem também, etc. Há por exemplo as chamadas configurações móveis (ver figura 3). Quais serão as características deste tipo de configurações? Que classes de configurações móveis podem existir? Quais são estáveis, após um número finito de gerações?

Existem configurações cujo crescimento é infinito? Haverá possibilidade de obter todo o tipo de configuração? Se não, porque não? Que leis é possível conjecturar acerca de determinadas categorias de configurações de vida limitada (isto é, que desaparecem ao fim de um número finito de gerações)?

E o que dizer do jogo da vida em três ou mais dimensões?

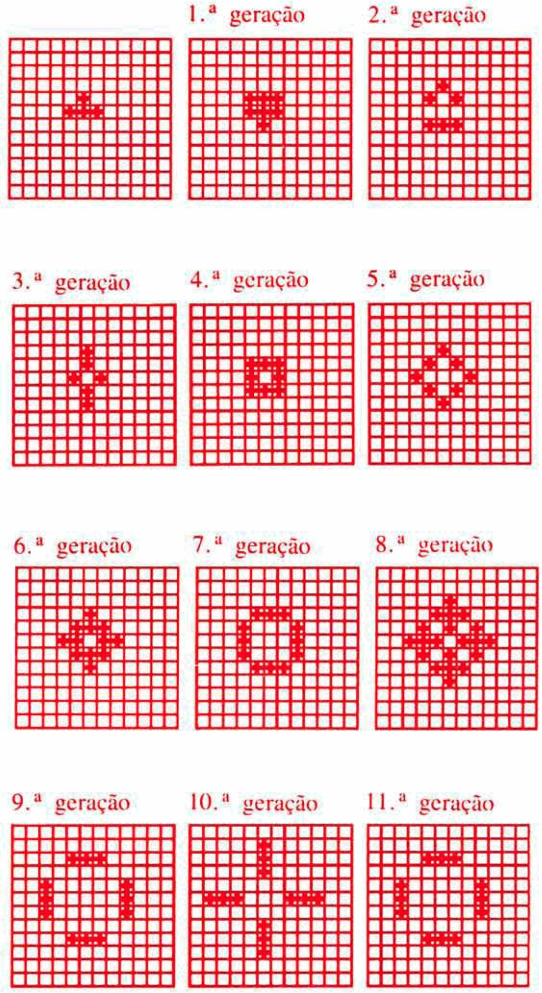

Fig. 2
Evolução de uma configuração que adquire «estabilidade alternante» na 10.ª geração

O entusiasmo e a atracção que o jogo da vida despertou em certos meios tem que ver naturalmente com a sua simplicidade, pelo facto de ser totalmente previsível, célula por célula, mas a evolução em larga escala desafiar tremendamente a intuição.

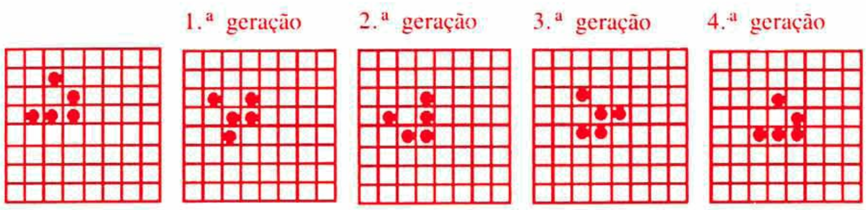

Fig. 3
Exemplo de uma configuração móvel. Ao fim de quatro gerações ela regressa à configuração inicial mas deslocada uma célula para a direita e para baixo. A sucessão de sequências como esta provoca o deslocamenteo rectilíneo da configuração.

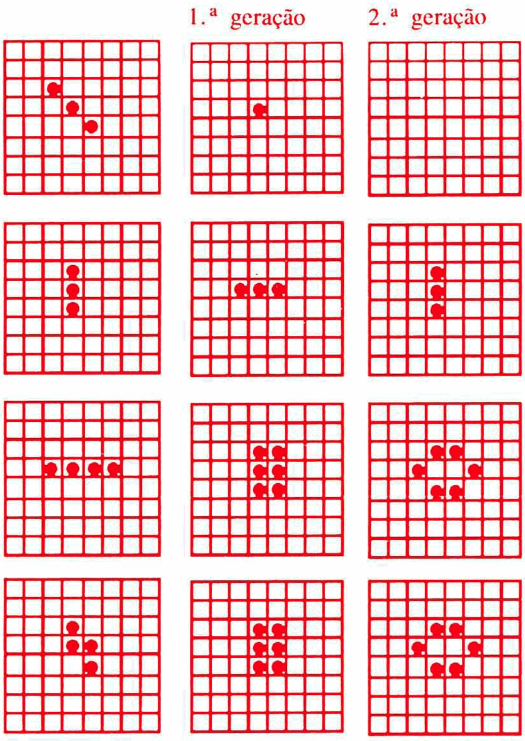

Fig. 4
Exemplos de desenvolvimento de configurações estáveis

Simulação de fogos

Quando em Outubro me dirigia para Viana do Castelo para participar no Encontro da APM — pensando em exemplos sugestivos de simulações para realizar em Logo — deparei com um enorme incêndio naquelas maravilhosas terras. Apesar de a realidade ser muito mais dramática do que a minha preocupação com as simulações, pensei que seria um exemplo bem interessante simular o desenvolvimento de um foco de incêndio. Penso mesmo que esta ideia já existia a propósito do estudo da natureza matemática de certas formas características de fenómenos naturais (ver por exemplo Marx, 1987 e Peterson, 1988) e de uma ideia que persigo há cerca de um ano e que envolve o estudo dos chamados triângulos de Sierpinsky.

Imagine-se um universo celular — ou um sistema de partículas interactivas, na terminologia de alguns matemáticos (Durret, 1988) — em que cada célula pode assumir, em cada fase, um e só um de três estados: 1, i e 0. Neste modelo, cada célula representa uma árvore e os três estados referidos correspondem respectivamente a uma árvore sã, ardendo e já ardida. As regras de transformação são óbvias. O problema torna-se mais aliciante, do ponto de vista matemático, através da utilização de valores de probabilidades. As regras poderiam ser as seguintes:

1. Todas as árvores são inicialmente verdes, excepto uma (o foco de incêndio).
2. Uma árvore ardida mantém-se ardida.
3. Uma árvore ardendo pode transmitir esse estado a uma árvore sã vizinha. Este facto depende do valor definido para a probabilidade de transmissão (podendo eventualmente variar ao longo do processo).
4. Uma árvore permanece ardendo durante uma geração (isto é, uma unidade de tempo).

O estado do processo num dado momento **m** é uma função E_m:

$$E_m: Z^2 \rightarrow \{1,i,0\}$$

Durret (1988) descreve a dinâmica deste processo em termos de probabilidades da seguinte forma:

Se $E_m(x) = 0$, então $E_{m+1}(x) = 0$
(correspondente a 2.)

Se $E_m(x) = i$, então $E_{m+1}(x) = 0$
(correspondente a 4.)

Se $E_m(x) = 1$, então
$P(E_{m+1}(x) = 1) = (1-p)^k$
$P(E_{m+1}(x) = i) = 1 - P(E_{m+1}(x) = 1)$
(correspondentes a 3.)

sendo **k** o número de vizinhos em estado i, P representado o valor da probalidade e **p** um parâmetro definido no intervalo [01]. A condição inicial poderia ser

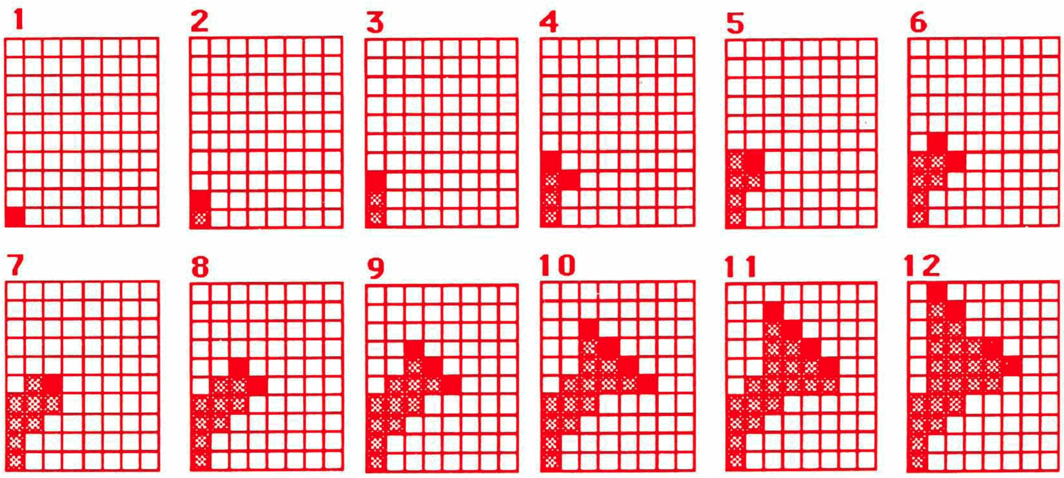

Fig. 5
Início do desenvolvimento de um foco de incêndio de acordo com o modelo apresentado.

$E_m((0,0)) = i$, isto é, a célula (0,0) seria o foco de incêndio.

A simulação deste processso em computador poderá eventualmente ser implementada com o auxílio de diferentes tipos de instrumentos. O recurso à programação poderá permitir tornar mais flexível a utilização da simulação. Usando procedimentos elementares em LOGO pode realizar-se uma primeira aproximação a este problema. Na secção Logo.Mat deste número da revista é explorada de forma resumida uma possivel implementação deste processo.

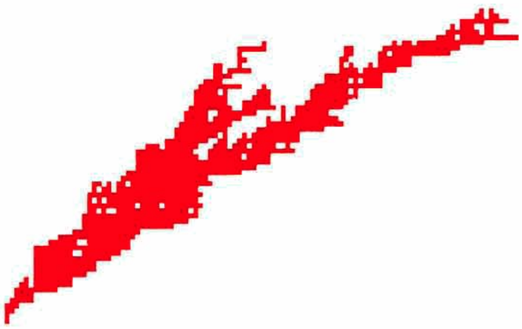

Fig. 6

Facilmente se pode generalizar aquele conjunto de procedimentos a outros casos introduzindo novos factores de probabilidade e utilizando os oito vizinhos de cada célula. Através deste tipo de modelo matemático podem realizar-se experiências interessantes, ensaiando técnicas de contra-fogo, estudando a influência da variação da humidade do solo, do vento, de barreiras de segurança, etc, na propagação do fogo. Todos estes elementos são simulados através da definição de valores para as probabilidades de propagação aos vizinhos imediatos ou a outros, e de interacção entre estes factores. Além disso, a base do modelo pode ser constituída por uma distribuição aleatória de árvores (células) em vez de um recticulado perfeito como é o caso do exemplo apresentado.

Conclusão

Os exemplos apresentados pertencem a um campo ainda relativamente pouco explorado da Matemática e muito pouco trabalhado em termos de educação matemática. Pareceu-me que tal escolha poderia constituir uma forma de sugerir uma perspectiva de trabalho no domínio das Aplicações da Matemática que dá ênfase à elaboração e exloração de modelos em relação aos quais não é necessário conhecer um conjunto de equações complexas, mas que permitem uma investigação interessante.

Era igualmente objectivo deste artigo valorizar as aplicações como uma componente importante do ensino da Matemática no sentido em que podem constituir elas próprias elementos de estudo e de trabalho através da construção e exploração de modelos. Esta vertente, que deverá estar implícita na proposta do envolvimento dos alunos em actividades sobre as Aplicações da Matemática, pode tornar-se mais saliente através da utilização de computadores. Embora as linguagens de programação, e nomeadamente o Logo, constituam instrumentos disponíveis para este trabalho, os programas vocacionados para actividades de modelação constituem sem dúvida os instrumentos privilegiados para este tipo de actividade.

Num momento em que se buscam linhas orientadoras gerais para o que poderá ser a educação matemática básica dos alunos, e por outro lado se vislumbram os contornos dos futuros currículos, é importante tomar em consideração o que poderá ser uma vertente interessante da utilização da tecnologia nos currículos.

Referências

Conway, John (1976). *On Numbers and Games*. London: Academic Press.

Durret, Richard (1988). Crabgrass, Mcasles, and Gypsy Moths: An Introduction to Interacting Particle Systems. *The Mathematical Intelligencer*, 10 (2), 37-47.

Eigen, Manfred & Winkler, Ruthild. (1989). *O Jogo*. Lisboa: Gradiva.

Fey, James (1988). *Technology and Mathematics Education: A Survey of Recent Developments and Important Problems*. Comunicação apresentada no Sixth International Congress on Mathematical Education, Budapest.

Feynman, Richard (1986). *Surely you're joking Mr. Feynman!*. New York: Bantam.

Kac, Mark. & Ulam, Stanislaw. (1968). *Mathematics and Logic*. New York: Penguin Books.

Kerr, Donald & Maki, Daniel (1979). Mathematical Models to Provide. Applications in the Classroom. In Sharron, Sidney & Reys, Robert (Ed.) *Applications in School Mathematics*. Reston: NCTM.

Krause, Eugene (1975). *Taxicab Geometry: an Adventure in Non-Euclidean Geometry*. New York: Dover.

Levin, James & Waugh, Michael (1988). Educational Simulations, Tools, Games and Microworlds: Computer-based Environments for Learning. *International Journal of Educational Research*, 12, pp. 71-81.

Marx, G. (1987). Chaos in Education. *Proceedings of the International Workshop on teaching non-linear phenomena at schools and universities*. Veszprém: National Center for Educational Technology.

continua na pág. seguinte

Aplicações na Matemática escolar em discussão no Profmat-89

No Profmat-89, realizado em Outubro passado em Viana do Castelo, um dos grupos de trabalho foi dedicado ao tema «Aplicações na Matemática escolar». Um relatório sobre o que foram os três dias de trabalho desse grupo será publicado no *Profmat n.º 5* (Actas do Encontro) tal como sucederá com todos os outros grupos. No entanto, uma vez que este número de Educação e Matemática é dedicado ao mesmo tema, parece oportuno transcrever a parte final desse relatório que se refere aos pontos focados no último dia dos trabalhos.

[...]

• Embora o professor goze sempre de alguma liberdade, os programas actuais não são propícios ao trabalho com aplicações da Matemática sobretudo por causa da natureza dos objectivos subjacentes a esses programas.

• Actividades concretas sobre aplicações da Matemática poderão naturalmente agradar mais a alguns alunos do que a outros mas, de um modo geral, permitem dar sentido a muitas noções com que os alunos trabalham. Além disso, poderão proporcionar actividades diversificadas que tenham em conta o contexto social da escola e dos alunos (neste aspecto, a Matemática poderá ser *diferente* de região para região). Um exemplo concreto, apresentado por uma professora da Marinha Grande, mostrou a relevância de noções de Trigonometria para alunos do 9.º ano, em relação à indústria dos moldes e em particular às necessidades profissionais dos fresadores.

• As actividades envolvendo relações da Matemática com a realidade ou com outras disciplinas requerem muitas vezes trabalho de grupo entre professores de Matemática e/ou colaboração entre professores de várias disciplinas.

• Por vezes, o desenvolvimento de projectos envolvendo aplicações da Matemática exige que o professor dê atenção a questões diversas de natureza não matemática e não proceda a simplificações *exageradas* da situação em estudo; esta exigência reforça a necessidade do trabalho em equipa e chama a atenção para a importância de existirem materiais e recursos disponíveis, aspecto em que a Associação de Professores de Matemática pode ter um papel decisivo.

• São necessárias mais experiências concretas em que se utilizem aplicações da Matemática nas aulas, bem como uma diversificação dos níveis escolares — por exemplo, seriam benvindas experiências nos cursos complementares do Ensino Secundário. Um aspecto a que será necessário dar atenção é o das formas de avaliação adequadas a um tipo de trabalho que incluirá muitas vezes trabalho de grupo, realização de projectos, relações interdisciplinares, etc.

• Deveriam ser criadas condições favoráveis para grupos de professores que apresentem, na sua escola, propostas relevantes para o desenvolvimento de projectos envolvendo aplicações da Matemática. Essas condições poderiam incluir o reconhecimento, no horário dos professores respectivos, de algumas horas semanais dedicadas ao desenvolvimento de materiais, apoio às actividades dos alunos, etc.

[Extraído do relatório do GT9 do Profmat-89, elaborado por Ana Vieira e Paulo Abrantes em Outubro de 1989]

Modelos... (conclusão)

Ogborn, Jon (1990). Modelação com o computador: Possibilidades e prespectivas. In Teodoro, V. (Ed.) *Novas Tecnologias de Informação como Instrumento da Educação: um Manual para Professores*. (No prelo).

Papert, Seymour. (1980). *Logo, Computadores e Educação*. S. Paulo: Editora Brasiliense.

Peterson, Ivars (1988). *The Mathematical Tourist*. New York: Freeman.

Roberts, Nancy (1981). Introducing Computer Simulation into the Hogh School: an applied Mathematics Curriculum. *Mathematics Teacher*, 74 (8), pp. 647-652.

Rubin, Andee & Rosebery, Ann (1988). *Teachers Misunderstandings in Stastical Reasoning: Evidence from a Field Test of Innovative Materials*. Comunicação apresentada no International Stastistics Institute Round Table Conference «Training Teachers to Teach Statistics», Budapeste.

Webb, M. & Hassell, David (1988). Opportunities for Computer Based Modelling and Simulation in Secondary Education. In Lovis, F. & Tagg, E. (Eds.) *Computers in Education*. North-Holland: Elsevier.

Whitfield, A. (1988). STELLA and its Impact on the Teaching of Mathematical Modelling. In Lovis, F. & Tagg, E. (Eds.) *Computers in Education*. North-Holland: Elsevier.

* Bolseiro do INIC — Instituto Nacional de Investigação Científica