Uma corrida de 400 metros

Isabel Amorim e Alzira Rebelo, Esc. Sec. D. Pedro V
Graça Pereira, Esc. Sec. Santa Maria do Olival (Tomar)

No Ano lectivo de 88/89 realizámos um trabalho com alunos do 8.º ano, da Escola Secundária de Sebastião e Silva, que consistiu na elaboração da planta (e respectiva maquete) de uma pista de atletismo com campo de futebol. Esse trabalho constituiu pretexto para uma comunicação (inserida no Grupo de Trabalho «Aplicações da Matemática»), no Encontro Nacional PROFMAT 89, cujo conteúdo será brevemente publicado nas Actas do referido encontro.

O presente artigo surge na sequência dessa comunicação e nele iremos explorar a questão das chamadas «décalages». Antes, porém, abordaremos sumariamente o processo matemático envolvido no traçado e construção de uma pista de atletismo e do respectivo campo de futebol.

Traçado de um campo de futebol

Depois de se conhecerem as dimensões do rectângulo (por exemplo, as internacionais mínimas são: 100 x 64), é necessário escolher uma escala adequada tendo em conta o espaço onde se irá elaborar a planta.

Na marcação dos diferentes elementos que compõem um campo de futebol (meio campo, grande área, pequena área, local das balizas, etc.) estão envolvidos conceitos da geometria elementar: rectas paralelas, rectas perpendiculares, diagonais de um rectângulo, perímetros, etc.; os cálculos a efectuar não são mais do que simples proporções (directas).

Traçado de uma pista de corridas

Uma pista de corridas é habitualmente constituída por 8 corredores, medindo cada um deles 1,22 m de largura. A pista tem 400 m de comprimento que se medem no 1.º corredor 0,30m além da corda, isto é, do limite interior da pista.

Cada corredor é constituído por duas partes curvas (semicircunferências) e duas partes rectas. Assim, para o seu traçado há que determinar o comprimento de cada uma dessas partes (que não é 100 m como se poderia supor).

Dadas as dimensões **A** × **B** do rectângulo que constitui o campo de futebol, os cálculos a efectuar resumem-se à determinação do raio **R** das semicircunferências e do comprimento **L** de cada uma das rectas.

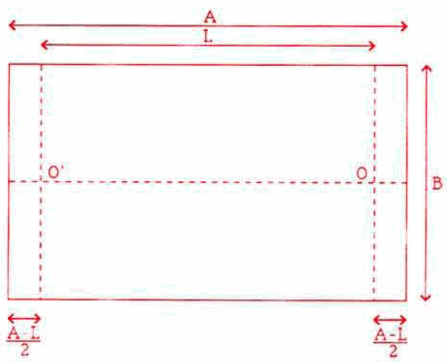
Assim, **R** será a soma de metade da largura do campo com a largura **f** da sua faixa de segurança (que pode variar entre 1,5 e 2,5 m) com 0,30 m ; ou seja:

$$R = B/2 + f + 0{,}30$$

Então, o comprimento C de uma parte curva será: $C = \pi R$

Como $400 = 2L + 2C$, vem: $L = 200 - R$

Quanto à marcação no terreno, há que saber onde se situa exactamente o centro **O** de cada uma das semicircunferências: este ponto terá que se encontrar sobre o eixo, longitudinal que passa pelo centro do terreno; para determinar qual o sítio exacto nesse eixo, calcula-se a diferença A – L e divide-se por 2 (ver figura).



Finalmente, traçam-se as partes curvas da pista com centro nos pontos O e O' e as respectivas partes rectas (ver figura).

A linha assim obtida (linha a tracejado na figura acima) deverá medir 400 m certos.

Uma vez que esta linha se situa 0,30 m além da corda, para traçar a parte interior do 1.º corredor (corda) tem que se utilizar um raio de comprimento R – 0,30 m e, para os restantes corredores vai-se aumentando sucessivamente 1,22 m a partir de R – 0,30 m (pois a largura de cada corredor mede 1,22 m).

Décalages

Após a marcação no terreno dos corredores da pista, surge a questão das chamadas «décalages», isto é, como marcar em cada corredor o local de partida para cada atleta numa corrida de 400 m (como é óbvio, se partissem todos da linha da meta, o atleta do corredor no 1 percorreria esses 400 m, mas o «desgraçado» do corredor n.º 8 ...).

Com vista a facilitar a apresentação dos cálculos necessários para determinar as «décalages», efectuá-los-emos com os valores de um caso particular: suponhamos que o campo de futebol possui as medidas internacionais mínimas $\rightarrow 100 \times 64$. Assim,

A = 100 m	R = 34.8 m	C = 109.323733 m
B = 64 m		L = 90.67267 m

Não há dúvida que o atleta do corredor n.º 1 parte da meta.

Para que o atleta do corredor n.º 2, ao chegar à meta, tenha percorrido exactamente os mesmos 400 metros, ele terá que partir «à frente» do atleta do corredor n.º 1.

Antes de prosseguirmos, duas notas:

1) para abreviar a escrita, a partir daqui, chamaremos a_n ao atleta do corredor número n, n = 1, 2, ..., 8;

2) nos corredores número 2, 3, ..., 8, os 400 metros medem-se a 0.20 m da fronteira interior do corredor (e não a 0.30 m como no corredor n.º 1[(1)]).

Para determinarmos o local exacto de onde a_2 deverá partir, faremos a contagem dos metros que ele percorre (NÃO ESQUECER que, de acordo com a nota acima, esta contagem deverá ser feita sobre uma linha a 0.20m da fronteira interior do seu corredor) até chegar à meta, «no sentido contrário ao da sua corrida», isto é, começamos por contar os 90.67267m que ele corre na recta da meta; depois, os 112.84601m (ver cálculos auxiliares) da 2.ª curva que a_2 descreve; depois, os 90.67267 da 1.ª recta onde ele corre; e finalmente, o número de metros que ele corre na 1.ª curva desde que parte até que entra na 1.ª recta:

$$400 - (90.67267 + 112.84601 + 90.67267) =$$
$$= 105.80865\text{m}$$

Cálculos auxiliares

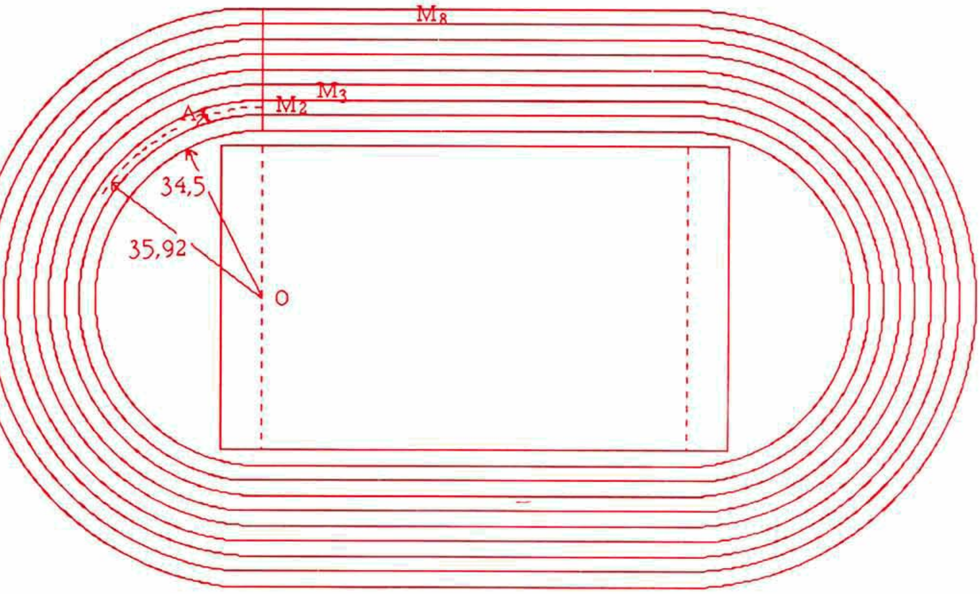
$R_1 = 34.8\text{m}$

$R_2 = (34.8 - 0.3) + 1.22 + 0.2 =$

$= 35.92\text{m}$

$C_2 = \pi R_2 \simeq 112.84601\text{m}$

Consideremos, agora, a seguinte figura:



O objectivo desta figura é auxiliar a apresentação dos cálculos com vista a clarificá-los; por isso mesmo, esta não se encontra desenhada à escala, pois se assim fosse, os corredores ficariam demasiado estreitos.

De um ponto de vista prático, o que se pretende é desenhar uma linha no corredor, atrás da qual se deverá encontrar o atleta antes da partida.

Neste momento, apenas sabemos que desde o ponto A_2 até à meta M_2 (no sentido da corrida do atleta) contam-se 400m; portanto, a tal linha terá que passar pelo ponto A_2. Mas, só com este dado, ainda não é possível desenhá-la.

Como fazer?

Determinemos a sua inclinação (a inclinação e um ponto, já são dados suficientes para a desenhar):

i) comprimento do arco M_2A_2 (seja x_2):

$x_2 = C_2 -$ n.º de metros que a_2 corre na 1.ª curva $=$
$= 112.84601 - 105.80865$
$= 7.03736$m

ii) amplitude do arco M_2A_2 — ou do ângulo do centro M_2OA_2 (seja α_2):

$$\frac{2\pi R_2}{360} = \frac{x_2}{\alpha_2} \iff \alpha_2 = \frac{180x_2}{\pi R_2} \iff$$

$$\iff \alpha_2 = \frac{180 \times 7.03736}{\pi \times 35.92} \simeq 11.225251^\circ$$

iii) a referida linha terá uma inclinação de 11.225251° relativamente à linha da meta.

Em vez de efectuarmos cálculos análogos a estes para cada um dos restantes corredores, tentaremos deduzir uma fórmula que, por substituição directa, nos dê logo o valor do ângulo desejado.

Analisemos como chegámos ao valor α_2 e generalizemos:

$$\alpha_2 = \frac{180x_2}{\pi R_2}$$

- Como chegámos a R_2?

. $R_1 = B/2 + 2.5 + 0.3 = 32 + 2.5 + 0.3 = 34.8$m

. $R_2 = (R_1 - 0.3) + 1.22 + 0.2 =$
$= 34.5 + 1.22 + 0.2 =$
$= 34.7 + 1.22$

. $R_3 = R_2 + 1.22 = 34.5 + 1.22 + 0.22 + 1.22 =$
$= 34.5 + 0.2 + 2 \times 1.22 =$
$= 34.7 + 2 \times 1.22$

. $R_4 = R_3 + 1.22 = 34.7 + 2 \times 1.22 - 1.22 =$
$= 34.7 + 3 \times 1.22$

. etc.

De onde se conclui que:

$$\boxed{R_n = 34.7 + (n - 1) \times 1.22}$$

- Como chegámos a x_2?

comprimento que a_2 corre na 1.ª curva:

$105.80865 =$
$= 400 - (90.67267 + \underbrace{112.84601}_{\pi R_2} + 90.67267)$
$= 400 - (2 \times 90.67267 + \pi R_2)$
$= 218.65466 \rightarrow \pi R_2$

. $x_2 = 7.03736 = 112.84601 - 105.80865$
$= \pi R_2 - (218.65466 - \pi R_2)$
$= 2\,\pi R_2 - 218.65466$

De onde se conclui que:

$$\boxed{x_n = 2\,\pi R_n - 218.65466}$$

(em que x_n representa o comprimento do arco M_nA_n; $n \in \{2, 3, \ldots, 8\}$)

- Então:

$$\alpha_2 = \frac{180x_2}{\pi R_2} = \frac{180\,(2\pi R_2 - 218.65466)}{\pi R_2}$$
$$= 180\left(2 - \frac{218.65466}{\pi R_2}\right)$$

- Finalmente,

$$\boxed{\alpha_n = 180\left(2 - \frac{218.65466}{\pi R_n}\right)}$$

onde

$\boxed{R_n = 34.7 + (n - 1) \times 1.22}$, $n \in \{2, 3, \ldots, 8\}$)

Sugestão

Segundo nos afirmou o professor Eduardo Cunha(2) (e nós tivémos oportunidade de o confirmar aquando duma visita ao Estádio Nacional) a distância entre o 8.º e o 7.º atleta, à partida, é menor do que a distância entre o 2.º e o 1.º; ou, por outras palavras, à medida que n aumenta ($n \in \mathbb{N}$), os atletas n.º $n+1$ e n.º n partem cada vez mais perto um do outro, o que nos leva a imaginar que:

«No infinito, os atletas partiriam lado a lado.»

Como demonstrar, matematicamente, esta afirmação?

Notas

(1) Esta diferença justifica-se pelo facto de a corda (fronteira interior do 1.º corredor) não ser uma simples faixa pintada no chão como as fronteiras interiores dos restantes corredores. Com efeito, a corda é uma espécie de tubo metálico (ou de madeira, ou de cimento) com 5 cm de altura, o que faz com que o atleta do corredor n.º 1 não consiga correr tão próximo da fronteira interior (porque há o perigo de se magoar) como um atleta de um dos outros corredores.

(2) Treinador de atletismo no Sporting.