Ptolomeu? No Ano Internacional da Astronomia? — Parte I

Maria José Costa

DESCOBRE O TEU UNIVERSO
ANO INTERNACIONAL DA ASTRONOMIA 2009

0. Justificando a escolha

Quem não dispõe de livros específicos mas tem acesso às novas tecnologias, poderá procurar conhecer Ptolomeu a partir de um meio geral de rápido acesso, como a Wikipédia: «*Claudius Ptolemaeus* (em grego: *Κλαύδιος Πτολεμαῖος*; cerca de 83–161 d.C.), em português dito *Cláudio Ptolomeu* ou *Ptolemeu*, foi um cientista grego que viveu durante o período helenista, provavelmente em Alexandria, na então província romana do Egipto. Ele é reconhecido pelos seus trabalhos em matemática, astrologia, astronomia, geografia e cartografia. Realizou também trabalhos importantes em óptica e teoria musical.». E dá-lhe um rosto a partir de uma gravura do século XVI.

Ou seja: Ptolomeu pode ser conhecido por ligações a outras sabedorias que não a Matemática ou a Astronomia ...

Continuando a consulta lê-se: «A sua obra mais conhecida é o Almagesto (que significa ‹O grande tratado›), um tratado de astronomia.» Apresenta o conhecimento astronómico babilónico e grego e é uma das mais importantes e influentes da Antiguidade Clássica; «nela se basearam as astronomias de Árabes, Indianos e Europeus até o aparecimento da teoria heliocêntrica de Copérnico.» Além disso, «o Almagesto veio a servir, por exemplo, de inspiração às tabelas astronómicas medievais de Afonso X, de Abraão Zacuto (1473) e de Munique (1509).»

Uma parte deste artigo baseia-se na investigação levada a cabo aquando da preparação da minha tese de mestrado.

Num astrolábio construído no séc. XV, talvez em França ou em Inglaterra, se pode ler na alidade: «aqui está o mundo projetado num plano, graças à Ptolomeu que mostrou o caminho para estudos sábios».

A mesma entrada refere alguns revezes: Ptolomeu também foi mal apreciado por muitos e durante muitos séculos.

De facto, e ao contrário de outras civilizações, a cultura árabe fez perdurar trabalhos que de outro modo se teriam perdido ao traduzir para a sua língua as obras encontradas nos territórios que ocuparam. Lamentavelmente, traduções posteriores a partir do legado árabe contribuiram para a difusão de alguns lapsos, que em regra foram atribuídos ao autor e não aos tradutores!

Por outro lado, há quem acuse Ptolomeu de ser um mero escrevinhador de textos dos seus antecessores: Tycho Brahe e Isaac Newton, por exemplo, acusaram Ptolomeu de não ter realizado nenhuma observação astronómica, tendo-se limitado a copiar os resultados de Hiparco.

Delambre (1749–1822) e Lalande (1732–1807) foram dois dos críticos mais acérrimos dos séculos XVIII e XIX. Delambre, um dos astrónomos mais competentes e um dos mais bem informados entre os historiadores de Astronomia, põe em dúvida as qualidades de Ptolomeu enquanto observador e critica duramente alguns aspectos do *Almagesto*, nomeadamente, a descrição do astrolábio, a determinação da circunferência da Terra e da excentricidade da Lua; considera-o um insignificante seguidor de Hiparco; apesar disso, reconhece-o como precursor de Kepler: terá sido a partir da hipótese da órbita da Lua ser oval, avançada por Ptolomeu, que Kepler terá considerado elíptica a órbita da Lua. Lalande (1732–1807) corrobora a opinião negativa de Delambre: o único aspecto positivo que encontra na obra de Ptolomeu prende-se com a preservação dos trabalhos dos antepassados em geral e de Hiparco em especial.

O facto de lhe ser atribuída a autoria de uma obra sobre Astrologia, também não contribuiu para a sua boa imagem.

Hoje, porém, Ptolomeu estará reabilitado aos olhos dos astrónomos e será da mais elementar justiça lembrar a obra deste astrónomo grego num ano internacional que pretende celebrar a astronomia.

1. Ptolomeu: vida e obra

Não podemos esperar encontrar retratos fidedignos de Ptolomeu. Há diversas imagens apresentadas como retratos do astrónomo, incluindo algumas em que ele figura de cara rapada quando todos os filósofos gregos tinham de usar barba. Por vezes apresentam-no com uma coroa na cabeça, talvez incluindo-o na dinastia ptolemaica fundada por Ptolomeu I, o Sábio, general macedónico dos exércitos de Alexandre o Grande que ficou à frente dos destinos do Egipto de 323 a.C. a 283 a.C. após a morte do conquistador. A separação entre o cientista e a dinastia foi levada a bom porto pelo astrónomo mouro Haly Abenrudian (séc. XI), mais tarde apoiado por Nicole Oresme (séc. XIV): as posições das estrelas registadas por Ptolomeu já estão afectadas do valor da precessão, fenómeno desconhecido no tempo de qualquer um dos governantes da dinastia ptolemaica ...

Vejamos uma descrição de Ptolomeu atribuída aos árabes, a civilização posterior mais próxima da época em que ele viveu:

... de estatura média,
de pele branca,
andar imponente,
pés pequeninos,
uma mancha vermelha na bochecha direita,
uma barba negra e espessa,
mas os dentes da frente salientes e descobertos.
A sua voz era doce e sonora,
Mas o bafo era forte.
Andava muito,
Muitas vezes a cavalo;
era rápido a zangar-se e lento a acalmar-se;
por outro lado sóbrio,
e fazendo frequentes abstinências.

Há muitas datas para a sua vida, algumas bastante fáceis de rejeitar.

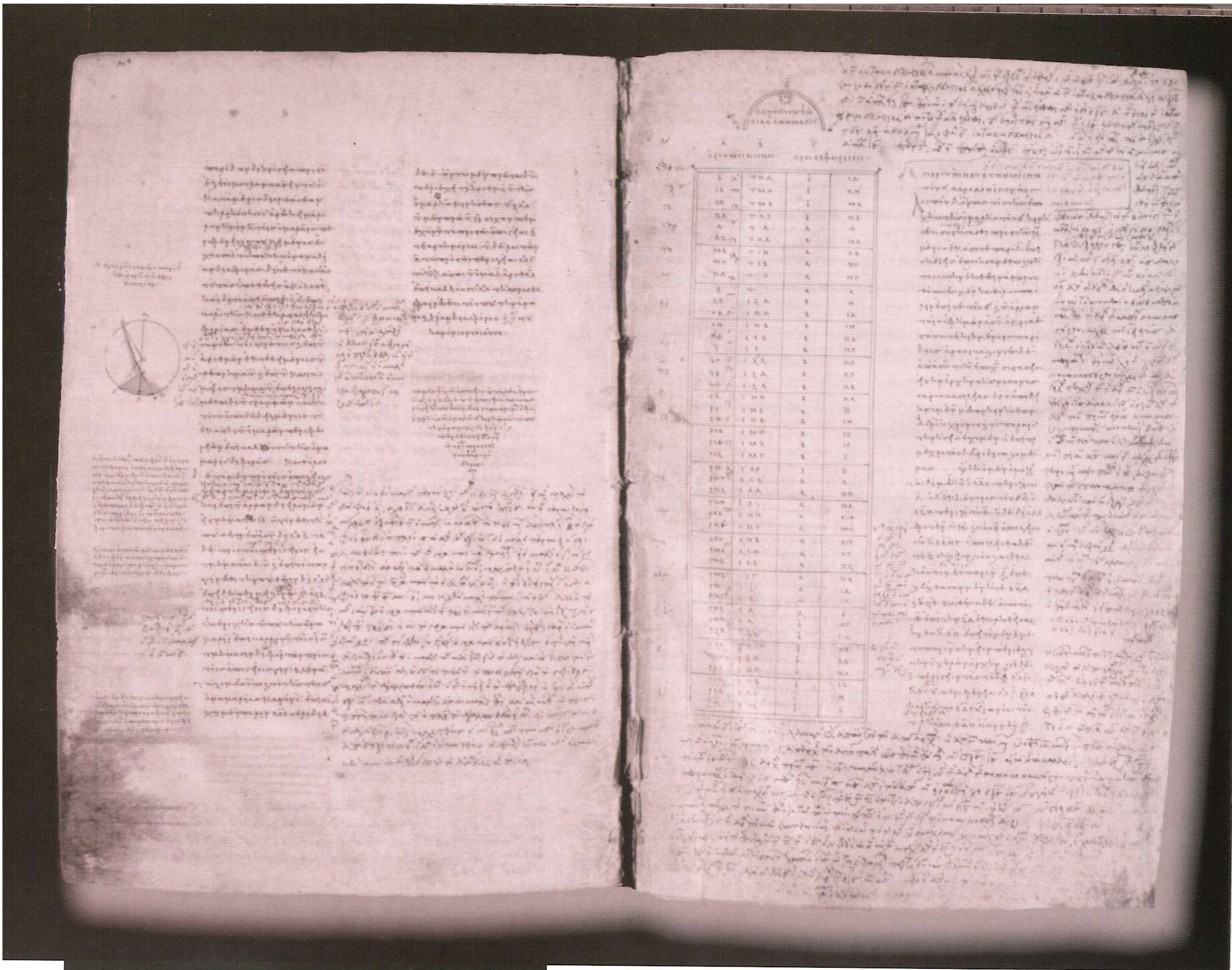
Registos há que provam, e o *Almagesto* é um deles, que Ptolomeu observou durante 14 anos; ora, juntando os anos necessários para coligir todos os elementos recolhidos, o tempo necessário a ganhar conhecimento básico para o trabalho que se propunha levar a cabo e ainda o número de anos que os árabes atribuem à sua vida, a mais credível será 90–168.

O rio Nilo viu-o nascer (em Ptolomemais Hermiu) e morrer (em Canope); terá realizado a maioria das suas observações na cidade de Alexandria.

O Egipto que viu nascer Ptolomeu estava sob o domínio romano que se seguiu à dinastia ptolemaica e que perdurou de 30 a.C. a 379 d.C.. A nova governação impôs algumas restrições aos apoios criados por esta dinastia afectando as actividades artísticas, literárias e religiosas. Por exemplo, foram suprimidos os apoios ao sustento do culto e confiscadas as fortunas dos templos. A cidadania romana só podia ser adquirida pelos alexandrinos e os romanos não podiam casar nem com gregos nem com indígenas — para longe iam as recomendações de Alexandre o Grande que incentivava a mistura das raças e o cruzamento dos que o acompanhavam com as populações locais.

Apesar de os soberanos continuaram a subsidiar os sábios do Museu de Alexandria, estes praticamente só produziam comentários e críticas a textos o que denotava alguma decadência. Num contexto de relativa erosão, ganha maior interessse a postura de Ptolomeu, ao manter de mãos dadas a observação, a teoria e a prática à boa maneira helenística.

Ptolomeu notabilizou-se fundamentalmente na Astronomia. A sua «Composição matemática» como ele próprio intitulou a obra, *a grande compilação do saber astronómico*, mereceu da parte dos árabes o adjectivo «grande» que depois passou a «grandíssima». Foi da união deste adjectivo com o artigo arábico al que nasceu o nome «al-majist» e que mais tarde se converteu na designação que ainda hoje é usada: *Almagesto*. Todas as outras obras existentes sobre astronomia passaram a ser designadas por «Pequena Astrono-



Páginas do Almagesto

mia». Com esta obra *magistral*, Ptolomeu *coroou o trabalho dos astrónomos da antiguidade*. São-lhe ainda atribuídas outras obras no campo da Astronomia:

Analema.—analisa a projecção ortogonal de pontos da esfera celeste em três planos fazendo entre si ângulos de 90°: horizonte, meridiano e 1° vertical.

The Planisphaerium.—explica a projecção estereográfica devida a Hiparco (ca. 180 a.C.) cujo trabalho se perdeu, mas talvez lançada por Apolónio (ca. 225 a.C.).

Hyppothes tonoplanomenon.—consagrada às hipóteses planetárias, inclui uma tabela com o nascimento e o ocaso das estrelas.

Há ainda outras obras, noutras áreas, das quais se destacam:

Peru rupon [i.e., das balanças].— dedicada à Mecânica.
Peri diastasens [i.e. da dimensão].—na qual Ptolomeu prova que não podem existir mais do que três dimensões do espaço.

Cânon real.—contém tábuas históricas sobre os reis babilónicos.

Geografia [em oito volumes].—teve entre os geógrafos o mesmo efeito que o *Almagesto* teve entre os astrónomos.

Óptica [em cinco volumes].—aborda a teoria da refracção dos corpos celestes e a reflexão em espelhos.

Harmónica [em três livros].—contém a teoria dos sons usados na música grega.

Tetrabiblon ou *Quadripartitum*.—tratado de Astrologia, em quatro livros; revela que Ptolomeu aceita as superstições do seu tempo.

2. O Almagesto

Nesta obra, organizada em 13 livros subdivididos num número variável de capítulos, valoriza as aplicações práticas da teoria.

Fundamenta os fenómenos observados, desembaraçando-a das especulações e generalizações vagas que a obstruíam guindando-a a ciência exacta.

Desenvolve a Trigonometria cujas bases tinham sido lançadas por Hiparco e aperfeiçoa a teoria dos epiciclos (movimento de astros como a Lua, por exemplo, em torno de um circulo chamado deferente) formulada por Apolónio: *o que ensina em detalhes trigonométricos não é coisa nova, mas está oferecido muito hábil e metodicamente.*

Apesar de defender um sistema geocêntrico deixou uma teoria planetária cuja leitura é recomendável a todos os estudantes de Astronomia.

Segundo as palavras de Neugebauer, «não se pode ler um único capítulo de Copérnico ou de Kepler sem conhecer exaustivamente o Almagesto».

Ao longo de vários séculos, incluindo o séc. XX, o *Almagesto* teve diversas traduções, umas a partir do texto grego, outras a partir do texto árabe, e deu origem a comentários.

Vejamos alguns desses trabalhos mais recentes.

Em 1939, são republicados em Roma *Commentaires de Pappus et de Theon d'Alexandrie sur l'Almageste*, em dois volumes, e em 1974, Pedersen publica *A Survey of the Almagest.*

Em 1952 aparece a primeira tradução inglesa devida a Taliaferro. A versão grega elaborada por Heiberg (1898–1903) dá origem a duas traduções: uma para alemão da responsabilidade de Manitius, considerada muito útil e precisa (1912–13) e uma outra, elaborada por G. J. Toomer (1998), considerada a melhor tradução disponível em língua inglesa.

Em 1813, e da responsabilidade do Abade Nicolas Halma (1756–1828), sai em Paris uma tradução elaborada directamente do grego para francês a partir dos manuscritos originais existentes na Biblioteca Imperial de Paris. Esta obra, republicada em 1988, inclui notas de Delambre, o tal astrónomo que antes tão crítico tinha sido. Talvez tenha sido a que mais justiça fará à obra, na medida em que permite desfazer ambiguidades e corrigir juízos.

Saíram então novos comentários, agora bastante elogiosos sobre o papel de Ptolomeu no desenvolvimento do conhecimento astronómico, que permitem rebater as acusações de que tinha sido alvo. Porém continua difícil identificar a verdadeira inovação do seu trabalho, devido à ausência dos escritos dos astrónomos seus antecessores.

Nos dias de hoje, têm-se desenvolvido esforços no sentido de mostrar que Ptolomeu foi um dos principais expoentes na antiguidade no que diz respeito ao método científico e já é reconhecido como um competente e original astrónomo.

2.1

Na apresentação da obra, o autor faz saber que metas se propõe atingir:

— estudar a ciência dos movimentos celestes mas sem perder de vista tudo aquilo que possa contribuir para a beleza da ordem e do método

— pesquisar princípios tão belos e harmoniosos como os que compõem a ciência matemática.

Explicita também outras finalidades da obra, como:

— aumentar o gosto pelas verdades eternas

— juntar ao que ainda for recolher entre as descobertas dos antecessores os resultados que ele próprio obtiver

— apresentar essa colecção de forma tão concisa e acessível quanto possível.

Informa ainda que tem outros objectivos como:

— expor tudo o que possa servir para a teoria dos corpos celestes

— incluir o que está suficientemente explicado pelos antigos

— clarificar o que não está bem demonstrado ou bem concebido.

2.2

A obra está dividida em capítulos agrupados em 13 livros, assim intitulados:

I: Princípios da Astronomia esférica

II: Desenvolvimento dos problemas relativos à esfera segundo a altura do pólo

III: Movimentos do Sol

IV: Características principais da teoria da Lua

V: Continuação da teoria da Lua; distâncias deste astro e do Sol

VI: Tábuas da Lua e tábuas dos eclipses

VII: As estrelas fixas, com um catálogo de estrelas boreais

VIII: Catálogo de estrelas austrais, Via Láctea, nascimentos e ocasos

IX: Ordem das esferas planetárias, movimentos de Mercúrio

X: Movimentos de Vénus e de Marte

XI: Movimentos de Júpiter e de Saturno, tábuas dos planetas

XII: Retrogração dos planetas superiores, digressões dos planetas

XIII: Latitudes dos planetas

2.3

Numericamente, Ptolomeu trabalha no sistema sexagesimal de origem babilónica. Assim, $33^p\ 12'\ 9$» representa o número 33,2025, proveniente da mudança de base sexagesimal para decimal: $33 + 12/60 + 9/3600$.

O cuidado com o cálculo é extremo: escolhe o sistema sexagesimal por este evitar *o embaraço das fracções* (provavelmente uma referência às fracções egípcias). Quando não pode recorrer a valores exactos, utiliza os valores mais aproximados de modo que *o que se despreza não impeça os resultados de serem sensivelmente exactos.*

Opta pela circunferência dividida em 360 partes, (divisão atribuída aos astrónomos babilónios, que também lhe chamaram grau e o dividiram em 60 partes) e o diâmetro em 120 partes, acrescentando que *se verá pela prática, que esse número era o mais cómodo que se podia escolher*.

2.4
Para multiplicar, Ptolomeu recorre, provavelmente, às tabelas usuais na Babilónia. Quanto à divisão, Ptolomeu pressupõe conhecido o quociente e submete-o à operação inversa; recorre, depois, a tentativas baseadas em valores aproximados, procurando o quociente mais aproximado.

A raiz quadrada é calculada a partir da definição actual de raiz quadrada de um número e aos produtos notáveis.

Perante o tempo necessário para a realização dos cálculos, mesmo reconhecendo a existência de tabelas de cálculo e a familiaridade que os astrónomos da antiguidade tinham com o sistema numérico sexagesimal, há autores que põem a hipótese de Ptolomeu ter recorrido a computadores humanos para conseguir construir as várias tabelas que figuram no *Almagesto*: assistentes que colaboravam com Ptolomeu na feitura dos cálculos numéricos a quem cabia a repetição ou determinações por outros métodos para certificar os valores encontrados. Estes colaboradores tanto poderiam ser da responsabilidade da biblioteca de Alexandria como da responsabilidade do astrónomo.

2.5
Ptolomeu tem a preocupação de explicar muitos dos resultados matemáticos que utiliza, mas não trata de igual modo os aspectos numéricos e geométricos: omite, por exemplo, as regras e os métodos que permitem efectuar os cálculos, por vezes intrincados. Quando se serve de resultados devidos a Apolónio, Hiparco, ou Menelau, inclui uma exposição sobre as suas descobertas; quando recorre a proposições euclidianas não lhes faz qualquer comentário, como pressupondo o conhecimento total de *Elementos*. As proposições euclidianas usadas por Ptolomeu encontram-se nos Livros I, II, III, IV, VI, e XIII.

Recorre à utilização da «Álgebra Geométrica», dizendo, por exemplo, «rectângulo» em vez de «produto» e resolvendo equações à custa dos produtos notáveis.

2.6
Ptolomeu trabalha com diversas funções concebidas como uma relação entre os elementos de dois conjuntos numéricos; por exemplo: numa tabela lança o comprimento de meia corda de arco de acordo com a amplitude do ângulo ao centro correspondente. Ora construir esta tabela não é senão tabelar uma função.

2.6.1
As funções algébricas utilizadas são exclusivamente do tipo $y = ax + b$ e utilizadas para relacionar a longitude (λ), a velocidade angular (ϖ) e o tempo (t); permitem determinar a longitude num determinado instante, à custa da velocidade angular e das constantes relativas a um tempo e uma longitude iniciais, respectivamente t_0 e $\lambda_m(t_0)$. São usadas para construir efemérides de planetas, contudo na forma de proporcionalidade directa, ou seja, do tipo $y = ax$, considerando como variável independente $t - t_0$ e como variável dependente $\varpi(t - t_0)$.

2.6.2
Uma das funções trigonométricas utilizadas relaciona o comprimento da corda com a amplitude do arco respectivo Trata-se da função:

$$\mathrm{crd}(x) = 2R\mathrm{sen}\, x/2,$$

com $0° < x \leq 180°$.

Ptolomeu serve-se, por vezes, da tabela com os valores desta função para determinar a amplitude do arco a partir do comprimento da corda, o que não deixa de ser a utilização da função inversa. Passa, contudo, sem qualquer comentário, sobre qualquer um dos modos de utilizar esta tabela.

Ptolomeu não utiliza apenas funções de uma variável: recorre a funções com duas e três variáveis, a propósito da resolução de problemas de Astronomia utilizando Trigonometria esférica.

2.7
Para determinar o valor do comprimento de uma corda cujo arco não está tabelado usa a fórmula

$$f(x) = f(x_n) + [f(x_{n+1}) - f(x_n)] \times \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n},$$

com x em $]x_n, x_{n+1}[$, ou seja, recorre a uma interpolação linear.

2.8
Ptolomeu também determina máximos de uma função, sem contudo deixar um método geral: recorre a métodos exactos nuns casos e noutros a métodos geométricos e trigonométricos, pressupondo o conhecimento do maximizante e sem qualquer indicação para a sua determinação; por vezes baseia-se apenas na inspecção da tabela que representa a função, partindo dos valores desta para os do argumento. Mas é impensável que Ptolomeu confiasse apenas na intuição: apesar de não enunciar as propriedades que têm a ver com a variação lenta de uma função na vizinhança de um máximo, é provável que se tenha familiarizado intuitivamente com elas pela análise das funções tabeladas.

2.9
Ptolomeu recorre a métodos aproximados para efectuar cálculos numéricos que hoje se baseiam na determinação de limites e usa uma linguagem próxima da de acréscimos correspondentes em trabalhos actualmente resolvidos por derivação. Todavia, todos estes trabalhos relacionados com funções são baseados não em teoremas mas sim em regras práticas ou seja, têm por base a arte prática e não a ciência teórica.

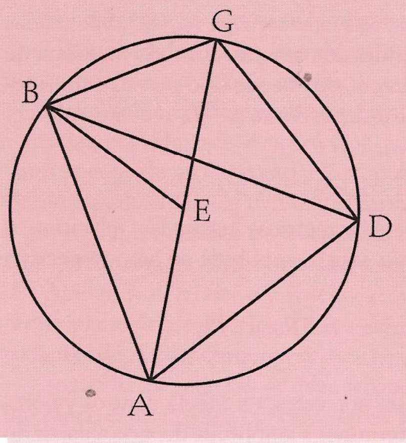


Figura 1

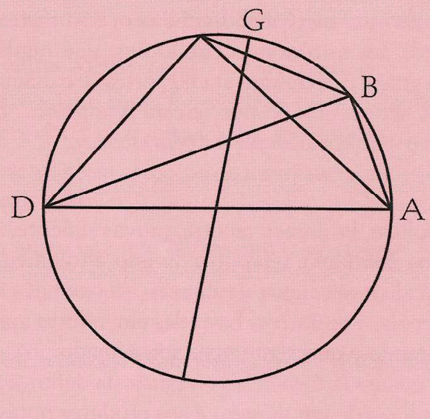


Figura 2

2.10. A Trigonometria Plana do *Almagesto*

Encontra-se no Livro I, num capítulo intitulado *Avaliação das cordas inscritas no círculo*. Trata-se de um capítulo que poderia pertencer a um livro de Matemática.

Escreve Ptolomeu que para facilitar a prática vai elaborar uma tabela com os valores dessas cordas, para arcos que diferem de meio grau. Para isso faz cálculos e demonstrações, partindo de um teorema actualmente com o seu nome mas já conhecido de outras civilizações.

2.10.1. Teorema de Ptolomeu

Trata-se de um lema de carácter elementar que poderá ter precedido Ptolomeu mas que é provado pela primeira vez no *Almagesto*. Diz esse teorema:

Seja $[ABGD]$ um quadrilátero qualquer inscrito num círculo de diagonais AG e BD. Então:

$$AG \times BD = AB \times GD + AD \times BG.$$

Para demonstrar esta proposição, Ptolomeu considera um ponto auxiliar, E, sobre a diagonal $[AG]$, determinado de modo que os ângulos ABE e DBG sejam iguais.

Na sua demonstração tem papel especial a proporcionalidade entre os lados opostos a ângulos iguais nos pares de triângulos $[ABD]$ e $[BGE]$, $[ABE]$ e $[BGD]$.

A sua tese é enunciada em termos de áreas: trata-se de provar que o rectângulo construído sobre AG e BD é igual aos dois rectângulos de lados opostos $ABGD$, e $ADBG$.

Demonstrado este teorema, Ptolomeu vai utilizá-lo para relacionar comprimentos de cordas inscritas num círculo, partindo de quadriláteros nas condições do teorema mas adequadamente inscritos (figura 1).

2.10.2

Determinação do comprimento da corda de um arco que seja a diferença de dois arcos de cordas conhecidas.

Considera conhecidos os comprimentos das cordas $[AG]$ e $[AB]$ e pretende determinar o da corda $[BG]$, num círculo em que $[AD]$ é um diâmetro — donde se tirará a fórmula que permite calcular o seno de um ângulo que é a diferença de outros dois (figura 2).

2.10.3

Determinação do comprimento da corda correspondente a um arco tomado como metade de um arco outro.

Para isso, considera conhecido o comprimento da corda $[GB]$ e pretende calcular o comprimento da corda $[GD]$, na hipótese de o ângulo GAB ter amplitude dupla do ângulo GAD e $[AG]$ ser um diâmetro (figura 3).

2.10.4

Determinação do comprimento da corda de um arco que seja a soma de dois arcos de cordas conhecidas.

Ptolomeu considera o círculo $ABGD$, de diâmetro $[AD]$ e centro Z e nele os arcos consecutivos AB, BG; traça as cordas $[AB]$ e $[BG]$. E escreve: «eu digo que, se unirmos os pontos A e G pela recta AG, esta recta será também dada».

Pela construção se vê que esta última corda corresponde ao arco que é a soma dos arcos determinados pelas cordas $[AB]$ e $[BG]$.

Para alcançar o seu objectivo, recorre a um outro quadrilátero: $[BGDE]$, obtido a partir de um outro diâmetro traçado para o efeito, $[BE]$.

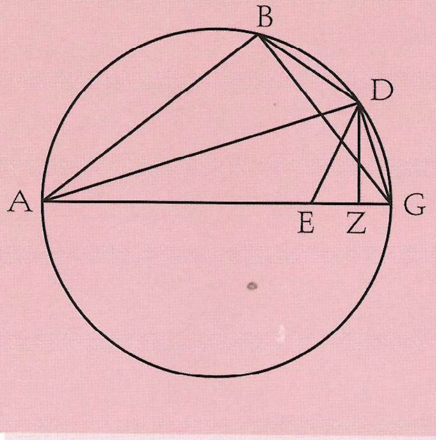


Figura 3

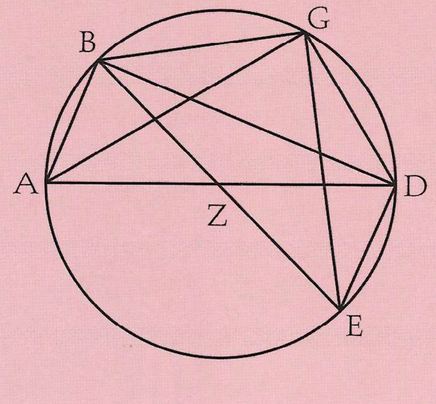


Figura 4

Nesta demonstração, e ao contrário das anteriores, não dá muitas justificações (figura 4).

2.10.5

Determinação do comprimento das cordas referentes aos arcos de $36°$, $60°$, $72°$, $90°$ e $120°$.

O facto de já ser possível relacionar cordas nas condições acima descritas, ainda não permite construir qualquer tabela: há que ter à partida, pelo menos o comprimento de uma delas.

Com esse objectivo, Ptolomeu começa com a construção de polígonos regulares com 5 e 10 lados, passando depois à determinação do comprimento do lado respectivo, começando por este e passando àquele. A partir dos valores encontrados e com as deduções anteriores já pode registar o comprimento das cordas correspondentes a muitos arcos: $36°/2 = 18°$; $18°/2 = 9°$; $9°/2 = 4°30'$; $72°+36° = 108°$; $108°/2 = 54°$; $54°/2 = 27°$; $27°/2 = 13°30'$, etc. Porém tem consciência de que não chegará a todos quantos pretende!

Proposições euclidianas ajudam: o lado do hexágono é igual ao raio do círculo circunscrito; e o teorema de Pitágoras também: obtém o comprimento do lado do quadrado.

As avaliações de comprimento serão feitas tomando para comparação o comprimento do diâmetro do mesmo círculo; necessitando de uma unidade da medida, considera o diâmetro dividido em 120 partes (representado por 120^p).

E a aplicação das fórmulas deduzidas é recorrente: com medidas de novas cordas, obtém ainda a mais outras ...

2.10.6

Determinação da corda do arco suplementar de um arco dado.

Mesmo assim, ainda há amplitudes que ficam de fora. É imprescindível a relação entre os senos de ângulos suplementares. Ptolomeu afirma: «sendo $x°$ a amplitude de um arco qualquer, (e representando o comprimento de corda respectiva por por $\text{crd}(x°)$), então

$$[\text{crd}(x°)]^2 + [\text{crd}(180° - x°)]^2 = (120^p)^2.$$

Assim, tabela a corda que determina o arco de $144°$ como suplementar do arco primeiramente considerado, $36°$, e assim por diante: as relações anteriores e a aplicação da igualdade fundamental da Trigonometria permitem obter mais valores para a sua tábua.

2.10.7

Para atingir completamente o seu objectivo, ou seja tabelar cordas de meio em meio grau desde $0°$ a $180°$ e permitir ainda a determinação das restantes cordas neste intervalo, dedica-se ao problema da interpolação, segundo os comentadores, de um modo muito engenhoso.

Começa por provar a proposição:

Sejam duas cordas diferentes traçadas num círculo; a razão entre o comprimento dessas cordas, da maior para a menor, é menor que a razão entre os arcos respectivos, tomados na mesma ordem.

Esta proposição já tinha sido usada por Aristarco, Arquimedes e Menelau, mas nunca tinha sido demonstrada.

Em linguagem actual, esta proposição equivale a

$$\text{sen}\,\alpha/\text{sen}\,\beta < \alpha/\beta$$

Para fazer a demonstração (figura 5), que vamos omitir, recorre a proposições de Euclides apoia-se na figura junta, na qual

- $[AB]$ e $[BG]$ são cordas desiguais
- $[BD]$ é a bissectriz do ângulo ABG
- D e E são os pontos de intersecção da bissectriz $[BD]$ com a circunferência e com a corda $[AG]$
- o arco de circunferência de centro D e raio DE corta os segmentos de recta $[DA]$ e $[DZ]$ nos pontos H e T.

2.10.8

Ptolomeu reconhece que ainda não consegue a tabela prometida: por aqui não obtém o comprimento da corda que subtende um arco de 1°. Obtém, porém a corda que determina um arco de grau e meio; de facto, a partir dos arcos de amplitude 36° e 15°, por exemplo, obtém as cordas que determinam os arcos de 4°,5 e 7°,5 por aplicação sucessivamente da fórmula obtida em 2.10.3; a partir destas, a do arco de 3° por 2.10.2 e daqui a de 1°,5. Então, para obter a corda desejada,

— considera 1° = 0°,75 + 1/3 × 0°,75 = 4/3 × 0°,75

— recorre a 2.10.7 com as cordas correspondentes aos arcos de 1° e 0°,75 por um lado e de 1° e 1°,5 por outro.

Acaba por concluir que a corda correspondente ao arco de 1° é simultaneamente menor e maior do que um mesmo valor, que será o comprimento desejado! Para avaliar da aproximação do valor obtido (1,047222) bastará pedir numa calculadora científica o seno de meio grau!

2.10.9

Todo este trabalho é teórico e, se não requer observações astronómicas, exige habilidade de cálculo e sólidos conhecimentos matemáticos. A intenção da construção tal tábua de cordas é clara: *afim de ter à mão os valores prontos dessas rectas* [inscritas no círculo], ou seja: a tabela dispensa o cálculo do comprimento de uma corda de cada vez que o astrónomos dele necesita. Por isso,

(...) colocaremos adiante tabelas de 45 linhas cada, dispostas em três colunas, das quais a primeira conterá as grandezas dos arcos crescendo sucessivamente por meio grau; a segunda dará as suas subtensas avaliadas em partes das quais o diâmetro contém 120; e a terceira oferecerá o trigésimo dos acréscimos das subtensas para cada meio grau (...).

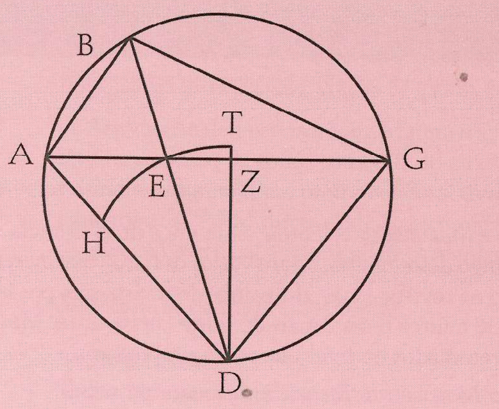


Figura 5

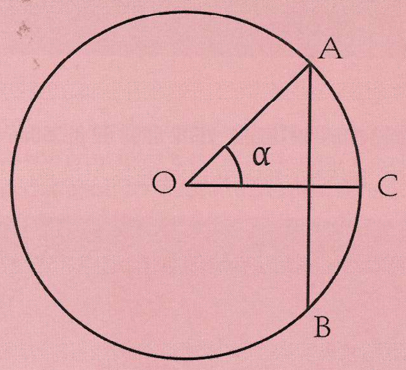


Figura 6

Mas entende que convém mostrar de onde vem esse valor: em caso de dúvida ou na ausência da tabela permite a sua confirmação ou a sua determinação; por isso todo o trabalho que antecede a sua apresentação.

Convertida a tabela de cordas em tabela de senos, como adiante se verá, e escrevendo os comprimentos no sistema decimal actual, é surpreendente a exactidão dos valores obtidos por Ptolomeu: as diferenças entre os valores obtidos por conversão dos tabelados e os valores dados por um computador situam-se entre $-0{,}0083$ e $0{,}0013$. E mais de 99% dos resultados coincidem em pelo menos cinco casas decimais e mais de 66% já coincidem em pelo menos seis casas decimais.

Sabe-se que Hiparco, no dizer de comentadores o astrónomo mais eminente da antiguidade, terá escrito um tratado sobre a construção de tábuas de cordas, que entretanto se perdeu. Mas o assunto já terá merecido a atenção de astrónomos ainda mais remotos: a tablete hoje conhecida como Plimpton 322, de origem babilónica, é uma prova disso, ao apresentar uma tábua de secantes; gravada em escrita cuneiforme estima-se que provenha de antes de 1600 anos de Cristo. E no papiro de Rhind, aproximadamente da mesma época, há problemas que envolvem a cotangente do ângulo entre a face e a base da mesma pirâmide.

Se, estes dois exemplos sugerem pouca originalidade na tábua de cordas de Ptolomeu, são-lhe reconhecidos dois méritos: o modo elegante adoptado por Ptolomeu na exposição do cálculo dos comprimentos das cordas e a primazia na explicação das bases empirícas e as razões teóricas dos procedimentos.

2.10.10

Uma tabela como esta é facilmente convertível numa tabela trigonométrica. Para o efeito, basta considerar a figura 6, na qual

- $[AB]$ é uma corda da circunferência de centro O, que determina o ângulo ao centro de amplitude 2α.
- $[OC]$ é perpendicular a $[AB]$.

Então é:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{\overline{OA}} = \frac{\operatorname{crd}(2\alpha)}{2\times\overline{OA}}$$

É esta a fórmula que permite converter a tabela de cordas de Ptolomeu numa tábua de senos, pois, essencialmente, da metade da corda do arco duplo se obtém o seno do arco metade e deduzir as fórmulas que permitem determinar as razões trigonométricas do ângulo «soma», «diferença» e «metade», hoje conhecidas como «fórmulas de Ptolomeu», a partir das deduções **2.10.2**, **2.10.3**, **2.10.4**.

Este artigo terá continuidade no próximo número da *Educação e Matemática* dando um ênfase especial a Ptolomeu Astrónomo.

Referências bibliográficas

Costa, M.J., *A Trigonometria Plana do Alamagesto*, tese de mestrado (1995), APM, Lisboa, 1995.

Katz, Victor J., *A History of Mathematics, an introduction*, Harper Collins College Publishers, 1993.

Neugebauer, O., *The exact scienses in antiquity*, Dover, New York, 1969.

Pedersen, O., *A survey of Almagest*, Odense University Press, 1974.

Ptolomeu, *Composition Mathematiques*, traduzido do grego por M.Halma. Reimpressão da edição publicada em 1813. Blanchard, Paris, 1988.

Stumpff, K., *Astronomia*, Enciclopédia Meridiano//Ficher, Editora Meridiano, Lisboa, Abril, 1965.

Van der Waerden, B. L., *Scien Awakering I*, P. Noordhoff LTD, Groningen Holand.

Maria José Costa