Uma tarde nos matraquilhos

O Daniel, o Edgar e a Fátima passaram a tarde a jogar matraquilhos na modalidade «quem perde sai», isto é, quem perdesse um jogo saía, dando lugar no jogo seguinte àquele que tivesse ficado de fora.

O primeiro jogo foi entre o Daniel e o Edgar.

Quando pararam, o Daniel tinha ganho 11 jogos e o Edgar 20.

Quantas vezes se defrontaram entre si estes dois jogadores?

(Respostas até 30 de Setembro para zepaulo@armail.pt)

Quadrados sobrepostos

O problema proposto no número 101 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Se pegarmos em dois quadrados iguais, é possível, sobrepondo-os parcialmente, fazer uma figura onde estão três quadrados: os dois iniciais e mais outro.

Qual é o máximo de quadrados que se pode obter a partir de três quadrados iguais?

E com quatro quadrados iguais? E...?

Recebemos cinco respostas: Alberto Canelas (Queluz), Graça Braga da Cruz (Ovar), Edgar Martins (Queluz), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Tiago Dias.

Como diz o Edgar, podemos sobrepor três quadrados iguais de duas maneiras:

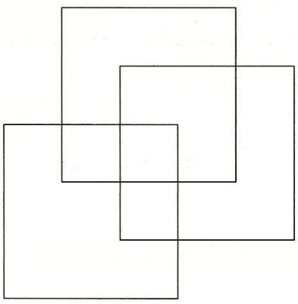

Figura 1.

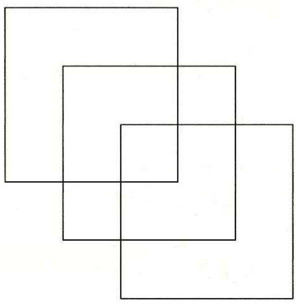

Figura 2.

Antes mesmo de contar o número de quadrados de cada uma das figuras, palpita-me que quem tem mais é a figura 2. A razão é simples. O enunciado sugere uma expressão para determinar o número de quadrados obtidos pela sobreposição de n quadrados iguais. Se isso é possível, então a sobreposição de quadrados segue um padrão. Das duas figuras, aquela que parece seguir um padrão é a figura 2.

Palpites à parte, a figura 1 é composta por 7 quadrados e a figura 2 por 8.

Mantendo o mesmo padrão, para n=4 vamos obter 16 quadrados: os 4 iniciais mais os que se mostram na figura 3.

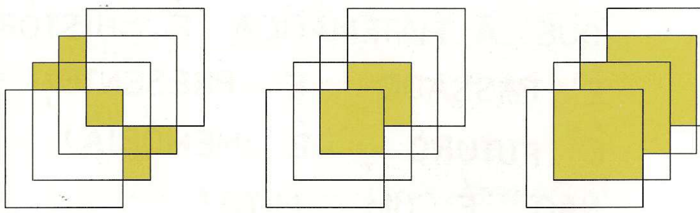

Figura 3.

Podemos classificá-los em dois tipos:

- Alinhados (que têm uma das diagonais alinhada com uma diagonal dos quadrados iniciais): $1 + 2 + 3 + 4 = 10$
- Desalinhados (aqueles mais pequenos, 3 de cada lado, que estão apenas no interior de um quadrado inicial): 6

O caso de n=5, na figura 4, parece mais interessante para contar e a partir dele podemos generalizar para um n qualquer.

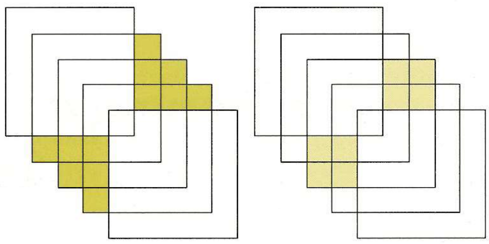

Figura 4.

- Alinhados: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
- Desalinhados: 12 pequenos (6 de cada lado) $+$ 2 maiores (um de cada lado)
- Total: 29

A generalização não é nada fácil mas o Edgar e o Alberto conseguiram fazê-la, obtendo fórmulas que dão o total de quadrados Q em função do número n de quadrados iniciais.

- Se n par, $Q = \dfrac{2n^3 + 3n^2 + 4n}{12}$
- Se n ímpar, $Q = \dfrac{2n^3 + 3n^2 + 4n + 3}{12}$