Aprender Matemática com o Excel

Aplicações Computacionais

Margarida Oliveira
Suzana Nápoles
Ana Patrícia Silva

Introdução

Estudo da influência da mudança dos parâmetros de uma função no respectivo gráfico. Aplicações

Função de proporcionalidade directa

No âmbito do estudo das funções, conceito fundamental de Matemática, uma das competências que se pretende que os alunos desenvolvam ao longo de toda a escolaridade, consiste na observação e estudo de gráficos de funções dadas por expressões algébricas bem como na alteração de parâmetros e verificação dos efeitos produzidos nos gráficos.

Por exemplo quando se estuda a função de proporcionalidade directa $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$ (8° ano de escolaridade) pretende-se estudar o significado do parâmetro k.

Com auxílio de uma folha de cálculo como por exemplo o Excel é possível desenvolver um módulo computacional, em que seja possível trabalhar simultaneamente com a expressão da função $y = f(x)$, uma tabela de valores $(x, f(x))$ e o respectivo gráfico. É importante que os alunos trabalhem ao mesmo tempo com estas representações e consigam traduzir umas nas outras.

Uma das potencialidades do Excel consiste na possibilidade de incluir uma «barra de deslocamento» ou scrollbar, que fica associada ao valor de uma determinada célula. A figura 1 mostra uma parte do módulo computacional construído com o objectivo de estudar a função de proporcionalidade directa. Neste caso, a barra de deslocamento está associada ao valor da constante de proporcionalidade directa k, cujo valor se encontra na célula C2.

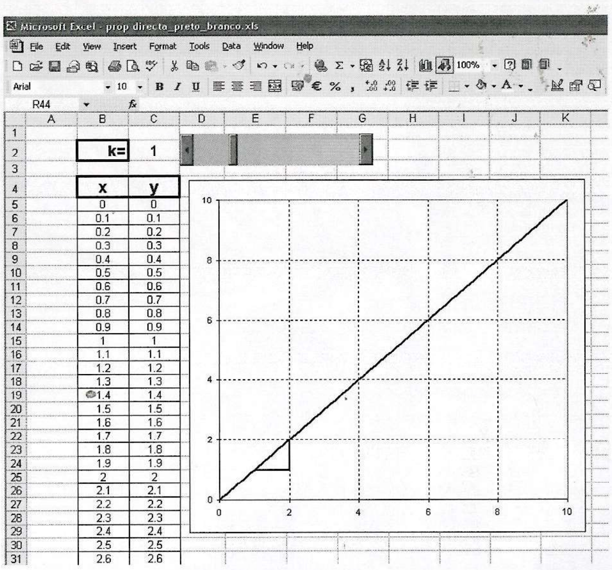

Figura 1. Aplicação desenvolvida em Excel para visualização do gráfico correspondente à função y=kx.

Este tipo de actividade, de construção do gráfico da função $y = kx$ deverá ser concretizada pelos os alunos devidamente orientados pelo professor.

Propôr aos alunos uma tarefa como a contrução de um dado módulo computacional com objectivos muito concretos, leva por um lado os alunos a utilizar as técnicas matemáticas aprendidas nas aulas, como também os obriga a a desenvolver o hábito de pensar e agir de uma forma organizada.

Para a construção deste módulo é necessário que os alunos tenham bem presente as três representações de funções: expressão algébrica, tabela e gráfico. Em seguida compreenderão que uma vez que a tabela de dados é construida a partir da expressão, e o gráfico é traçado com os valores da tabela, quando se actua sobre a barra de deslocamento (ou seja quando se altera o valor de k) a tabela e o gráfico são automaticamente actualizados (figura 1).

É necessário definir uma tabela de dados: os valores de x e os correspondentes valores de y e ainda o valor mínimo e máximo para o conjunto dos valores das abcissas e o espaçamento entre eles. A partir daqui os alunos compreenderão que para a construção do gráfico basta seleccionar a tabela de dados e recorrer ao botão de Assistente de gráficos do Excel e escolher o gráfico que melhor se adequa à situação.

Para além de alguns aspectos relacionados com a parte estética do módulo desenvolvido, e que não são de desprezar pois tornam os gráficos mais apelativos como por exemplo a sua formatação (cor de fundo, espessura do traço, cor do traço) temos ainda a definição da escala que é muito importante do ponto de vista matemático. Para definir a escala basta clicar sobre os números que constam no eixo dos xx, e com o botão direito fazer aparecer um menu que dará todas as orientações necessárias para tornar a escala não automática.

Finalmente a barra de deslocamento que se introduz a partir da barra de ferramentas do Visual Basic corresponde apenas a um código simples contendo os valores mínimo e máximo da barra, `Scrollbar1.min` e `Scrollbar2.min` respectivamente e a que valor da célula é que ela fica associada. O código para a anterior aplicação é o seguinte:

```
Private Sub ScrollBar1_scroll()

ScrollBar1.Min = 0
ScrollBar1.Max = 200
Cells(2, 3) = ScrollBar1.Value / 10

End Sub
```

A figura 2 ilustra o que acontece quando se actua sobre a barra de deslocamento.

Esta aplicação permite estudar a variação do parâmetro k na função de proporcionalidade directa $y = kx$. No entanto é possível também desenvolver uma aplicação para estudar a função $y = kx + b$, agora com duas barras de deslocamento, uma para o k e outra para o b.

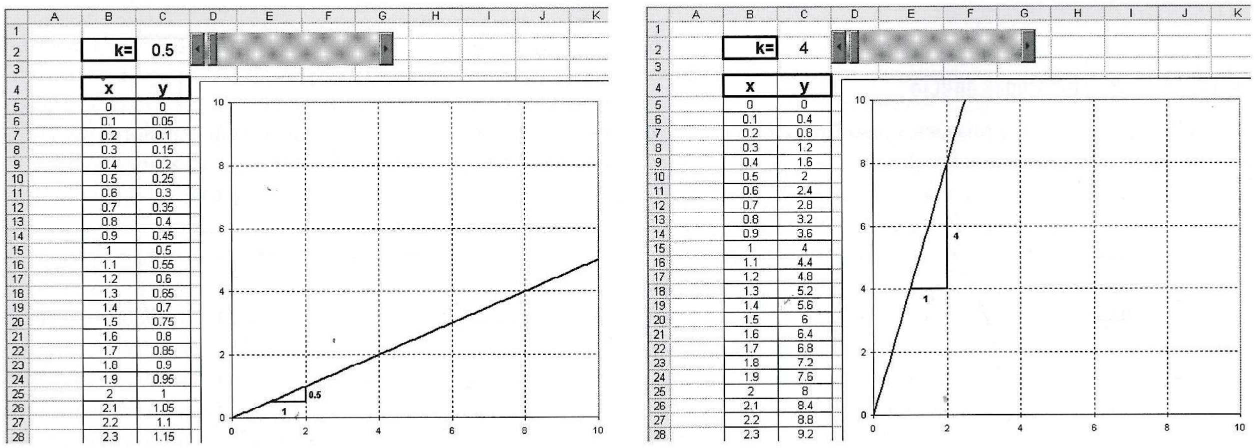

Figura 2. Resultados obtidos para k=0.5 e k=4.

Estudo da função quadrática

Tendo em conta que o conceito de função é de importância primordial no ensino da Matemática e que percorre todos os níveis desde os do ensino básico ao secundário, faremos agora uma abordagem ao estudo das funções ao nível do 10° ano, nomeadamente ao estudo da função quadrática recorrendo mais uma vez à folha de cálculo não esquecendo que todos módulos que serão apresentados deverão ser propostos aos alunos pois estão perfeitamente ao seu alcance. Os alunos terão mais uma vez oportunidade de utilizar os conhecimentos matemáticos e aplicá-los nas diferentes situações que vão surgindo.

Com a possibilidade de usar barras de deslocamento, é possível fazer o estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos, analisar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções considerando apenas a variação de um parâmetro de cada vez, e ainda estudar as transformações simples de funções.

Na figura 3 apresenta-se uma aplicação desenvolvida para o estudo da função quadrática na forma $y = a(x - x_v)^2 + y_v$. As três barras de deslocamento correspondem ao parâmetro a e às coordenadas do vértice da parábola x_v e y_v.

Na figura 4 é possível visualizar alguns resultados obtidos quando se alteram os valores de a e das coordenadas do vértice da parábola.

Da mesma forma é possível desenvolver uma aplicação para o estudo da função quadrática escrita na forma canónica $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Neste caso serão introduzidas três barras de deslocamento para os coeficientes a, b e c. Associado ao gráfico da função quadrática é possível compreender os significados geométricos dos coeficientes.

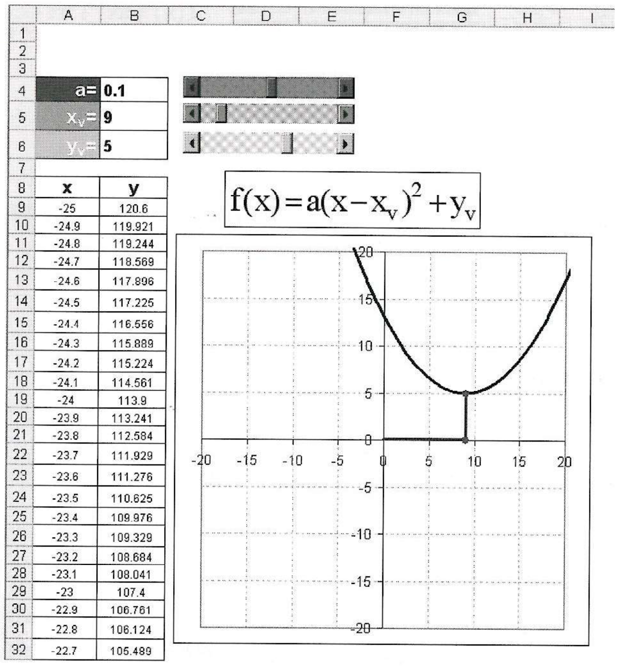

Figura 3. Aplicação desenvolvida em Excel para visualização do gráfico correspondente à função $y=a(x-x_v)^2+y_v$.

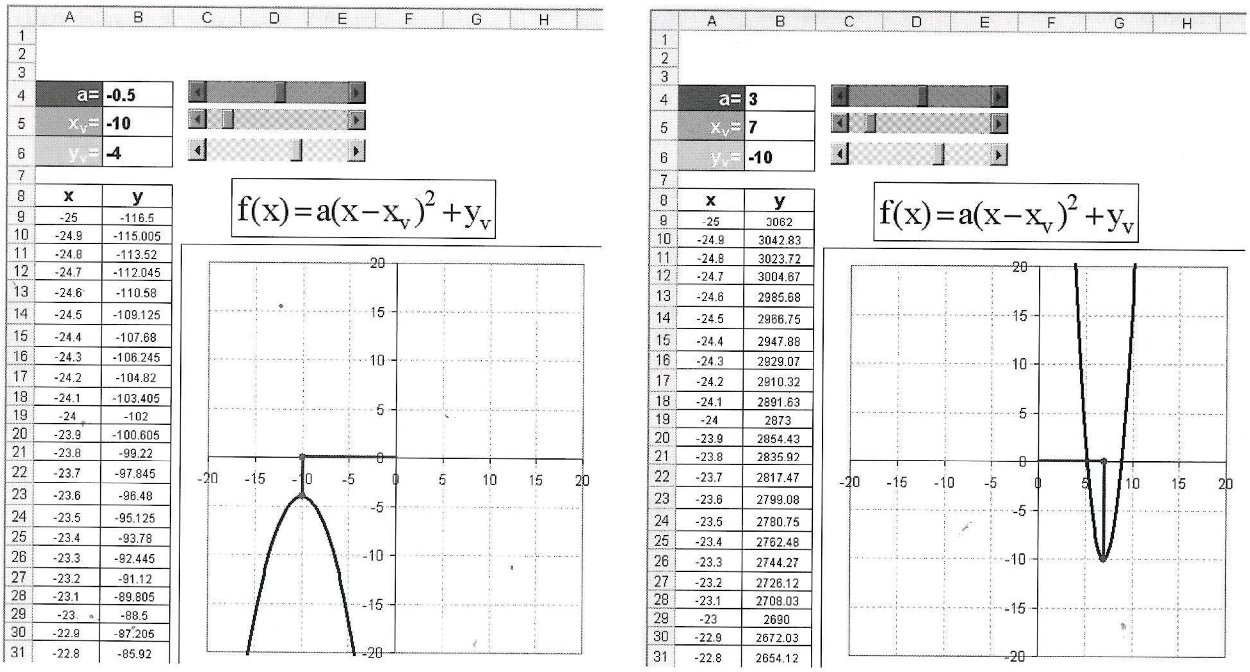

Figura 4. Resultados obtidos quando se alteram os valores de a, x_v e y_v.

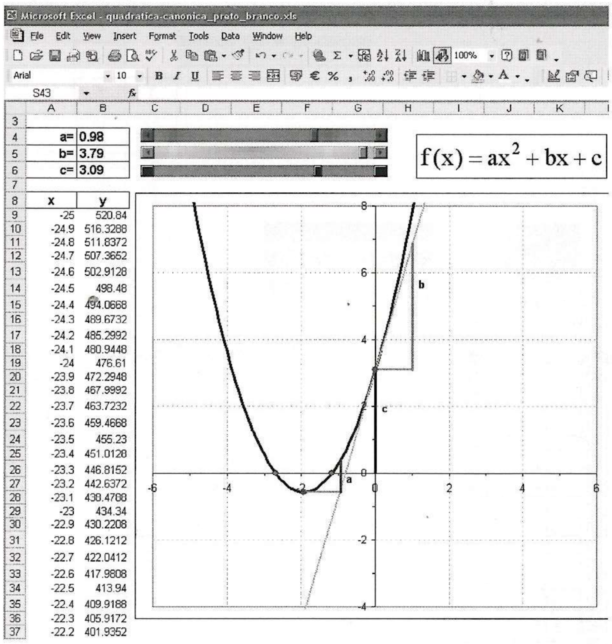

Figura 5. Aplicação desenvolvida em Excel para visualização do gráfico correspondente à função y=ax²+bx+c.

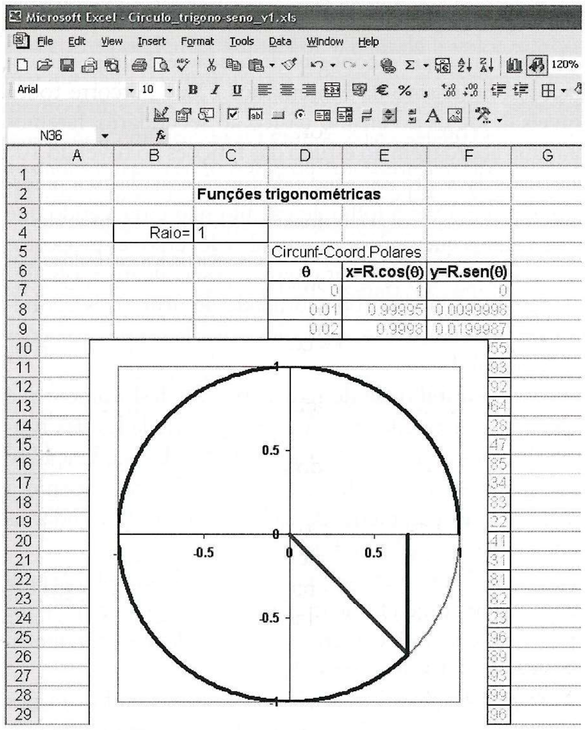

Figura 6. Círculo trigonométrico

A exploração das aplicações apresentadas na figura 4 e 5 pode conduzir a um trabalho de investigação no sentido de os alunos descobrirem propriedades destas famílias de funções e o efeito da alteração dos parâmetros:

1. Relativamente à primeira aplicação (figura 4) é possível estudar a variação de a e de x_v e y_v. Os alunos deverão reconhecer que a função quadrática do tipo $y = a(x - x_v)^2 + y_v$ se pode obter à custa da função $y = x^2$ efectuando uma translacção segundo o vector (x_v, x_y).

Relativamente à aplicação da figura 5:

2. Fazendo $c = 0$ estudar as funções do tipo $y = ax^2 + bx$.
3. Fazendo $b = 0$ estudar as funções do tipo $y = ax^2 + c$.
4. Fazendo $b = c = 0$ estudar as funções do tipo $y = ax^2$.
5. Qual a consequência no gráfico da alteração do parâmetro a? E do parâmetro c?

O parâmetro b influencia o gráfico de uma forma não tão imediata. De que forma?

6. Construir uma aplicação semelhante às duas anteriores para visualização do gráfico de uma função quadrática mas escrita na forma $y = a(x - x_0)(x - x_1)$.

Construção do círculo trigonométrico e desenho do gráfico da função y=sen(x)

As funções trigonométricas constituem parte fundamental dos programas de Matemática do 11° ano.

Propõem-se, agora, a construção na folha de cálculo do círculo trigonométrico e correspondente representação do gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$.

Neste módulo computacional os alunos terão de, primeiramente, construir uma circunferência de raio 1.

Aqui, a discussão sobre qual a equação que deverão escolher para descrever a circunferência com vista ao seu traçado, é já por si um trabalho com valor didáctico. Poderão optar pela equação cartesiana, no entanto verão que as equações paramétricas

$$\begin{cases} x &= R\cos(\theta) \\ y &= R\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$$

respondem melhor a esta tarefa. Basta para isso definir 3 colunas, uma com os valores das amplitudes dos ângulos de 0 a 2π e outras duas com os valores de x e de y.

Em seguida, deve ser introduzido numa célula um valor para o ângulo que o raio faz com o eixo dos xx. Os alunos deverão ter presente que à medida que a amplitude do ângulo vai variando em $[0,2\pi[$, o lado extremidade desse ângulo intersecta a circunferência num único ponto cuja ordenada é o seno desse ângulo (figura 6).

Para visualizarmos a representação do gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ à medida que a amplitude do ângulo vai variando no círculo trigonométrico, é introduzido um botão de comando que ficará associado a um código. Sempre que o botão for activado, o código será executado, os valores da amplitude do ângulo vão mudando e será construído simultaneamente o gráfico da função.

O facto de ser necessário introduzir um botão de comando, está relacionado com o aspecto visual pois neste caso queremos relacionar o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ com o circulo trigonométrico, e ver que à medida que o seno do ângulo varia (no círculo trigonométrico), o gráfico vai sendo traçado gradualmente. Para que isso aconteça basta mandar escrever em duas colunas os pontos $(x, \text{sen}(x))$ através do referido botão de comando. Esta série de dados, estando associada a um gráfico irá originar o seu aparecimento gradual. Assim basta utilizar o procedimento de ciclo iterativo For.....Next.

O seu significado simples consiste no seguinte:

Para variável de valor inicial dado e valor final
Executar isto
Recomeçar incrementando a variável um certo valor

Na figura 7 está representado o código em que para cada valor de i, desde 0 até ao valor correspondente ao Angmax (que entretanto está inserido na célula da linha 2 coluna 9) escreve em duas colunas o valor de i e o respectivo $\text{sen}(i)$.

```
Sub Button3_Click()
  Angmax = Cells(2, 9)
    For i = 0 To Angmax
      Cells(3, 9) = i
      Cells(7 + i, 11) = i * 3.1415927 / 180
      Cells(7 + i, 12) = Sin(i * 3.1415927 / 180)
    Next i
End Sub
```

Figura 7. Código associado ao botão de comando.

Na figura 8 é apresentada uma sequência daquilo que é possível visualizar após accionar o botão de comando.

Com auxílio desta aplicação pode fazer-se o estudo completo da variação e do sinal da função $\text{sen}(x)$.

Uma vez construída a aplicação da função seno pode ser proposta a construção de uma aplicação que desenhe o gráfico da função $y = \cos(x)$. Por outro lado a construção de módulos computacionais para melhorar a compreensão do estudo dos ângulos é também uma boa proposta de trabalho que poderá ser desenvolvida ao nível do 11° ano.

Para finalizar apresentaremos em seguida um módulo computacional que poderá constituir um tema para um trabalho com características de projecto.

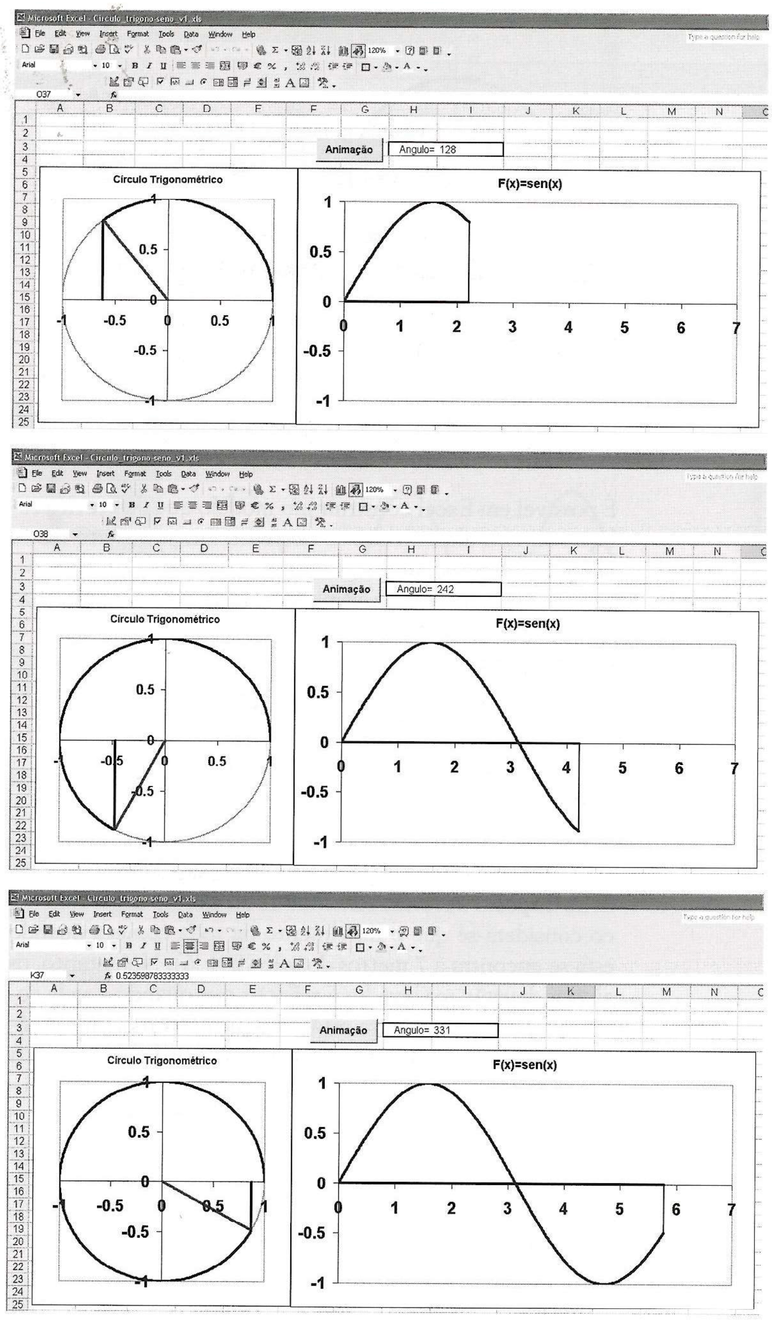

Figura 8. Variação do seno de um ângulo no circulo trigonométrico e traçado do respectivo gráfico da função f[x]=sen[x].

A Roda gigante. Modelação Matemática

Dada a grande variedade de situações reais que podem ser modeladas através de funções trigonométricas, o estudo destas, pode ganhar especial interesse com a análise de situações concretas.

A abordagem matemática de uma situação real passa pela construção de um modelo matemático, uma descrição da situação, que se estende por diferentes fases:

- interpretação e simplicação do problema na elaboração do modelo real;
- «tradução matemática» ou matematização do modelo real para a construção do modelo matemático (no caso concreto o modelo será do tipo $h(t) = a\cos(bt) + c$);
- interpretação e avaliação do modelo matemático de acordo com a situação real.

Todos nós conhecemos as rodas gigantes das feiras ou dos parques de diversões.

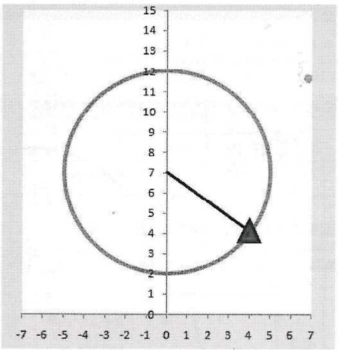

Figura 9. Raio e cadeira que se está a estudar da roda gigante construída em Excel com 5 metros de raio e a 2 metros do solo.

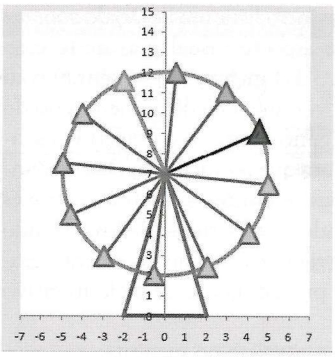

Figura 10. Roda gigante construída em Excel com 5 metros de raio e a 2 metros do solo.

É possível em Excel construir um modelo que descreva a relação entre a altura a que se encontra um passageiro numa roda gigante e o tempo.

Para isso, procede-se primeiro à construção da roda. Analogamente ao que foi explicado para a construção do círculo trigonométrico, pode-se recorrer às equações paramétricas

$$\begin{cases} x &= R\cos(\theta) \\ y &= R\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$$

para desenhar a circunferência. Considerando o raio da roda 5 metros e que esta se encontra a 2 metros do solo, temos para os valores de x : 5 sen α e para os valores de y : $7 + 5$ cos α, já que para se ter o ângulo descrito pela cadeira disposto de forma semelhante ao círculo trigonométrico considera-se que o movimento da roda começa quando esta se encontra a 7 metros do solo $(2 + 5)$. No entanto, os alunos deverão ser levados a reflectir que quando a roda começa a girar o passageiro está na posição da roda mais próxima do solo (na cadeira a 2 metros do solo) e será a partir daqui que se vai iniciar a contagem do tempo. Logo, o ângulo descrito pela cadeira não vai ter o lado origem paralelo ao solo (quando a cadeira está a 7 metros do solo) mas, sim perpendicular ao solo. Este facto faz com que se tenha que alterar o argumento da função co-seno para $\alpha - \pi/2$, ou seja, os valores de x deverão ser $5\,\mathrm{sen}(\alpha - \pi/2)$ e os valores de y serão $7 + 5\cos(\alpha - \pi/2)$.

De seguida para se construir um raio da circunferência e um ponto sobre esta para simular a cadeira que se está a estudar desenha-se um segmento de recta, bastando para isso indicar numa tabela as coordenadas dos seus extremos como em módulos anteriores já foi referido (figura 9).

Pode-se alterar o aspecto do ponto que está sobre a circunferência de forma a assemelhar-se a uma cadeira de uma roda gigante. Pode-se ainda melhorar o aspecto da roda gigante, considerando-se que esta tem 12 cadeiras desenharem-se as restantes cadeiras e raios. Esta construção é bastante simples e mais uma vez útil, já que envolve a utilização de conceitos de trigonometria. Para tal, deve-se ter em atenção que como a roda tem 12 cadeiras igualmente espaçadas, entre elas distam de um ângulo de $2\pi/12 = \pi/6$. Logo, a expressão para o valor da abcissa e ordenada do ponto que representa a cadeira obtém-se adicionando $\pi/6$ ao argumento da função co-seno e seno, respectivamente, na expressão das coordenadas do ponto. A construção dos restantes raios será análoga, pois para obtermos as coordenadas dos pontos que representam as cadeiras será sempre adicionado ao argumento da função co-seno e seno um múltiplo de $\pi/6$ na expressão das coordenadas do ponto anteriormente referido, conforme a posição da cadeira relativamente à considerada. Poderão também ser construídos os segmentos para representarem o suporte da roda (figura 10).

Na figura 11 apresenta-se a aplicação desenvolvida em Excel que ilustra com uma animação como se associa a posição duma cadeira numa roda gigante, à medida que esta vai girando, ao traçado da representação gráfica da função que nos dá a altura da cadeira considerada, em função do tempo. Para se visualizar a animação basta premir o botão de comando «Iniciar movimento da roda».

As três barras de deslocamento correspondem aos parâmetros raio, tempo de duração de uma volta e número de voltas que a roda vai girar. Estes parâmetros podem ser alterados vendo-se a imediata transformação no aspecto da roda, posicionamento da cadeira considerada, bem como, a alteração correspondente na representação gráfica (figura 11).

Para a construção desta aplicação em Excel é necessário, primeiro, construir-se o modelo matemático que descreve a relação entre a altura a que se encontra um passageiro e o tempo. Supõe-se que quando a cadeira inicia o seu movimento encontra-se no ponto mais próximo do solo (a posição inicial), inicia-se, assim, a contagem do tempo em 0 minutos. Admite-se, também, que a cadeira movimenta-se no sentido anti-horário.

Ao longo do seu movimento, a posição que a cadeira ocupa está perfeitamente determinada pelo ângulo α cujo lado origem é o segmento de recta vertical que une o centro da roda ao solo e o lado extremidade é o raio da roda relativo a esta cadeira.

Em primeiro lugar restringe-se o estudo do movimento da cadeira entre a sua posição inicial e a posição que ocupa quando o raio da roda relativo à cadeira descreveu um ângulo de $\pi/2$ (figura 12).

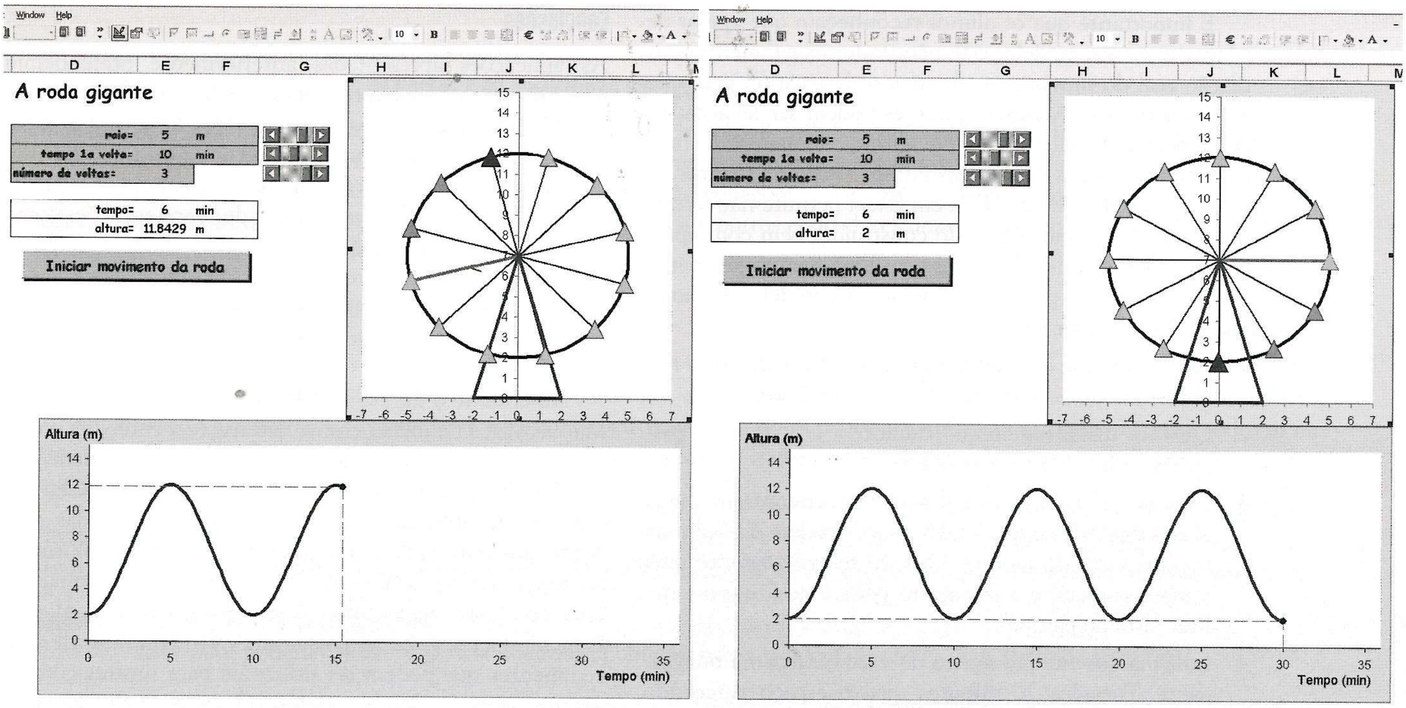

Figura 11. Aplicação da roda gigante construída em Excel.

Determina-se x em função de α.

Tem-se que $\cos\alpha = x/5$ logo $x = 5\cos\alpha$.

Sendo assim, a altura do passageiro em função do ângulo α é dada por $7 - x = 7 - 5\cos\alpha$.

Restringiu-se o problema à determinação do ângulo α em função do tempo. Observa-se que a amplitude do ângulo α corresponde à amplitude do arco percorrido pela cadeira.

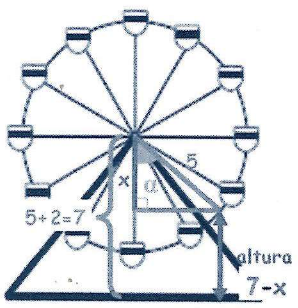

Figura 12.

De acordo com a situação, a cadeira descreve um arco de amplitude 2π radianos em 12 minutos. Uma vez que a velocidade de rotação é constante, o arco percorrido é directamente proporcional ao tempo. Logo, a amplitude do arco percorrido pela cadeira em t minutos é dado por

$$\alpha = \frac{2\pi}{12}t = \frac{\pi}{6}t \text{ radianos.}$$

Logo, a expressão que relaciona a altura da cadeira com o tempo para α, $\alpha \in]0, \pi/2[$ é:

$$7 - 5\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

De forma análoga, se verifica que a expressão é válida para $\alpha \in]\pi, 2\pi[$, $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$ e $\alpha = \pi/2$.

Sendo assim, a altura h, em metros, de um passageiro, t minutos após a roda gigante ter começado a girar, é dada pelo modelo:

$$7 - 5\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

Uma vez encontrado o modelo, este deve ser testado. Deve ser posta em causa a validade do modelo.

É importante que os alunos reconheçam que apesar de adoptarmos este modelo, este não traduz exactamente a situação real do movimento de uma roda gigante, podendo ser aperfeiçoado. Algumas questões podem ser levantadas, tal como, a roda não está sempre a girar, tem que parar constantemente para os passageiros saírem e entrarem outros.

A aplicação desenvolvida em Excel permite não só que os alunos visualizem o modelo construído, bem como proporciona a possibilidade de fazerem uma análise geométrica fazendo uma exploração dinâmica do modelo. Algumas questões podem ser colocadas:

1. A que altura se encontra um passageiro ao fim de 10 minutos?
2. Quais os instantes em que, durante a 1.ª volta, um passageiro está a 9,5 metros do solo?
3. Sabe-se que quando os passageiros se encontram a uma altura superior ou igual a 9,5 metros podem desfrutar da melhor vista do parque. Quanto tempo, durante uma volta completa, um passageiro poderá desfrutar da melhor vista do parque?
4. Imagina que um passageiro dá várias voltas na roda gigante. Passados 20 minutos qual o espaço percorrido pela cadeira?
5. Imagina, agora, que o passeio de um passageiro na roda gigante teve a duração de 36 minutos. Durante o seu passeio quais os instantes em que o passageiro se encontrava a uma altura de 8 metros do solo?

Para a construção desta aplicação em Excel utilizam-se, maioritariamente conceitos matemáticos, em especial ligados à trigonometria, pelo que deverão ser os alunos a modelar esta situação da vida real, não se limitando apenas (como é frequente) a responder analiticamente a questões que lhes são colocadas. Esta actividade revela-se extremamente rica para ser feita numa sala de aula, laboratório ou clube de Matemática, já que permite trabalhar conteúdos de trigonometria e fazer modelação, tão importante em Matemática.

Conclusões

As aplicações apresentadas anteriormente pretenderam mostrar apenas uma forma de utilizar a folha de cálculo para estudar conceitos matemáticos. Optou-se por mostrar a grande vantagem na utilização do Excel no estudo das funções e dos seus gráficos em vários níveis de escolaridade. Relações entre diferentes tipos de representações como as tabelas, equações e gráficos são mais facilmente compreensíveis quando tais representações são visíveis em conjunto e ligadas umas com as outras isto é quando se altera uma representação, automaticamente as outras representações vêm alteradas.

No entanto a sua riqueza estende-se por vários temas da Matemática e também permite desenvolver conexões muito interessantes entre temas como a álgebra e a geometria.

A folha de cálculo utilizada numa óptica do desenvolvimento de aplicações computacionais relacionadas com conteúdos matemáticos, permite, como vimos anteriormente, com reduzidos conhecimentos ao nível da programação, criar ambientes matemáticos estimulantes para os alunos. Concretamente o Excel possui um vasto conjunto de procedimentos que podem ser utilizados para ilustrar conceitos matemáticos, para fomentar a descoberta e o reconhecimento de padrões e para desenvolver o espírito crítico e investigativo.

A experiência em sala de aula mostra que esta metodologia de trabalho, em que se pretende que os alunos aprendam matemática ao mesmo tempo que constroem aplicações dinâmicas em Excel, é motivante e enriquecedora.

Nota: As aplicações computacionais apresentadas ao longo do artigo poderão ser visualizadas na página com o seguinte endereço: `http://sites.google.com/site/matmodel/`

Margarida Oliveira
Escola E.B.2,3 Piscinas Lisboa

Suzana Nápoles
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Ana Patrícia Silva
Colégio de São João de Brito