



## Notações: basta de confusões!

Sónia Figueirinhas

As notações utilizadas em geometria, sobretudo depois da Matemática Moderna, não contribuem para tornar agradável o estudo da geometria. Muito pelo contrário, como são em geral acompanhadas de uma certa tendência para o formalismo, o qual parece ser o pecado original do ensino da geometria, têm sido um obstáculo — embora não o principal, certamente — para a sua revitalização que, embora promovida pelos actuais programas, está ainda longe de concretização.

Assim começava o artigo *As notações em geometria*, escrito por Eduardo Veloso e publicado no número 42 da *Educação*

& *Matemática* de Março/Abril de 1997. Com poucas (ou nenhuma) alterações se poderia caracterizar a actual situação no ensino português, doze anos depois, com um novo programa de Matemática para o ensino básico homologado e prestes a entrar em vigor.

A constatação anterior leva a que o Grupo de Trabalho de Geometria da APM (GTG), numa nova tentativa de promover um debate alargado e consequente, volte a este assunto nestas páginas, com o objectivo de contribuir para a discussão e apresentação de uma proposta de notações em



geometria escolar que seja simples, clara e sugestiva e que, ao mesmo tempo, evite um formalismo excessivo nos textos de geometria e erros abundantes na sala de aula, pelo uso inadequado ou troca dos símbolos envolvidos. Simultaneamente, por entrar brevemente em vigor o novo programa de Matemática para o ensino básico e, nesse âmbito, estarem a preparar-se quer manuais escolares por parte das editoras, quer documentação de apoio ao professor por parte do Ministério da Educação, este momento pode ser crucial para tomar decisões e fazer recomendações, sob pena de deixar escapar uma oportunidade e um contexto que, tão depressa, não se repetirão.

Se, no ambiente do ensino superior ou no de estudiosos da matemática, como o é o dos professores, a exposição a diferentes notações pode levar a que uma pessoa se liberte mais facilmente delas e, nesse processo, entenda melhor os conceitos, o mesmo não nos parece defensável no ensino básico e até mesmo no secundário. Assim, defendemos que deve proporcionar-se que os alunos encontrem, nos manuais e no modo como os professores escrevem os seus textos e no quadro, uma razoável uniformidade nas notações, para assim irem criando hábitos de escrita em textos de matemática. Essas notações devem servir sempre de apoio e não de obstáculo, pelo seu carácter rebuscado e formal, como é agora a situação, à aprendizagem da geometria. Deste modo, uma notação, qualquer que seja a adoptada, quer-se simples e sugestiva, para não suscitar ambiguidades e ser de fácil e imediata interpretação. Além disso, as notações nunca podem ser entendidas como um objectivo da aprendizagem da geometria, devendo facilitar as verdadeiras actividades em geometria mas não substituí-las (por exemplo, se um aluno não seguir fielmente essas notações, pode ser objecto de alguma observação do professor, mas nunca deveria considerar-se que cometeu um erro sujeito a penalização).

### O novo programa

No programa de Matemática que entra em vigor no ano lectivo de 2010/2011, no que respeita às notações, pode ler-se que:

- Os alunos devem ser capazes de ter presente e usar adequadamente as convenções matemáticas, incluindo a terminologia e as notações (página 4);
- Na História da Matemática devem salientar-se o contributo de diversos povos e civilizações para o desenvolvimento desta ciência, a sua relação com os grandes problemas científicos e técnicos de cada época, o seu contributo para o progresso da sociedade, e a sua própria evolução em termos de notações, representações e conceitos, proporcionando uma perspectiva dinâmica sobre a Matemática e o seu papel na sociedade (página 10);
- [Se deve] solicitar o uso de notações, vocabulário e simbologia de forma consistente (página 47).

O pequeno número de referências, mas sobretudo o facto de não existir um conjunto de orientações sobre que notações usar ou que domínio das mesmas exigir aos alunos, torna este documento insuficiente para esclarecer os professores neste aspecto, pelo que se afigura necessária e urgente a produção de um texto com uma proposta uniformizadora e, na medida do possível, consensual. É também muito importante que os documentos de apoio previstos no Plano de Implementação do Novo Programa de Matemática<sup>1</sup> sejam coerentes no que respeita às notações e tenham implícita a preocupação de esclarecer os professores e, conseqüentemente, os alunos sobre o modo de as utilizar.

### Que notações?

Em níveis avançados, como nos cursos superiores ou na formação inicial e contínua de professores, é natural aligeirar notações e até mesmo cometer abusos de linguagem porque a maturidade e o grau de conhecimento permitem evitar confusões que surgiriam facilmente a alguém com pouca experiência em geometria. É comum, por exemplo, encontrar a mesma notação para um segmento e o seu comprimento em diversos livros de geometria de referência (em Birkhoff e Beatley, 1959, encontramos um destes casos). Contudo, no ensino básico, defendemos que deve haver sempre e desde o primeiro instante uma clara distinção entre um objecto e o que nele se pode medir. Se certas simplificações puderem conduzir a dificuldades futuras, então são de evitar. Isto é, num determinado texto pode ser indiferente considerar ângulos ou as suas amplitudes mas, matematicamente, trata-se de coisas distintas e, embora defendamos uma simplificação da notação, ela não é aconselhável se contribuir para confundir *ângulo* com *amplitude do ângulo*. Esta confusão poderia instalar-se facilmente porque os hábitos podem levar a associar imediatamente a um segmento o seu comprimento, e a um polígono a sua área ou o seu perímetro, sobretudo se os alunos tiveram pouco tempo envolvidos em actividades que os ajudem a conhecer as figuras, as grandezas e as medidas (das grandezas), bem como a distingui-las.

O GTG defende uma simplificação total quando as referências aos objectos geométricos estão incluídas num texto. A simplificação defendida, neste contexto, não deve ser entendida como a de proposta de designações mais curtas. Muito pelo contrário se constatará que, na maior parte dos casos, somos apologistas do contrário: substituição de abreviaturas ou símbolos e recurso a uma alternativa mais extensa. Assim, *recta AB*, *segmento AB*, *segmento orientado AB*, *semi-recta AB*, *arco AB*, *arco orientado AB*, *ângulo ABC*, *ângulo orientado ABC*, ou *amplitude do ângulo ABC*, seriam totalmente aceitáveis, por serem de interpretação imediata. Contudo, defendemos a necessidade de uma notação paralela mais específica quando os objectos geométricos (ou as medidas, ou outros) são referidos em fórmulas. Por exemplo, deve optar-se por escrever

$$\text{ampl}(\angle ABC) + \text{ampl}(\angle EFG) = 90^\circ,$$

em vez de  $\angle ABC + \angle EFG = 90^\circ$ .



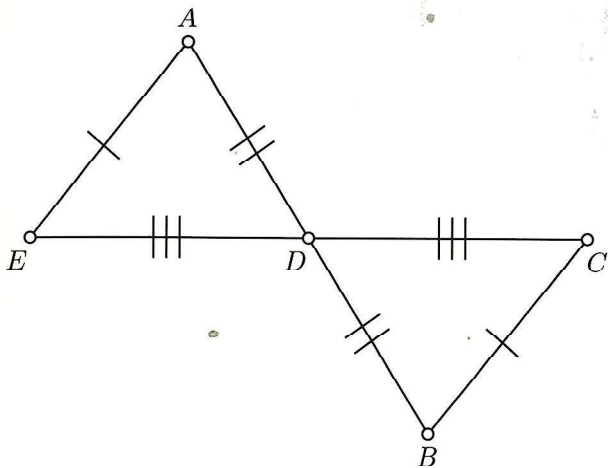


Figura 1.

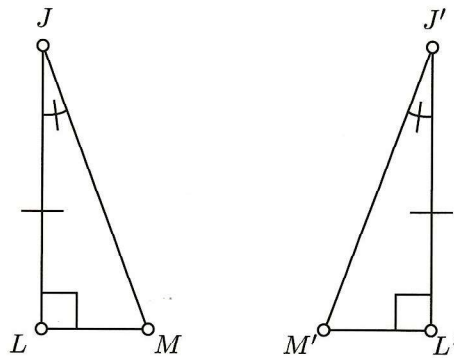


Figura 2.

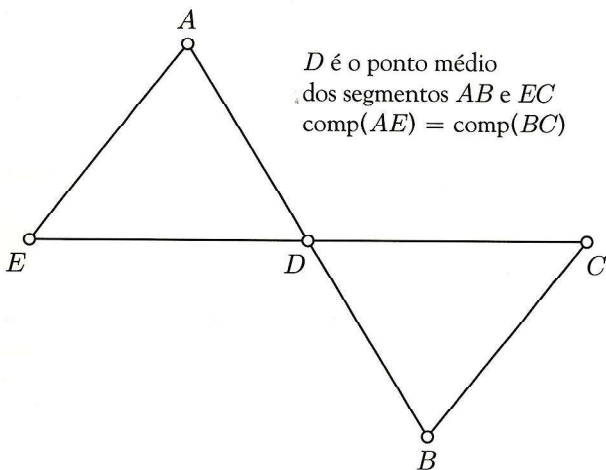


Figura 3.

$$\text{comp}(JL) = \text{comp}(J'L')$$

$$\text{ampl}(\angle MJL) = \text{ampl}(\angle M'J'L')$$

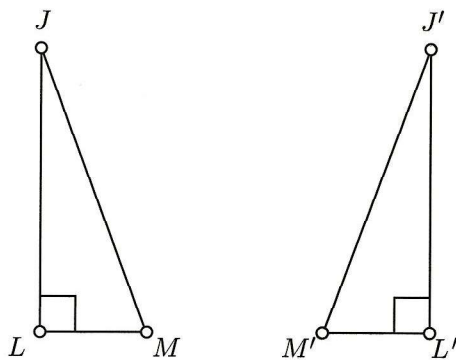


Figura 4.

Também recomendamos que, até ao fim do ensino básico, os textos de geometria tenham o mínimo de fórmulas possível. O uso de fórmulas deve ser reservado aos casos em que a compreensão é manifestamente mais fácil se forem utilizadas. Por exemplo, se  $AB$  e  $CD$  são rectas, em vez de escrever « $AB \parallel CD$ », devemos escrever «a recta  $AB$  é paralela à recta  $CD$ ». Pelo contrário, pode não ser boa ideia escrever «a soma da amplitude do ângulo  $ABC$  com a amplitude do ângulo  $DEF$  é de  $72^\circ$ », quando é mais simples ler « $\text{ampl}(\angle ABC) + \text{ampl}(\angle DEF) = 72^\circ$ ». Deste modo, é nossa convicção que podemos adoptar quase sempre a versão «texto» das notações em vez da versão «fórmulas»: o texto, sempre que possível, deve conduzir à compreensão dos objectos designados pelas notações.

Situações que, a nosso ver, são de evitar: (figuras 1 e 2). Ainda que ao professor e aos alunos, em conjunto, deva ser permitido encontrar formas (mesmo que alternativas às que defendemos) para rápida e claramente assinalar numa figura os dados importantes para resolver uma situação ou problema, o uso de traços pode tornar-se moroso — basta imaginar que, numa mesma figura, se pretende assinalar muitos pares de segmentos de igual comprimento — e até confuso — aqui ilustrado pelo uso de um traço para assinalar a igualdade das medidas de ângulos, mas também da de segmentos, numa mesma figura. Uma alternativa (ainda que, no primeiro caso, não seja equivalente) poderia ser: (figuras 3 e 4).

Embora possam, nalguns casos, ajudar à simples distinção entre objectos, as notações têm uma importância maior

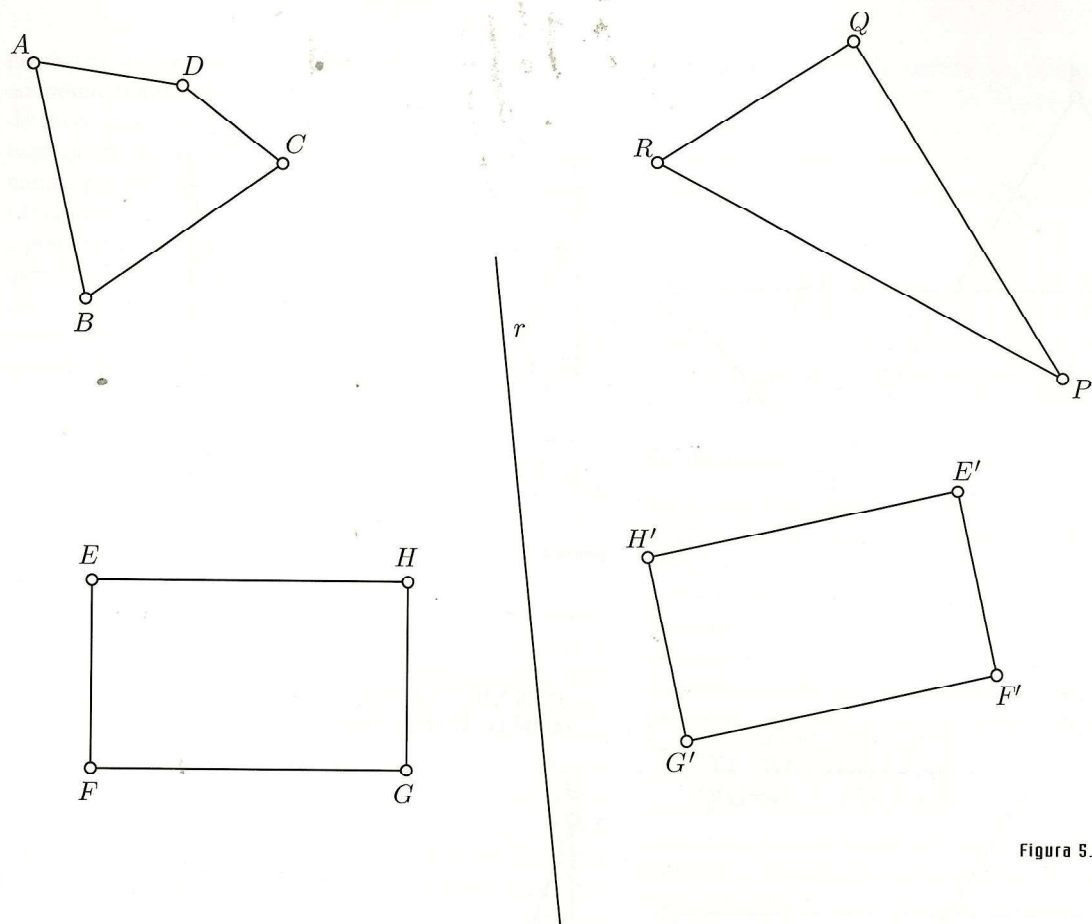


Figura 5.

quando se pensa na versão «fórmulas» de um texto matemático ainda que, no nosso entender, raramente se verifique a necessidade do uso de expressões sintéticas nas salas de aula do ensino não superior. Assim, vamos fazer aqui algumas propostas adicionais que, no nosso entender, vão ao encontro dos princípios enunciados atrás. Estas propostas devem ser entendidas como uma tendência para a uniformização e para a simplificação, embora se aceite que, em situações particulares, alunos e professores possam convencionar recorrer a outros tipos de representação, se isso ajudar à compreensão.

Os polígonos seriam designados pela lista dos seus vértices simplesmente, ainda que seja aconselhável que o nome do polígono anteceda essa designação.

Como legenda da figura 5 poderíamos escrever, por exemplo, que os lados do quadrilátero  $ABCD$  têm todos comprimentos diferentes, que o triângulo  $PQR$  é rectângulo em  $Q$ , e que o rectângulo  $E'F'G'H'$  é o transformado de  $EFGH$  por meio da reflexão de eixo  $r$ .

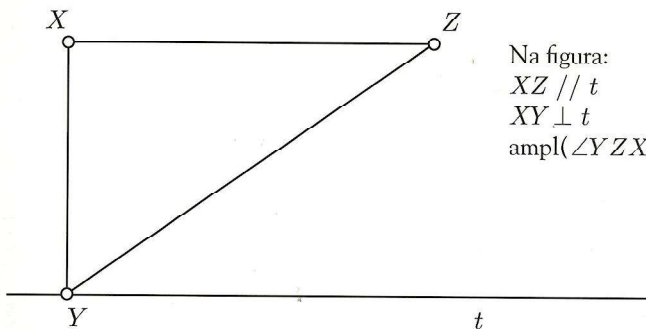
Os símbolos mais usuais e de interpretação simples poderiam manter-se, como se exemplifica na figura 6, embora mantenhamos que é preferível descrever em extensão, no enunciado, os dados.

São de abandonar frases como «No triângulo  $\Delta[SOL]$  os segmentos de recta  $[SO]$  e  $[OL]$  são perpendiculares». Sem repetição e com economia, deverá escrever-se «No triângulo  $SOL$  os segmentos de recta  $SO$  e  $OL$  são perpendiculares».

Ao contrário do que é a tradição em Portugal, em que um arquinho em cima de  $AB$  designa a amplitude do arco  $AB$ , propõe-se que se use essa designação para arco e que, consoante o caso, se indique « $\text{comp}(\widehat{AB})$ » ou « $\text{ampl}(\widehat{AB})$ » nas fórmulas.

Segmentos orientados e vectores continuariam a indicar-se sobrepondo uma seta à sua designação (uma letra minúscula ou duas letras maiúsculas), como é hábito. Ou seja, pode escrever-se  $\vec{AB}$  ou  $\vec{v}$ . Pensamos que é de adiar o mais possível o uso de vectores, devendo preferir-se os segmentos orientados, por serem aquilo com que, na maior parte dos casos, se trabalha efectivamente.

Para indicar a medida de uma amplitude sugere-se o uso da expressão « $\text{ampl}(\text{objecto})$ ». Assim, no caso de um ângulo  $ABC$  não orientado, a sua amplitude seria indicada como  $\text{ampl}(\angle ABC) = 40^\circ$ . Se quisermos referir a amplitude do ângulo orientado  $ABC$ , então teremos que indicar  $\text{ampl}(\angle ABC) = -40^\circ$  ou  $\text{ampl}(\angle ABC) = +40^\circ$ . Da mesma forma, a escrita  $\text{ampl}(\angle ABC) = +40^\circ$  implica que o



Na figura:  
 $XZ \parallel t$   
 $XY \perp t$   
 $\text{ampl}(\angle YZX) \approx 34,9^\circ$

Figura 6.

ângulo  $ABC$  é orientado, sendo  $BA$  a semi-recta origem e  $BC$  a semi-recta extremidade, e que este ângulo tem sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio. De forma similar proceder-se-ia com os arcos e os arcos orientados.

De modo análogo, a expressão «comp(objecto)» indicaria o comprimento (de arcos, segmentos, segmentos orientados, ou outros). Exceptua-se nesta regra, pelo uso consagrado e unânime da notação actualmente em vigor, a indicação do comprimento (ou norma, ou módulo) de um segmento orientado ou de um vector, que se manteria  $\|\vec{AB}\|$  ou  $\|\vec{v}\|$ . Não podemos, contudo, deixar de interrogar-nos sobre esta opção, em vez do uso do módulo, como se faz no caso dos números (também complexos)... Porque não escrever  $|\vec{AB}|$  ou  $|\vec{v}|$ ?

Como afirmámos atrás, relançamos esta discussão por parecer-nos que seria agora um bom momento para que os textos que vão acompanhar o novo programa, a formação dos professores e a escrita dos manuais escolares pudessem reflectir alguma mudança no sentido da simplificação. É desejável uma discussão alargada sobre este assunto, e estamos dispostos a continuar a contribuir com ideias, sem pretender ter encontrado desde já as melhores soluções. Além disso, julgamos pertinente e desejável comunicar com profes-

sores de outras disciplinas que usam notações matemáticas — como a Geometria Descritiva ou a Física — em particular da geometria para, em conjunto, equacionar formas de eliminar ou minimizar algumas diferenças e contradições existentes, ainda que essa aproximação das representações possa ser difícil.

#### Nota

<sup>1</sup> A introdução do novo programa começou este ano lectivo em 40 turmas piloto e a sua generalização inicia-se em 2009/2010. Para mais informações sobre o plano de implementação do novo programa de Matemática, pode consultar a página da Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular ([www.dgidc.min-edu.pt](http://www.dgidc.min-edu.pt)). Na página de entrada, opte pelo separador *Matemática* e, depois, escolha *Programa de Matemática do Ensino Básico*.

#### Referência bibliográfica

George Birkhoff e Ralph Beatley, *Basic Geometry*, Chelsea Publishing Company, 1959.

Sónia Figueirinhas

Grupo de Trabalho de Geometria da APM