Estratégias espontâneas de alunos do 9.º ano em Combinatória

Paulo Ferreira Correia
José António Fernandes

Introdução

Tradicionalmente, a principal área de aplicação da Combinatória tem sido as Probabilidades, usada na determinação do número de casos possíveis e de casos favoráveis a um acontecimento (Watson, 1996). Também Piaget e Inhelder (s/d) relacionam o raciocínio combinatório com o raciocínio probabilístico ao assumirem que uma escassa capacidade de raciocínio combinatório reduz a aplicação do conceito de probabilidade a casos muito simples, restringidos a situações de enumeração directa dos casos possíveis que constituem o espaço amostral.

No prefácio do livro *Razonamiento Combinatorio*, de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), Fischbein realça a importância da capacidade combinatória como uma das condições básicas do raciocínio lógico. Na opinião do autor, a Análise Combinatória, com os seus conceitos e métodos, constitui «um pré-requisito estrutural importante para a dinâmica e potência criativa do raciocínio lógico em geral» (p. 11). Nesta perspectiva, não cultivar o raciocínio combinatório poderá revelar-se uma séria limitação no desenvolvimento do pensamento formal dos jovens (Batanero, Godinho & Navarro-Pelayo, 1994).

Por outro lado, os problemas de Combinatória facilitam o desenvolvimento de processos de enumeração, de realização de conjecturas, de generalização e o pensamento sistemático, essenciais para a aprendizagem da matemática em todos os níveis de ensino (English, 2005). Ainda o facto de as estratégias de resolução de problemas de Combinatória constituírem estratégias gerais, aplicáveis não apenas à Combinatória, relevam o papel que a Combinatória pode desempenhar na aprendizagem de técnicas gerais de resolução de problemas (Roa, Batanero, Godino & Cañizares, 1996).

Exemplificam-se, seguidamente, as principais estratégias utilizados pelos 27 alunos de uma turma do 9.º ano, no ano lectivo 2006–2007, na resolução individual de 15 problemas de Combinatória: 3 de permutações simples; 4 de arranjos com repetição; 4 de arranjos simples; e 4 de combinações simples. Em todas as operações combinatórias, num dos problemas pedia-se uma fórmula de determinação de todas as configurações possíveis num conjunto de n elementos (questões c), enquanto todos os outros envolviam valores constantes dos parâmetros e era dado um exemplo de configuração.

Estratégias espontâneas utilizadas pelos alunos

Com os quatro grupos de problemas do questionário, pretendia-se averiguar as estratégias espontâneas utilizadas pelos alunos para contar:

1. as P_3, P_5 e P_n, respectivamente nas questões *1a)*, *1b)* e *1c)*, na situação de *dispor amigos em fila para tirar uma fotografia*;
2. os $\overline{A}_2^3$, $\overline{A}_2^5$, $\overline{A}_2^n$ e $\overline{A}_3^5$, respectivamente nas questões *2a)*, *2b)*, *2c)* e *2d)*, na situação de *formar números*;
3. os A_2^3, A_2^5, A_2^n e A_3^5, respectivamente nas questões *3a)*, *3b)*, *3c)* e *3d)*, na situação de *definir bandeiras com barras horizontais*; e
4. as C_2^3, C_2^5, C_2^n e C_3^5, respectivamente nas questões *4a)*, *4b)*, *4c)* e *4d)*, na situação de *formar grupos de pessoas para participarem num concurso*.

Enumeração

A estratégia *enumeração* (não *sistemática* usada em 4% dos casos e *sistemática* usada em 27%) foi a mais utilizada pelos alunos na resolução dos problemas propostos.

A estratégia *enumeração não sistemática* foi utilizada, sobretudo, nas operações combinatórias que envolviam pequenos valores dos parâmetros e revelou-se pouco eficaz na obtenção das respostas correctas (ver tabela 1).

Nesta estratégia os alunos não recorreram a um método organizado de contagem, limitando-se apenas a procurar configurações possíveis por comparação com as já encontradas (ver figura 1).

Este mesmo aluno explica a sua estratégia de resolução no seguinte diálogo, que manteve com o investigador, da seguinte forma:

A8 — *Hum... Não estou a encontrar mais diferentes.*

Investigador — *Pronto, se achas que terminaste podes passar ao seguinte.*

A8 — *Sim. [Pausa] Estou a ver se consigo.*

Investigador — *Estás a ver se consegues...*

A8 — *Estou a ver se consigo encontrar mais algum [caso]. Mas acho que não.*

A estratégia utilizada pelo aluno A3 poderá ser encarada como uma estratégia de transição entre um método de contagem por tentativas e um procedimento sistemático de enumeração (ver figura 2).

Grupos de problemas	Questões a)	b)	d)	Total
Permutações simples	4 (75%)	4 (0%)	—	8 (38%)
Arranjos com repetição	1 (0%)	0	0	1 (0%)
Arranjos simples	2 (0%)	1 (0%)	0	3 (0%)
Combinações simples	0	0	1 (0%)	1 (0%)
Total	7 (43%)	5 (0%)	1 (0%)	13 (23%)

Tabela 1. Número de resoluções obtidas por enumeração não sistemática na resolução dos 4 grupos de problemas (percentagem de respostas correctas)

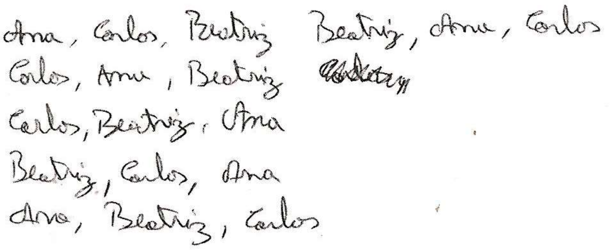

Figura 1. Resolução do aluno A3 na contagem das P_3

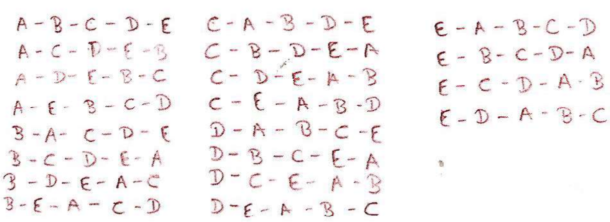

Figura 2. Enumeração efectuada pelo aluno A3 na contagem das P_5

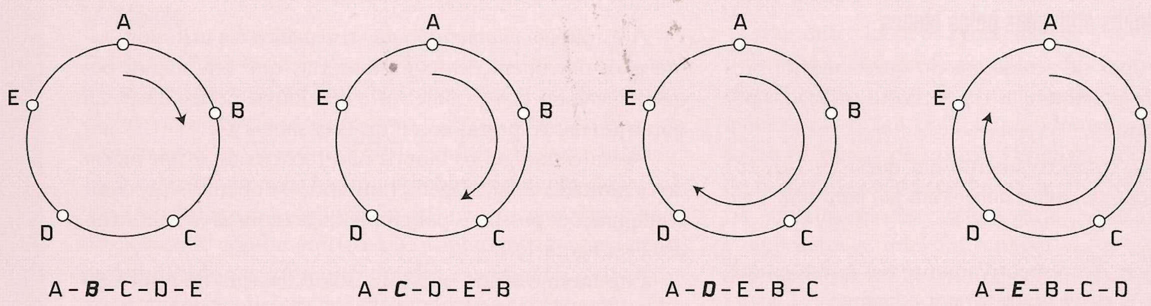

Figura 3. Interpretação da estratégia utilizada pelo aluno A3 na contagem das P_5

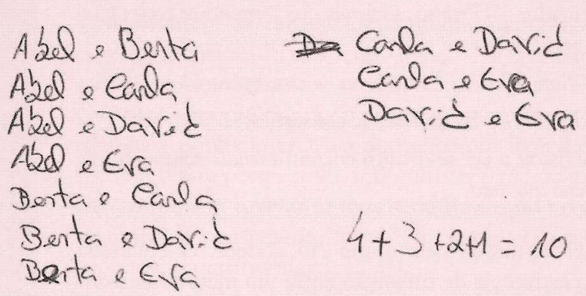

Figura 4. Enumeração efectuada pelo aluno A3 na contagem das C_2^5

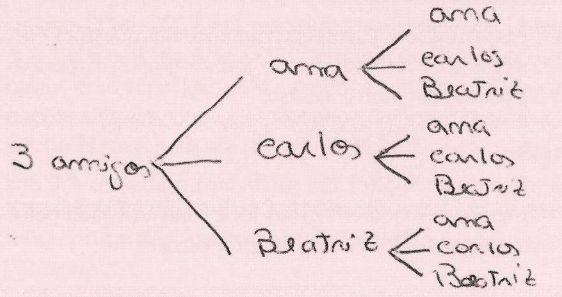

Figura 6. Diagrama de árvore construído pelo aluno A23 na contagem das P_3

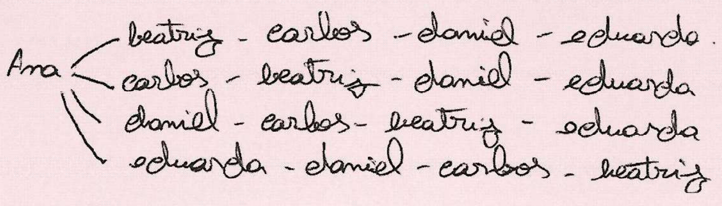

Figura 5. Parte do diagrama de árvore construído pelo aluno A16 na contagem das P_5

O processo de enumeração utilizado consiste na construção das configurações a partir da sequência $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ no sentido do movimento dos ponteiros do relógio, com a fixação de cada uma das letras na primeira posição (ver figura 3).

A estratégia *enumeração sistemática* foi utilizada, particularmente, na resolução das questões que envolviam um menor número de elementos, situações em que se revelou mais eficaz na medida em conduziu a mais respostas correctas (ver tabela 2).

O procedimento algorítmico predominante consistiu na utilização de elementos pivô a partir dos quais eram construídas as configurações. Em particular, o número de possibilidades para P_5 dificultou a utilização dos procedimentos de enumeração sistemática utilizados na contagem das P_3, conduzindo a erros de repetição de configurações e ao esquecimento de outras e à fixação de apenas uma parte dos elementos a fixar. A forma pouco adequada de estruturação da resposta e a ausência de simbolização abreviada também dificultou o controlo do processo de enumeração.

O potencial do procedimento sistemático de enumeração usado por alguns alunos na resolução dos problemas de combinações simples reside na utilização dos elementos num único sentido e na fixação de cada um dos elementos, associando-lhes cada um dos nomes que se encontram à sua direita (em C_2^5 Abel – Berta – Carla – David – Eva), evitando-se, deste modo, a repetição de elementos e as configurações que diferem apenas na ordem de disposição dos nomes (ver figura 4). No entanto, na contagem das , a maior dimensão da amostra representou um factor de dificuldade na repetição completa deste método.

A partir da enumeração efectuada, os alunos A1 e A7 percepcionaram que a solução da questão pode ser obtida pela soma dos $n-1$ primeiros números naturais, isto é, que as

$$C_2^n = \sum_{i=1}^{n-1} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1),$$

com $n \geq 2$, como se verifica no seguinte diálogo:

A1 — *Eu tenho aqui uma coisa curiosa. Eu escolhi primeiro o Abel para fazer as combinações e depois... [Pausa]*

Investigador — *A Berta e a Carla.*

A1 — *Pois foi. E depois à medida que eu... [Pausa] Mas isto também é normal... [Pausa] que eu ia fazendo as outras combinações o número ia diminuindo. Uma, duas, três, quatro, com o Abel. Três com a Berta, duas com a Carla e uma com o David. Talvez não tenha nada a ver, mas...*

Investigador — *Mas chamou-te a atenção, não é?*

A1 — *Exacto.*

Diagrama de árvore

A estratégia *diagrama de árvore* (usada em 22% das resoluções) também foi utilizada predominantemente nas questões que envolviam um menor número de elementos, situações em que esta estratégia também se revelou mais eficaz.

Para além de se tratar da segunda estratégia mais utilizada na resolução dos problemas propostos, os alunos revelaram dificuldades na sua construção e interpretação. Em particular, nos problemas de permutações simples registou-se uma tendência para os alunos construírem um número inadequado de ramos (ver figura 5) e reduzirem os níveis de ramificação (ver figura 6).

Operação

À medida que aumentavam os valores dos parâmetros envolvidos nas operações combinatórias, observou-se uma preferência pela estratégia *operação* (utilizada em 14% das resoluções), predominantemente de multiplicação e usada isoladamente ou combinada com uma das estratégias anteriores. Esta estratégia revelou um grau de eficácia significativo, particularmente nas questões *d)* e na questão *1b)*, comparativamente com as estratégias *enumeração* e *diagrama de árvore* (ver tabela 4).

Na contagem das P_5, os alunos recorreram apenas à operação de multiplicação para obterem uma resposta correcta (ver afirmação do aluno A6) ou incorrecta (ver afirmação do aluno A10), verificando-se, no segundo caso, que os alunos reduziram a dois o número de factores.

A6 — *Se tenho cinco lugares para preencher com eles, [isto é, com os cinco amigos], no primeiro posso pôr cinco e no segundo só posso pôr quatro. Já não posso pôr o primeiro. No terceiro três. Não posso pôr nem um nem outro. (...) Portanto, cinco vezes quatro, vezes três, vezes dois, vezes um.*

A10 — *O número total de alunos com quatro alunos que viriam a seguir ao primeiro* [5 × 4].

Grupos de problemas	Questões a)	Questões b)	Questões d)	Total
Permutações simples	11 (100%)	3 (0%)	—	14 (79%)
Arranjos com repetição	14 (100%)	15 (87%)	2 (0%)	31 (87%)
Arranjos simples	11 (100%)	7 (71%)	2 (0%)	20 (80%)
Combinações simples	11 (55%)	9 (56%)	3 (0%)	23 (48%)
Total	**47 (89%)**	**34 (68%)**	**7 (0%)**	**88 (74%)**

Tabela 2. Número de resoluções obtidas por enumeração sistemática na resolução dos 4 grupos de problemas [percentagem de respostas correctas]

Grupos de problemas	Questões a)	Questões b)	Questões d)	Total
Permutações simples	11 (91%)	6 (0%)	—	17 (59%)
Arranjos com repetição	10 (90%)	8 (88%)	1 (0%)	19 (84%)
Arranjos simples	9 (89%)	8 (88%)	3 (33%)	20 (80%)
Combinações simples	11 (18%)	5 (20%)	0	16 (19%)
Total	**41 (71%)**	**27 (56%)**	**4 (25%)**	**72 (63%)**

Tabela 3. Número de resoluções obtidas por diagrama de árvore na resolução dos 4 grupos de problemas [percentagem de respostas correctas]

Grupos de problemas	Questões a)	Questões b)	Questões d)	Total
Permutações simples	0	5 (40%)	—	5 (40%)
Arranjos com repetição	1 (100%)	2 (100%)	9 (56%)	12 (67%)
Arranjos simples	5 (100%)	9 (56%)	5 (100%)	19 (79%)
Combinações simples	4 (0%)	6 (0%)	0	10 (0%)
Total	**10 (60%)**	**22 (41%)**	**14 (71%)**	**46 (54%)**

Tabela 4. Número de resoluções obtidas por operação na resolução dos 4 grupos de problemas [percentagem de respostas correctas]

Na contagem dos $\overline{A}_3^5$ destacam-se as respostas correctas obtidas por recursão e aquelas que associam incorrectamente a ideia de triplo à expressão 5 × 5, como factor compensador do aumento da dimensão da amostra de 2 ($\overline{A}_2^5$) para 3 ($\overline{A}_3^5$), como afirmaram os alunos A4 e A10.

A4 — Não sei se está bem! Fazia 5 × 5 (...) mas depois fazia mais uma vez vezes 5. Aqui [na questão *2b)*] pedia com dois algarismos e eu multipliquei duas vezes. Aqui multiplicava três [5 × 5 × 5].

Grupos de problemas	Questões			Total
	a)	*b)*	*d)*	
Permutações simples	1 (100%)	9 (56%)	—	10 (60%)
Arranjos com repetição	1 (0%)	2 (50%)	11 (82%)	14 (71%)
Arranjos simples	0	2 (100%)	9 (100%)	11 (100%)
Combinações simples	1 (100%)	6 (17%)	2 (0%)	9 (22%)
Total	**3 (67%)**	**19 (47%)**	**22 (82%)**	**44 (66%)**

Tabela 5. Número de resoluções obtidas por enumeração/diagrama de árvore e operação na resolução dos 4 grupos de problemas [percentagem de respostas correctas]

A10 — (...) Agora como há hipóteses de três números, multipliquei por 3 [, isto é, $5 \times 5 \times 3$].

Na contagem dos A_3^5, através da operação de multiplicação, os alunos obtiveram a expressão numérica correcta $5 \times 4 \times 3$ (ou equivalente), fazendo também uso da recursão.

Enumeração e operação e diagrama de árvore e operação

As estratégias *diagrama de árvore* e *operação* (utilizada em 8% das resoluções e com um grau de eficácia de 68%) e *enumeração* e *operação* (utilizada em 6% das resoluções e com um grau de eficácia de 63%) foram mais utilizadas nas questões que envolviam um maior número de elementos, revelando nesses casos um grau de eficácia significativo (ver tabela 5).

Nestas estratégias foram incluídas as resoluções que envolviam a construção de diagramas parciais (ver figura 7) ou enumerações parciais que serviram de base à generalização, através da operação de multiplicação ou da operação de adição. Destas operações, os alunos recorreram predominantemente à operação de multiplicação.

Fórmula

A estratégia *fórmula* (utilizada em 18% das resoluções) foi utilizada na resolução das questões *c)*, tendo predominado a utilização de símbolos matemáticos sobre a descrição em linguagem corrente. Estas questões revelaram um elevado grau de dificuldade para os alunos, registando-se: 7 respostas à questão *1c)*, sendo 3 correctas; 20 respostas à questão *2c)*, sendo 14 correctas; 17 respostas à questão *3c)*, sendo 9 correctas; e 14 respostas à questão *4c)*, sendo apenas uma correcta.

O aluno A5 apresentou a seguinte explicação na escrita de uma fórmula das C_2^n:

Três nomes. Para cada um deles há sempre os outros dois. Dava-me um total de 6 hipóteses. Mas como não posso repetir as pessoas, [pausa] não vou repetir os conjuntos só por estarem de maneiras diferentes, o A e o B ou o B e o A, eu aqui teria que eliminar (...) três respostas. Aqui em 20 teria que eliminar dez. Ou seja, eu percebi que de todos os resultados que eu podia ter só podia contar metade deles. Por estes dois casos eu cheguei à conclusão que o número de pessoas que estão a concorrer vezes esse número menos 1 a dividir por 2 vai-me dar o número total de possibilidades.

A utilização da estratégia *operação* (por iniciativa do aluno ou por questionamento do investigador) nas questões *b)* revelou-se central na obtenção de uma resposta correcta nas questões *c)*.

As fórmulas incorrectas mais frequentes foram $2n$ (para $\overline{A}_2^n$, A_2^n e C_2^n) e $n(n-1)$ (para P_n e C_2^n), salientando-se na primeira a multiplicação das dimensões da população e da amostra, usada com elevada frequência, e na segunda a consideração indevida da ordem no caso das combinações, que aliás foi a principal razão do elevado insucesso registado nesta operação combinatória. Em geral, nesta estratégia, algumas das fórmulas incorrectas representam apenas uma tentativa de adivinhação da resposta, enquanto outras surgem na sequência das resoluções efectuadas nas questões *a)* e *b)*.

Algumas implicações para o ensino

A utilização de modelos sistemáticos de enumeração, de forma completa, revelou-se central na resolução correcta dos problemas de Combinatória propostos, já que a falta de sistematização e a dificuldade em repetir procedimentos sistemáticos de enumeração conduziram ao esquecimento ou à repetição de configurações. Esta conclusão foi também referida por outros autores (e.g., Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994; Silva, Fernandes & Soares, 2004).

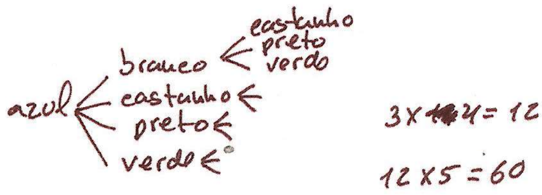

Figura 7. Resolução do aluno A21 na contagem dos A_3^5

As dificuldades reveladas pelos alunos na construção e interpretação de diagramas de árvore realçam a pertinência do seu uso explícito no ensino uma vez que, de acordo com Fischbein (1975), os alunos ao usarem o diagrama de árvore estão a assimilar uma lei de construção em que os sucessivos passos do raciocínio implícito ao modelo ocorrem indutivamente e quase directamente.

A identificação incorrecta de operandos e as dificuldades em generalizar a um maior número de casos leva-nos a partilhar com DeGuire (1991) a ideia de que, embora a resolução de vários problemas através de enumeração e diagrama de árvore se pode tornar enfadonha, estas estratégias poderão convencer o aluno sobre a razoabilidade de multiplicar para obter o número de configurações possíveis e da vantagem de usar procedimentos mais eficazes, como o princípio fundamental da contagem.

Muitos problemas de Combinatória podem ser solucionados pela utilização de outros anteriormente resolvidos ou pelo recurso a problemas mais simples que envolvam um menor número de casos (Dossey, 1991). Contudo, nestas situações, os alunos revelaram muitas dificuldades. Admitindo que estas dificuldades se devem «a uma relação inadequada ou insuficiente com a recursão e a indução matemática (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994, p. 63), acreditamos que os problemas combinatórios poderão ajudar os alunos a desenvolver destrezas a este nível.

As dificuldades dos alunos em estabelecer conexões entre as operações combinatórias, nomeadamente entre arranjos e combinações, enfatizam a importância que os problemas de Combinatória podem ter no desenvolvimento de processos de raciocínio analógico. Segundo English (2005), o raciocínio analógico reveste-se de grande importância, já que um dos objectivos da educação matemática é que os alunos identifiquem conexões entre as ideias matemáticas e apliquem esta compreensão na construção de novas ideias e na resolução de novos problemas.

Referências bibliográficas

Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.

DeGuire, L. (1991). Permutations and combinations: A problem-solving approach for middle school students. In M. Kenney & C. Hirsch (Eds.), *Discrete mathematics across the curriculum, K-12* (pp. 59–66). Reston, VA: NCTM.

Dossey, J. (1991). Discrete mathematics: The math for our time. In M. Kenney & C. Hirsch (Eds.), *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12* (pp. 1–9). Reston, VA: NCTM.

English, L. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In J. Graham (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 121–141). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht: D. Reidel.

Piaget, J. & Inhelder, B. (s/d). *A origem da ideia do acaso na criança*. Rio de Janeiro: Editora Record. (Tradução portuguesa do original de 1951)

Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D. & Cañizares, M. J. (1996). Estrategias en la resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon*, 36, 433–446.

Silva, D., Fernandes, J. A. & Soares, A. (2004). Intuições de alunos de 12.° ano em Combinatória: um estudo exploratório. In J. A. Fernandes, M. Sousa & S. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de Probabilidades e Estatística* (pp. 61–84). Braga: Centro de Investigação em Educação, Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho.

Watson, R. (1996). Students' combinatorial strategies. *Teaching Mathematics and its Applications*, 15(1), 27–32.

Paulo Ferreira Correia
Escola Secundária/3 de Barcelos

José António Fernandes
Universidade do Minho