A moeda falsa

Temos 12 moedas de ouro, aparentemente iguais, só que uma é falsa e pesa menos que as outras. Desconhecemos o peso das moedas. À nossa disposição está uma balança, daquelas que nos indicam o peso do que colocarmos no seu prato.

Que método devemos seguir para garantir que descobrimos sempre a moeda falsa em quatro pesagens?

Problema adicional: Se tivermos direito a seis pesagens, qual é o maior conjunto de moedas em que conseguimos sempre encontrar a moeda falsa?

(Respostas até 25 de Junho para zepaulo@armail.pt)

Os quatro filhos da família Canelas

O problema proposto no número 100 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

O casal Canelas tem quatro filhos, nenhum deles gémeo de outro. Fui visitá-los e, a certa altura, disse-me a mais velha, a Ana: — *Já reparaste que o produto da minha idade pela da minha irmã Carla é seis vezes maior agora do que era há seis anos atrás?*

O Bruno, o segundo dos irmãos, estava ao lado e reparou: — *Olha, é curioso, o mesmo acontece com a minha idade e a do meu irmão Daniel.*

Que idades têm os quatro filhos da família Canelas?

Apesar de, com o atraso da saída da revista, o prazo de entrega das resposta ao problema ter sido muito curto, houve um número muito sigificativo de resoluções. Foram nada menos do que 18: Alberto Canelas (Queluz), Ana Rita Machado (Guimarães), Anabela Alves & Rita Pereira (Guimarães), Armando Fernandes (Aveiro), Carminda Marques (Fafe), Daniel Meneses (Oliveira de Frades), Edgar Martins (Queluz), Fátima Cardoso (Moimenta da Beira), Graça Braga da Cruz (Ovar), Mária Correia Almeida, Maria Pedro, Patrícia Martins, Patrícia Sampaio, Paula Portela (V. F. Xira), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Regina Veríssimo (Figueira da Foz), Ricardo Poças (Viseu) e Rute Cipriano (Lisboa).

Quase todos seguiram o mesmo método. Vejamos a resolução da Paula.

Sejam a, b, c e d as idades actuais da Ana, Bruno, Carla e Daniel, respectivamente (em que a, b, c e d são números naturais). Há 6 anos atrás, as idades seriam:

Idade da Ana: $a-6$; idade do Bruno: $b-6$; idade da Carla: $c-6$; idade do Daniel: $d-6$.

Como o produto das idades da Ana e da Carla é seis vezes maior agora do que era há seis anos atrás, satisfaz a seguinte equação: $a \cdot c = 6(a-6)\cdot(c-6)$ que resolvida em ordem a a é equivalente a:

$$a = \frac{36c-216}{5c-36}$$

Da mesma forma, as idades do Bruno e do Daniel também satisfazem a equação:

$$b = \frac{36d-216}{5d-36}$$

Procuremos, na calculadora gráfica, os valores inteiros positivos de a para os correspondentes valores de c.

Carla	Ana
1	5,806
2	5,538
3	5,143
4	4,5
5	3,273
6	0
7	–36
8	**18**
9	**12**
10	10,286
11	9,474

(note-se que podemos parar logo que, na tabela, se verifique $a < c$)

Existem dois pares de soluções na tabela, (18,8) e (12,9). Como as idades do Bruno e do Daniel satisfazem a mesma equação, também estarão nesta tabela. Logo, como a Ana é a irmã mais velha, tem 18 anos, e a sua irmã Carla tem 8 anos. Por outro lado, o Bruno tem 12 e o Daniel 9.

Verificação para Ana e Carla:

Agora: $18 \times 8 = 144$. Há 6 anos atrás, a Ana com 12 anos e a Carla 2: $12 \times 2 = 24$. Ora $24 \times 6 = 144$, ou seja, o produto das idades da Ana e da Carla é seis vezes maior agora do que era há seis anos atrás.

Verificação para Bruno e Daniel:

Agora: $12 \times 9 = 108$. Há 6 anos atrás, o Bruno com 6 anos e o Daniel com 3: $6 \times 3 = 18$. Ora $18 \times 6 = 108$, ou seja, o produto das idades do Bruno e do Daniel é seis vezes maior agora do que era há seis anos atrás.

A Mária faz uma interpretação muito curiosa (e correcta) do enunciado do problema. Por isso, além desta resposta, apresenta mais duas. *Segunda resposta:* Dois filhos terem 18 anos e os outros dois terem 8 anos porque é possível, numa certa altura do ano, dois filhos, sem serem gémeos, terem a mesma idade (com uma diferença de menos de 1 ano). *Terceira resposta:* O mesmo caso anterior, mas com dois filhos com 12 anos e os outros dois com 9 anos.