# Construção do algoritmo para a divisão de fracções

## Relato de uma experiência com alunos do 6ºano de escolaridade[1]

Luísa Selas

A nível do 6º ano de escolaridade, a tradicional dificuldade dos alunos nas operações com fracções salienta-se, muito particularmente, no que se refere à divisão. Existem recomendações no sentido de a divisão de fracções começar por ser abordada de uma forma conceptual, tirando partido dos conhecimentos sobre números e operações de que os alunos sejam já detentores (NCTM, 2000). Mas, se na introdução às fracções, e à sua adição, subtracção e multiplicação é mais ou menos frequente o recurso a representações concretas ou pictóricas, a divisão de fracções é, em geral ensinada partindo apenas do algoritmo e, portanto, sem qualquer suporte visual ou conceptual.

A transmissão da regra (*inverter e multiplicar*), quer feita simplesmente, quer apoiada em justificações envolvendo a manipulação de expressões racionais algébricas, acaba por deixar os alunos confusos e incapazes de saber quando aplicá-la. Impõe-se, portanto, desenvolver estratégias de ensino/aprendizagem significativas para o aluno que possam conduzir à interiorização, por parte destes, do algoritmo da divisão de fracções.

O recurso a actividades de natureza investigativa na sala de aula de matemática tem sido fortemente recomendado, tanto no nosso país (Ponte & Matos, 1996), como a nível internacional (NCTM, 2000). Actividades investigativas poderão ser uma forma de envolver os alunos nas suas próprias aprendizagens, quer motivando-os, quer levando-os a formular conjecturas. Investigações várias têm mostrado a possível eficácia de tais abordagens no ensino/aprendizagem, nomeadamente, no contexto das fracções, em particular com alunos com mais dificuldades.

### Aprendizagem do algoritmo da divisão de fracções: uma actividade investigativa

É recomendado o uso de materiais de manipulação e de representações pictóricas antes do ensino dos algoritmos, e que se tire partido de situações do real (Bezuk & Bieck, 1993). Stuart (2000), salienta que a maioria dos alunos referem que o uso de manipuláveis como uma ferramenta para instrução os ajuda a ver a origem dos números nas fórmulas. No entanto, podendo embora promover novas oportunidades de aprender, os materiais manipuláveis não asseguram que os alunos aprendam matemática, sendo necessário fazer a transferência das ideias manipuláveis para o papel (Cobb, Yackel, & Wood, 1992).

Tem havido tentativas de abordagens de ensino que se pensa poderem ajudar o aluno a aprender o algoritmo da divisão de forma motivadora e significativa: a partir da exploração de situações de manipulação, os alunos chegam a uma listagem de resultados de divisões, a partir da qual poderão conjecturar, identificando um padrão. Numa destas abordagens, partiu-se da manipulação de materiais para explorar situações de subtracção sucessiva (Sharp, 1998). Numa outra, usou-se a ideia da divisão como o número de partes necessárias para cobrir uma outra parte de outro tamanho (Bezuk & Armstrong, 1993). Ambas as estratégias tiveram por base a ideia de que a aprendizagem dos alunos deve ser construída a partir de conhecimentos prévios básicos dos alunos sobre fracções e sobre divisão com números inteiros.

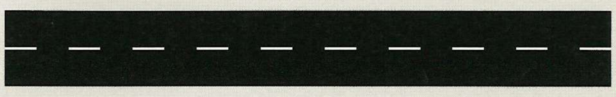
### Trabalho na Estrada: Alcatroamento

Paulo e a sua equipa alcatroaram $^{1}/_{8}$ de um quilómetro de estrada num só dia. $^{1}/_{8}$ de um quilómetro é representado por esta faixa:

1. Em Março, o Paulo e a sua equipa alcatroaram uma secção de $^{1}/_{2}$ quilómetro da estrada a seguir representada. Quantos dias utilizaram para terminar o trabalho?

   Primeiro tenta estimar quantas vezes a faixa de $^{1}/_{8}$ de quilómetro cabe na secção $^{4}/_{8}$ quilómetro da secção da estrada.

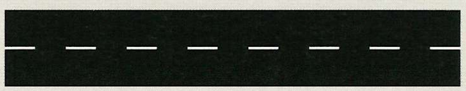
   Depois usa a faixa da estrada para verificar.



   Podes expressar esta situação como sendo $^{4}/_{8}$ de um quilómetro dividido por $^{1}/_{8}$ de um quilómetro, isto é,

   $(^{4}/_{8}) / (^{1}/_{8}) =$ ____

2. Ainda em Abril, o Paulo e a sua equipa alcatroaram uma secção de $^{3}/_{8}$ de quilómetro da estrada a seguir representada. Quantos dias utilizaram para fazer o trabalho?



   Podes expressar esta situação como sendo $^{3}/_{8}$ de um quilómetro dividido por $^{1}/_{8}$ de um quilómetro, isto é:

   ____ / ____ = ____

Figura 1

### Trabalho na Estrada: Reparação

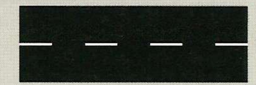
O Julho trouxe-lhe mais trabalho — o verão é o melhor tempo para fazer reparações de estrada.

1. A secção da estrada que necessitou de reparações foi de $^{5}/_{16}$ de um quilómetro. A equipa mantinha uma passada de $^{1}/_{8}$ de um quilómetro por cada dia. O patrão do Paulo quer saber quanto tempo demorou a acabar este trabalho.

   Podes ver este problema como sendo $^{5}/_{16}$ de um quilómetro a dividir por $^{1}/_{8}$ de um quilómetro por dia que podes representar por:

   ____ / ____ = ____

2. Com o decorrer do mês o Paulo e a sua equipa tiveram mais trabalho. Repararam $^{3}/_{16}$ de um quilómetro que a seguir está representada. Quantos dias utilizaram para terminar o trabalho?



   Podes escrever como sendo:

   ____ / ____ = ____

Figura 2

## Desenvolvimento da Actividade

Tendo como base tais pressupostos, procurou-se uma actividade com uma forte componente de investigação e de exploração e que estivesse relacionada com o conhecimento que o aluno tem do mundo real, com vista a ajudar a desenvolver uma predisposição para a aprendizagem da divisão de fracções. Assim, foi construída a actividade *Trabalho na Estrada*, com base na apresentada por Bezuk e Armstrong (1993) a qual foi posta em prática numa turma de 6° ano de escolaridade.

Não se pensou que o algoritmo normalizado *inverter e multiplicar* se desenvolveria naturalmente a partir do uso de manipuláveis, mas antes que a actividade investigativa seria motivadora e que poderia levar à identificação de um padrão a partir do qual os alunos pudessem formular uma conjectura sobre um algoritmo para a divisão de fracções. A actividade foi construída de modo a iniciar-se com um exemplo que pudesse despertar a curiosidade e o entusiasmo dos alunos (exemplo ilustrado na figura 1), tendo sido propostas, em seguida, outras situações (exemplos ilustrados na figura 2 e figura 3) onde as tarefas começavam a ser cada vez mais abertas para um trabalho mais exploratório e investigativo. Dado a actividade completa ser um pouco longa, optou-se por construir 4 fichas sendo as três primeiras destinadas às sucessivas divisões com a ajuda do material manipulável (como se pode visualizar nas figuras referidas).

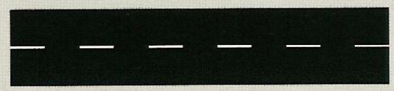
Na última (figura 4), destinada a rever a actividade até então desenvolvida e os resultados obtidos, os alunos foram confrontados com algumas das divisões efectuadas e foi-lhes pedido que conjecturassem acerca da divisão de duas fracções. Dedicou-se uma aula inteira a esta fase do trabalho por haver indicações de que obter descrições sobre o pensamento matemático dos alunos é uma tarefa complexa e demorada.

## Relato de um episódio

Os alunos trabalharam em pequenos grupos sendo-lhes distribuídos a ficha da actividade e o respectivo manipulável.

## Trabalho na Estrada: Pintar as faixas

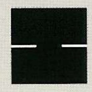
Miguel e a sua equipa pintam as linhas da estrada. Eles demoram um dia a pintar $5/16$ de um quilómetro. $5/16$ de um quilómetro é representado por esta faixa.



1. Miguel e a sua equipa realizaram um trabalho no Porto. Pintaram $3/16$ de um quilómetro que está representado a seguir. Quantos dias utilizaram para terminar o trabalho?

   _____/_____ = _____

2. Ainda na cidade do Porto o Miguel e a sua equipa pintaram $1/16$ de um quilómetro que está representado a seguir. Quanto tempo demorou a acabar o trabalho?



   _____/_____ = _____

Figura 3

## Padrões

Utiliza o teu trabalho das fichas anteriores para completar as expressões representado no seguinte quadro.

$$\frac{4}{8} \div \frac{1}{8} = 4$$

$$\frac{3}{16} \div \frac{1}{8} =$$

$$\frac{3}{16} \div \frac{5}{16} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{8} \div \frac{5}{16} =$$

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = 6$$

$$\frac{1}{32} \div \frac{1}{8} =$$

$$\frac{6}{8} \div \frac{1}{8} = 6$$

$$\frac{1}{3} \div \frac{1}{8} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{9}{16} \div \frac{5}{16} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{1}{16} \div \frac{5}{16} = \frac{1}{5}$$

Que conjecturas podes fazer acerca da divisão de duas fracções? Como chegaste a essa conclusão?

Figura 4

No meio da primeira ficha, alguns dos alunos, já tentavam conjecturar um algoritmo para a divisão de fracções colocando de parte o manipulável:

— *Store, eu consigo fazer a divisão sem isto.*

Mediante tal atitude o professor pediu explicações havendo desde logo a distinção clara de dois grupos: um do qual fazia parte o aluno Frederico e um outro onde a porta voz era a Sara.

Frederico: *Para dividir fracções multiplica-se pelo inverso da última fracção.*

Prof.: *Como chegaste até aí?*

Frederico: *Foi o que o meu pai me disse.*

Prof.: *Explica-me melhor.*

Frederico: *Não sei, mas o meu pai disse que era assim.*

O professor deixa a discussão entre os alunos do grupo não validando a sua resposta.

O outro grupo, o qual não tinha recebido informação extra-aula, tirou a seguinte conclusão:

— *Divide-se os numeradores e os denominadores.*

Ao que uma aluna do grupo contrapôs dizendo:

— *Mas aqui isso não dá. (1/8 : 3/4).*

Prof.: *E com a ajuda da «fatia da estrada»?*

Sara: *Boa! Cabem 6. São 6 bocados. Mas não há outra maneira sem ser com este bocado?*

Prof.: *Pensa.*

Sara: *Em vez de escrever 3/4 escrevo 6/8.*

Prof.: *Que nome se dá a essas fracções?*

Sara: *Fracções equivalentes. São a mesma coisa.*

Prof.: *Então para dividir fracções é preciso ...*

Sara: *Tem que ter o mesmo denominador e depois faz-se o mesmo que o de cima.*

Entretanto dá o toque de saída sendo retomada a aula no dia seguinte.

Os alunos entraram, sentaram-se na mesma disposição da aula anterior e ficaram à espera de novo material para trabalhar. Mas perante a situação apresentada na aula anterior pelo Frederico, o professor achou conveniente fazer a consolidação da actividade desenvolvida. Assim, o professor apresentou a toda a turma a conjectura da Sara e do Frederico. Vários alunos concordaram com a proposta da Sara não dando importância à do Frederico. O professor não valida nenhuma delas e continua a aula apresentando aos alunos as duas fichas seguintes com uma nova unidade, a qual é colocada de imediato de lado. Os alunos estavam interessados somente em verificar se a regra era válida para todos os casos.

Nuno: *E agora 3/16:5/16? O 3 não divide o 5. Eles não se dividem.*

Este comentário trouxe alguma discussão à turma tendo o professor de esclarecer qual o significado de divisível. Feito este esclarecimento a aula é interrompida pelo toque de saída tendo o professor deixado em suspenso as conjecturas dos alunos não validando nenhuma.

Na aula seguinte foi entregue aos alunos a ficha quatro na qual eles escreveram a sua conjectura. Eis alguns registos efectuados pelos alunos:

- Para dividir duas fracções tem de se dividir numerador pelo numerador e denominador pelo denominador;
- Dividir-se o numerador com numerador e denominador com denominador. O denominador deve ser igual e se não for não pode dar número com vírgula fica em fracção;
- Quando os numeradores e denominadores não dão para dividir temos que multiplicar pelo número inverso;
- Mediante tais conclusões, o professor remeteu para a turma, perguntando qual delas eles escolhiam. Ao que a turma lhe responde: multiplicar pelo inverso da segunda fracção é receita para todos os casos.

É então que se ouve Frederico dizer, com um certo alívio,

— *Afinal o meu pai sabe*.

## Em jeito de conclusão

Foi posta em prática, com alunos do 6° ano, uma actividade de índole investigativa com o objectivo de proporcionar oportunidades de diálogo e de debate, de tal forma que se afastasse das abordagens a que estavam habituados e que, normalmente, contemplavam simples transmissão passiva de conhecimentos e prática de exercícios rotineiros. O professor mostrara, inicialmente, dúvidas quanto à eficácia desta abordagem por se tratar de *uma turma heterogénea com alguns alunos fracos e, que por isso, estes não se sentiriam à vontade para tirar dúvidas com o professor ou com os colegas*. Em casos destes, dizia, o método tradicional é o melhor.

Fomentar e orientar uma actividade investigativa pela primeira vez não é tarefa fácil para o professor, principalmente tratando-se de alunos para quem a experiência também era nova. O professor considerou o seu trabalho bastante complexo, pois teve de proporcionar uma atmosfera aberta, mas controlada, de forma a permitir a interacção, teve de incentivar a autonomia dos alunos, intervindo apenas quando necessário, e teve de ter em atenção os diferentes ritmos de aprendizagem.

Das situações da sala de aula, salientam-se alguns aspectos que conduzem a uma reflexão sobre a importância das experiências e conhecimentos prévios dos alunos e como podem ser um factor do empenhamento na realização de actividades investigativas deste tipo. Na verdade, o professor precisou de lidar com uma situação inesperada que pareceu poder anular o efeito da surpresa da descoberta e até fazer com que deixasse de ser necessária, descoroçoando os intervenientes principais. Foi o caso do aluno Frederico a quem o pai dissera *como se faz*. Embora, para os outros alunos, o mistério tenha permanecido em aberto até à identificação final da regra, deverá reflectir-se sobre as possíveis implicações da situação para este aluno. Enquanto os colegas exploravam a actividade, Frederico continuava imóvel no lugar pois não era capaz de se abstrair da regra que o pai lhe comunicara.

Para a maioria dos alunos, foram aulas em que, nas palavras de uma aluna mais entusiasta, se tem *a massa cinzenta sempre a trabalhar*. Os alunos, embora de início estranhassem aulas tão diferentes daquelas a que estavam habituados, acabaram por envolver-se nas actividades e nas discussões que foram surgindo. Tendo fomentado o diálogo e a interacção na sala de aula, o trabalho realizado parece ter contribuído para a auto-confiança dos alunos e para o gosto destes pela matemática.

No que respeita à aprendizagem do algoritmo da divisão, a maioria dos alunos, parece tê-lo interiorizado. Através da identificação de um padrão, formularam conjecturas, e elegeram o algoritmo padrão, nas suas próprias palavras — *a receita para todos os casos*.

Na opinião do professor, e como resultado imediato da abordagem de ensino, os alunos parecem ter atingido *um nível normal* na divisão de fracções. Neste domínio, os resultados não parecem muito interessantes. Resta, no entanto, esperar para saber, qual será, a médio e a longo prazo, a opinião do professor.

### Nota

1 Trabalho desenvolvido no âmbito da Tese de Mestrado Supervisão Pedagógica no Ensino da Matemática publicada pela APM.

### Referências


Bezuk, N., & Armstrong, B. (1993). Understanding Division of Fractions. *Mathematics Teacher*, 86(1), 43–46, 56–60.

Bezuk, N., & Bieck, M. (1993). Current Research on Rational Numbers and Common Fractions: Summary and Implications for Teachers. In Douglas T. Owens (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: Middle School Mathematics* (pp. 118–136). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 2–33.

Ministério da Educação (1991). *Programa de matemática: plano de organização do ensino-aprendizagem — 2° ciclo do ensino básico* (volume 2). Lisboa: Imprensa Nacional.

NCTM, (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1996). Processos Cognitivos e Interacções Sociais nas Investigações Matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal., & J. P. Ponte, *Investigar para Aprender Matemática* (pp. 119–137). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Sharp, J. (1998). A Constructed Algorithm for the Division of Fractions. In Lorna J. Morrow & Margaret J. Kenney, *The Teaching of Algorithms in School Mathematics* (pp. 198–203). Reston: Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Stuart, V. (2000). Math curse or Math Anxiety? [11 pag.]. *Teaching Children Mathematics*, 6(5). [Online]. Available: `http://www.nctm.org/tcm/2000/01/curse.html`. (Novembro 12, 2000).



**Luísa Selas**

**Esc. Sec. José Regio**