Investigação matemática sobre um problema geométrico

Ao longo deste ano lectivo leccionei uma turma de 10º ano de Matemática A onde uma aluna se destacou pela excelência. Este facto levou-me a procurar problemas, desafios e propostas de trabalhos, que lhe ia colocando individualmente com o intuito, não só de não a perder como para contribuir para o seu desenvolvimento e não frustrar as suas expectativas, o que para mim foi também desafiante.

Uma das propostas que lhe fiz foi uma pequena investigação geométrica que fui acompanhando e orientando.

Por me parecer um bom problema, por me surpreender a forma como a Bárbara facilmente o resolveu e as conclusões a que chegou, resolvi partilhá-lo com os leitores da Educação e Matemática,

Porque penso que também é importante mostrar que os nossos alunos excelentes não são descorados nas nossas práticas lectivas, deixo esta ideia, para discutirem, ou talvez também para responderem às questões que a própria Bárbara considerou ficarem em aberto.

O problema era o seguinte: Construir um triângulo isósceles do qual se conhece o raio (R) da circunferência circunscrita e se sabe que a soma da base com a altura é uma constante (k). Descobrir que relação deve existir entre R e k para que o problema tenha solução?

A Bárbara desenvolveu o seguinte trabalho:

Comecei por tentar resolver este problema (1ª questão) pela via geométrica. Por passos:

1. Traçar a circunferência de raio dado (R);
2. Construir o triângulo de altura $2R$ e base $k - 2R$;
3. Construir o triângulo de altura R e base $k - R$;
4. Traçar as rectas que unem as duas bases (figura 1).

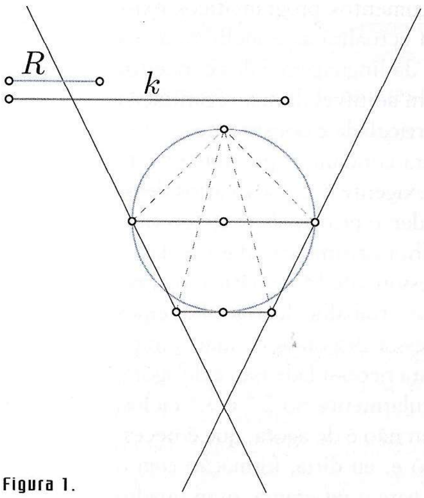

Figura 1.

De acordo com a minha intuição, estas duas rectas determinam as soluções do problema. Esta intuição pode ser comprovada na resolução analítica. Verifica-se que, no máximo, o problema poderá ter duas soluções (se cada recta for secante, e portanto, intersectar a circunferência em dois pontos). Se as rectas forem tangentes à circunferência, o problema tem apenas uma solução. Não tem soluções, quando a recta é exterior à circunferência.

Neste exemplo, os valores dados têm duas soluções (figura 2).

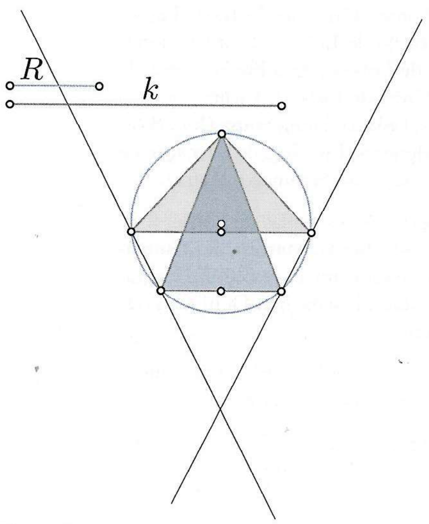

Figura 2.

Para responder à questão «Que relação deve existir entre R e k para que o problema tenha solução?», tenho, agora, que fazer um tratamento analítico do problema. Assim, em primeiro lugar, vou colocar a minha resolução geométrica sobre um sistema de eixos coordenados, Oxy, sendo que o centro da circunferência tem de coordenadas (0,0) (figura 3).

Equação da circunferência: $x^2 + y^2 = R^2$.

Determinação da Equação da recta[1]: $AB = k$; $BC = k - 2R; CD = BC/2$ (resultado do processo de construção)

Logo, o declive é 2 e a ordenada na origem é $k - R(k - 2R + R)$. Portanto $y = 2x + (-k + R)$.

Daqui segue-se também que a solução do problema tem de ser dada por estas rectas, pois com declive igual a 2, se tem $k - h = 2 \times b/2 = b$, sendo h e b, respectivamente, a altura e base do triângulo solução.

Para encontrar as soluções do problema, é necessário verificar quando é que a recta e a circunferência se intersectam:

$$x^2 + [2x + (-k + R)]^2 = R^2$$

$$(\ldots)$$

$$x = \frac{-2(-k + R) \pm \sqrt{4(-k + R)^2 - 5(k^2 - 2kR)}}{5}$$

O número de soluções depende do binómio discriminante (Δ):

$$\Delta = 4(-k + R)^2 - 5(k^2 - 2kR)$$

$$(\ldots)$$

$$\Delta = -k^2 + 2kR + 4R^2$$

Se $\Delta < 0$, a recta é exterior à circunferência.

Se $\Delta = 0$, a recta é tangente à circunferência.

Se $\Delta > 0$, a recta é secante à circunferência.

Resolução em ordem a k:

$$-k^2 + 2kR + 4R^2 = 0$$

$$(\ldots)$$

$$k = R(1 - \sqrt{5}) \vee k = R(1 + \sqrt{5})$$

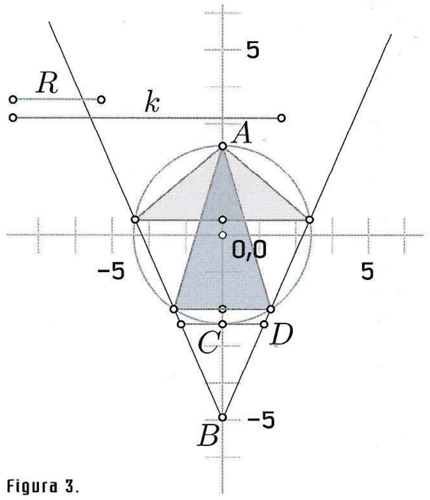

Figura 3.

Pode-se ver, à partida, que uma das soluções (a primeira) não interessa para o problema em questão pois é negativa, e comprimentos nunca podem ser negativos. Portanto, interessa apenas estudar a variação de R e k a partir de $k = 0$. Logo, o único zero de Δ que nos interessa é $k = \Phi 2R$ (isto pois $k = 2R(1 + \sqrt{5})/2$ que é equivalente a $k = \Phi 2R$).

Verifica-se, então, que os valores de k compreendidos entre 0 e $\Phi 2R$ têm duas soluções na equação; no entanto, estas soluções podem ser negativas, positivas ou nulas. Para responder a esta pergunta, vou recorrer à resolução geométrica do problema. Para começar, não é difícil ver que se o comprimento de k coincidir com o diâmetro ($2R$), um dos triângulos vai ter base nula (figura 4).

Esta situação pode ser comprovada algebricamente:

Seja $k = 2R$

$$x = \frac{-2(-2R + R) \pm \sqrt{4(-2R + R)^2 - 5[(2R)^2 - 2(2R)R]}}{5}$$

$$(\ldots)$$

$$x = 0 \vee x = \frac{4R}{5}$$

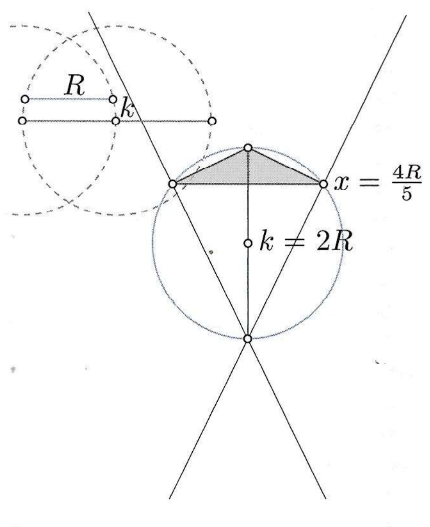

Figura 4.

Seguindo o mesmo raciocínio, entende-se que se k for menor que $2R$, existe, no máximo uma solução (positiva, ou seja, válida para a resolução do problema): se k, que é uma constante que representa a soma da base com a altura do triângulo isósceles desejado, é menor do que somente a própria altura (ou seja, k nem chega para «completar» o comprimento necessário para a altura de uma das soluções, nem, muito menos, deixa nada de «sobra» para formar a base), uma das soluções é sempre impossível desde $k = 0$ até $k = 2R$. Porém uma das soluções existe sempre (excepto quando k toma valores menores que 0).

Quando $k = \Phi 2R$, o problema só tem uma solução, tratando-se obviamente do caso de tangencia da recta com a circunferência. Entre $k = 2R$ e $k = \Phi 2R$, existem duas soluções para a equação que, por serem ambas positivas, se traduzem em duas soluções para o problema. Quando $k > \Phi 2R$, a recta passa a ser exterior à circunferência e, por isso, deixamos de ter qualquer solução para o problema.

(...)

Restam algumas questões que ficam em aberto: a razão do aparecimento do número de ouro, Φ, como uma constante importante para a resolução analítica do problema e se o seu aparecimento (que também se constata em certas relações nos pentágonos) estará relacionado com as próprias formas geométricas de que estamos a lidar (triângulos, que quando unidos, podem formar pentágonos)?

Nota

[1] Note-se que basta determinar a equação de uma das rectas, pois a outra é simétrica, tornando-se redundante para a investigação.

Bárbara Alexandra Borges Ribeiro

Mariana Sacchetti

Escola Secundária José Estêvão

Fiquei surpreendido pelo relativo bom desempenho dos alunos

A experiência que partilho aconteceu enquanto leccionei a disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais de 11° ano, abordava pela primeira vez a temática dos Grafos.

Tratava-se de uma turma do Curso de Ciências Sociais e Humanas, tradicionalmente constituídas por alunos que querem «fugir» à Matemática. Fiquei surpreendido pelo relativo bom desempenho dos alunos, nesta primeira parte do ano lectivo, aquando da realização quer dos vários trabalhos, quer do teste sumativo feito sobre esta unidade temática. Penso que este sucesso se deve ao facto dos conteúdos matemáticos serem explorados a partir de situações que eles vivenciam no dia-a-dia, tornando, assim, as aprendizagens mais significativas.

Os bons desempenhos deram-me um incentivo extra, decidi propor a estes alunos uma pequena actividade de investigação sobre um tema que não faz parte do programa. Também, era um desafio por mostrar que os Grafos não se utilizam apenas na tradicional representação de mapas de vias de comunicação.

Esta actividade de investigação sobre Grafos Planares consistiu no estudo da relação existente entre os Grafos Planares e os Sólidos Platónicos. O desenvolvimento desta investigação teve como base um guião organizado em duas partes distintas. Desta forma, na primeira parte, os alunos investigaram uma breve abordagem aos dois conceitos (grafos planares e sólidos platónicos). Numa segunda parte, os alunos envolveram-se em duas tarefas: construir os sólidos pedidos, com o *ZomeSystem*; e investigar, usando a sombra projectada do sólido, o grafo planar associado a cada sólido platónico.

É de referir que os alunos apreciaram esta abordagem do conceito de planaridade, tornando-se assim evidente a mais valia desta estratégia em oposição a uma tradicional exploração feita no quadro, projectando um acetato ou, eventualmente, apresentando vários grafos planares numa ficha de trabalho. Julgo que para este facto, muito contribuiu a presença de dois «condimentos» essenciais: o facto de ser uma actividade de grupo; e a existência de motivação elevada, originada por uma exploração com um diferente material didáctico (recentemente adquirido através do PAM).

Em virtude da agradável experiência que se vivenciou nesta aula, deixo aqui alguns comentários de alunos: «Sobre a aula passada, acho que trabalhámos bem e que foi um bom método de compreensão da matéria através de materiais manipuláveis.»; «Na minha opinião, a aula passada foi muito dinâmica e criativa, devia de haver mais aulas assim.»; «Gostei da aula passada, pois com a utilização de materiais manipuláveis conseguimos expressar melhor os nossos raciocínios, e ao ser uma aula prática o interesse é maior pela matéria. Devíamos fazer mais vezes aulas práticas!».

Carlos Rosmaninho

Agrupamento de Escolas de Arraiolos