Múltiplas conexões matemáticas envolvendo o número 120

Paulo Afonso

Existem muitos tipos de números que são objecto de estudo nas aulas de matemática: os pares, os ímpares, os primos, os primos entre si, os compostos, os perfeitos, os quadrados, os triangulares, os naturais, os inteiros, os relativos, os racionais, os reais, os irracionais, etc. Destes, há alguns que se distinguem pela sua importância histórica, como seja o 1, o zero, o Pi, ou o de ouro. Não obstante isto, tem-se vindo a descobrir aspectos fascinantes acerca de outros bem mais «modestos», em termos da sua importância relativa como entes da História da Matemática, como seja o 9, o 1089, o 3037 ou o 142857. Basta uma consulta rápida na Internet para nos apercebermos das suas particularidades do ponto de vista matemático.

Contudo, não é acerca destes números que eu vou incidir a minha reflexão. Decidi escolher um outro, o 120, por permitir um leque variado de conexões a alguns conceitos matemáticos. Se reflectirmos acerca da importância deste valor nas nossas vidas, facilmente o associamos a aspectos do tempo (sistema sexagesimal), ou ao limite de velocidade nas auto-estradas. Conectado ao tema da condução de veículos motorizados, muitas já terão sido as pessoas que tiveram que se submeter ao pagamento de coimas de 120 euros devido a excesso de velocidade. Vejamos, pois, com mais pormenor, as seguintes propriedades mágicas deste número.

a) Tem o privilégio de ser formado pelos três primeiros números inteiros (0, 1 e 2);

b) Pode ser obtido pela adição de alguns números da sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...). Eis alguns exemplos:

$$2 + 8 + 21 + 89 = 120$$
$$2 + 3 + 5 + 21 + 34 + 55 = 120$$
$$2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 89 = 120$$

c) Como número composto, pode ser obtido através da multiplicação de vários factores primos:

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

d) Também pode ser obtido através da adição de oito dos dez primeiros números primos:

$$120 = 3 + 5 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29$$

Aliás, tendo em conta a conjectura de Goldbach, que diz que qualquer número par maior ou igual a quatro pode ser obtido pela adição de dois números primos (in `http://pt.wikipedia.org/wiki/Conjectura_de_Goldbach`), o 120 resultaria da adição de 103 com 17, ou de 113 com 7 ou de 117 com 3;

e) É um número triangular (Afonso, 2006b), o que significa que existem dois números inteiros consecutivos que multiplicados entre si originam um produto que é o dobro desse valor 120. Refiro-me aos números 15 e 16, pois $15 \times 16 = 240$. De facto, o 120 é o 15° número triangular, pois $120 = [n \times (n + 1)] : 2$, sendo $n = 15$;

f) Pode-se associar o valor 120 ao conceito de amplitude de ângulos, designadamente à amplitude dos ângulos externos de um qualquer triângulo equilátero ou à amplitude de qualquer ângulo interno de um hexágono regular;

g) Ao adicionarmos os seus dígitos constatamos que a soma é 3, logo o 120 é divisível por 3. Este facto permite que nos questionemos acerca de quais serão os nove números inteiros consecutivos que permitem transformar a figura seguinte num quadrado mágico, de ordem três, com soma mágica 120:

Eis uma possível solução, envolvendo os seguintes números consecutivos 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43 e 44:

37	44	39
42	40	38
41	36	43

h) Será que também pode ser afecto a um quadrado mágico de ordem quatro, isto é, será que existem dezasseis números inteiros consecutivos que permitem a elaboração de um quadrado mágico de soma 120?

Através dos três exemplos seguintes pode-se perceber que existe uma regularidade neste tipo de figuras:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

2	16	15	5
13	7	8	10
9	11	12	6
14	4	3	17

3	17	16	6
14	8	9	11
10	12	13	7
15	5	4	18

Quando a sequência se inicia pelo valor 1, a soma é 34; quando se inicia pelo valor 2, a soma é 38; quando se inicia pelo valor 3, a soma é 42. Prolongando este padrão, resulta o seguinte:

Início	Soma	Início	Soma	Início	Soma	Início	Soma
1	34	2	38	3	42	4	46
5	50	6	54	7	58	8	62
9	66	10	70	11	74	12	78
13	82	14	86	15	90	16	94
17	98	18	102	19	106	20	110
21	114	22	**118**	23	**122**		

O padrão anterior permite concluir que não é possível obter-se um quadrado mágico, de ordem 4, envolvendo dezasseis números inteiros consecutivos cuja soma seja 120. O máximo que se obtém por defeito é 118 e o mínimo que se obtém por excesso é 122.

Ora, se formalizarmos este padrão, percebemos que:

1. $34 = 34 + 0 \times 4$
2. $38 = 34 + 1 \times 4$
3. $42 = 34 + 2 \times 4$
4. $46 = 34 + 3 \times 4$
5. $50 = 34 + 4 \times 4$

...

$n \quad = 34 + (n - 1) \times 4$

Se igualarmos esta lei de formação ao valor 120, concluímos que «n» terá que ser 22,5, e este valor será o início da seguinte sequência numérica: 22,5; 23,5; 24,5; 25,5; 26,5; 27,5; 28,5; 29,5; 30,5; 31,5; 32,5; 33,5; 34,5; 35,5; 36,5; 37,5.

Façamos o quadro:

22,5	36,5	35,5	25,5
33,5	27,5	28,5	30,5
29,5	31,5	32,5	26,5
34,5	24,5	23,5	37,5

Confirma-se, pois, que se pode construir um quadrado mágico, de ordem 4, cuja soma mágica 120 resulta da utilização dos dezasseis números decimais acima enunciados;

i) Seria interessante investigar se o 120 tem alguma relação com as potências de base dois (Afonso, 2008a). (Ver figura 1).

Através de uma exploração algébrica, a resolução da equação seguinte: $x^2 + 2x^2 + 4x^2 + 8x^2 = 120$ dar-nos-ia a resposta «8» como sendo a primeira das potências a considerar. A tabela anterior vem confirmar que o valor 120 pode ser obtido a partir da adição de quatro potências de base dois consecutivas $2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$;

j) Se for feito um estudo semelhante para o caso de quatro potências consecutivas de base 3 iremos ficar surpreendidos...

Associemos, ainda, o número 120 às (k) operações aritméticas, (l) aos divisores de um número, bem como (m) às regularidades algébricas;

k) Tentemos encontrar dois números inteiros positivos, de modo a obter-se o valor 120 pela adição da sua soma com a sua diferença e com o seu produto (adaptado de Berloquim, 1991).

Ora, por via da experimentação ou da tentativa e erro, uma possível solução seria a que envolve os valores 30 e 2, pois a sua soma é 32, a sua diferença é 28 e o seu produto é 60; logo, 32 + 28 + 60 = 120.

Em contexto de sala de aula, seria interessante que os alunos tentassem investigar se ainda seria possível obter-se outras soluções. O desejável era estruturar a resolução em termos algébricos, pois poder-se-ia pensar em dois números inteiros positivos «x» e «y», sendo «$x \geq y$». O enunciado da tarefa permite a seguinte escrita matemática: $x + y + (x - y) + xy = 120$. Resolvendo esta equação, resulta que $x = 120 / (2 + y)$. Ora, este resultado implica que se tenha que pensar num valor inteiro positivo para o «y» de modo que ao adicionar-se ao valor 2, o resultado divida exactamente o valor 120. Assim, obter-se-á um valor inteiro para o «x»;

l) Tendo em conta esta análise, seria interessante que os alunos encontrassem todos os divisores do 120, podendo fazê-lo pelo processo de decomposição em factores primos (factorização): 120 = 23 × 3 × 5. O conjunto dos divisores de 120 seria formado pelos seguintes elementos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120. Voltando novamente à fórmula: $x = 120 / (2 + y)$, obter-se-ão sete respostas:

y	x	$x + y$	$x - y$	xy	$x + y + (x - y) + xy$
0	60	60	60	0	60 + 60 + 0 = **120**
1	40	41	39	40	41 + 39 + 40 = **120**
2	30	32	28	60	32 + 28 + 60 = **120**
3	24	27	21	72	27 + 21 + 72 = **120**
4	20	24	16	80	24 + 16 + 80 = **120**
6	15	21	9	90	21 + 9 + 90 = **120**
8	12	20	4	96	20 + 4 + 96 = **120**
10	10	20	0	100	20 + 0 + 100 = **120**

Logo, as oito respostas possíveis envolvem os seguintes pares ordenados (60, 0); (40, 1); (30, 2); (24, 3); (20, 4); (15, 6); (12, 8) e (10, 10).

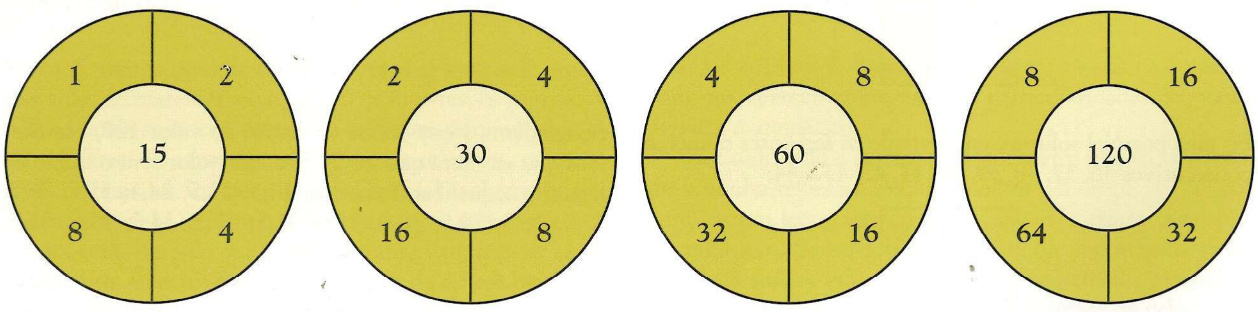

Figura 1.

Note-se que ao adicionar-se o valor de «y» ao valor 2, obtém-se um divisor de 120, que ao multiplicar pelo respectivo valor de «x», outro divisor de 120, obtém exactamente o produto 120, isto é: (2, 60); (3, 40); (4, 30); (5, 24); (6, 20); (8, 15); (10, 12) e (12,10);

m) Pensemos agora no seguinte enunciado: tente encontrar dois números inteiros positivos, de modo a obter-se o valor 120 pela adição da soma do dobro do maior dos dois valores com o outro e com a diferença do dobro do maior com o outro e com o produto do dobro do maior com o outro;

Neste caso, voltando a ser «$x \geq y$», estamos perante a seguinte equação: $2x + y + (2x - y) + 2xy = 120$. A sua resolução permite chegar-se à seguinte igualdade: $x = 120 / (4 + 2y)$. Fazendo-se uma tabela semelhante à anterior:

y	x	$2x + y$	$2x - y$	$2xy$	$2x + y + (2x - y) + 2xy$
0	30	60	60	0	60 + 60 + 0 = **120**
1	20	41	39	40	41 + 39 + 40 = **120**
2	15	32	28	60	32 + 28 + 60 = **120**
3	12	27	21	72	27 + 21 + 72 = **120**
4	10	24	16	80	24 + 16 + 80 = **120**

Resultam cinco possíveis soluções: (30, 0); (20, 1); (15, 2); (12, 3) e (10, 4).

Fazendo-se um paralelismo entre as duas tarefas acabadas de analisar, seria interessante desafiar os alunos a procurarem o enunciado que permite, para o resultado 120, as seguintes soluções: (15, 0); (10, 1); (6, 3) e (5, 4)?

Em síntese, e tirando partido do número 120, este texto visa evidenciar que o tema das conexões matemáticas pode contribuir para que os alunos tenham uma visão integrada da Matemática, onde os conceitos manifestem múltiplas relações entre si e com aspectos da sua vida quotidiana (House & Coxford, 1995; Ortega, 2005; Afonso, 2006a; 2008b). Cabe ao professor criar cenários de aprendizagem baseados em pequenas investigações e em trabalho diferenciado, de modo a que esta visão holística da Matemática possa chegar à sala de aula.

Bibliografia

Afonso, P. (2006a). Investigações e Conexões Matemáticas. In *Actas* do 2nd Internacional Meeting — Elementary Mathematics Education (EME06) — Suporte DVD (ISBN 978-972-99970-5-1). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação.

Afonso, P. (2006b). A Magia das Conexões Matemáticas — um caso envolvendo os números triangulares. *Educação e Matemática*, 90, pp. 35–38.

Afonso, P. (2008a). Conexões Matemáticas: As Potências de Base 2. *Educação e Matemática*, 97, pp. 33–36.

Afonso, P. (2008b). O *Mundo Mágico das Conexões Matemáticas*. Castelo Branco: IPCB.

Berloquim, P. (1991). *100 Jogos Numéricos*. Lisboa: Gradiva.

House, P., & Coxford, A. (1995). *Connecting Mathematics across the Curriculum*. Reston: NCTM.

Ortega, T. (2005). *Conexiones matemáticas. Motivación del alumnado y competencia matemática*. Barcelona: GRAÓ.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Conjectura_de_Goldbach, consultado a 7 de Abril de 2009.

Paulo Afonso

ESE/IP de Castelo Branco

1.º Fórum de Investigação em Ciências da Educação

O 1.º Fórum de Investigação em Ciências da Educação é uma iniciativa das Unidades de I&D em Ciências da Educação. Pretende ser um espaço de debate e diálogo inter Unidades sobre as políticas e práticas de investigação, seus problemas e perspectivas.

Terá lugar nas instalações da Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade de Lisboa, nos dias 16 e 17 de Outubro de 2009. As inscrições são gratuitas mas sujeitas a inscrição até 30 de Julho de 2009. Para mais informações consulte:

http://fice.ie.ul.pt/