Pequenos investigadores matemáticos

Do pensamento à comunicação e da comunicação ao pensamento

Ana Maria Boavida   Margarida Silva   Paula Fonseca

A nossa experiência diz-nos que é no espaço entre perguntas e respostas que se joga muito do que conduz a aprendizagens significativas. Deixar o aluno só com uma tarefa e dar-lhe oportunidade, posteriormente, de divulgar as suas conclusões sem que seja apresentado o que as fundamenta nem o percurso que a elas conduziu, pode ser importante mas carece de uma parte essencial: acompanhar o processo de construção do seu pensamento.

A resposta intuitiva, a dúvida inicial, a procura de um caminho, a defesa de uma ideia, a formulação e análise de uma conjectura, são aspectos que devem ser partilhados entre pares e entre professor e alunos. Da interacção entre uns e outros poderão resultar aprendizagens importantes, momentos inesquecíveis e descobertas fantásticas acerca de um problema, da actividade desenvolvida, ou simplesmente acerca de si, da sua relação com os outros e com a Matemática. Nestes momentos, além de pensar sobre a Matemática, pensa-se Matemática, pensa-se com a Matemática, pensa-se matematicamente.

Este artigo resulta, antes de mais, da inter-animação de várias vozes: as dos alunos de duas turmas do 6° ano de escolaridade onde foi explorada uma mesma tarefa — O problema das baguetes — incluída num dos materiais de formação do Programa de Formação Contínua em Matemática da

ESE de Setúbal; as de Paula e Margarida, suas professoras; e a de Ana, formadora do referido programa. Em particular, foca-se na descrição e análise da experiência de realização de um *congresso matemático* em cada uma das turmas.

A primeira parte, centra-se na relevância educativa da comunicação matemática, fundamentando a sua importância e clarificando o significado de *congresso matemático*. Em seguida, apresentam-se aspectos particulares relacionados com a concretização dos dois congressos referidos designados por *O dia dos «clicks»* e *Como as fracções denunciam as injustiças*. Por último, reflecte-se sobre a experiência e destacam-se potencialidades dos congressos matemáticos para o desenvolvimento de uma comunicação matemática fundada num discurso intencionalmente reflexivo e instrutivo e, assim, favorável ao raciocínio matemático.

A relevância educativa da comunicação matemática

Comunicar: um objectivo curricular

A valorização da comunicação matemática é uma ideia que sobressai, já há algum tempo, nas orientações curriculares para o ensino e aprendizagem da Matemática de diversos países. Por exemplo, em 1989, o NCTM incluía a «A Matemática como Comunicação» no conjunto de normas orientadoras da «reforma da matemática escolar na próxima década [1990–2000]» (APM, 1991, p. vi). Esta recomendação foi reforçada, pouco depois, pela publicação de um novo documento que continha normas sobre o papel do professor e do aluno no discurso da aula de Matemática (APM, 1994). Mais recentemente, em 2000, a «Comunicação» é uma das cinco normas de processo consideradas pelo NCTM como devendo orientar os modos de adquirir e utilizar o conhecimento matemático ao longo dos doze primeiros anos de escolaridade (APM, 2007).

Portugal não é alheio a esta situação. O Currículo Nacional do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2001), refere que a comunicação matemática deve ser um dos aspectos transversais à globalidade dos diversos tipos de experiências de aprendizagem em que é importante envolver todos os alunos. Em particular, salienta que a importância de desenvolver «a aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação» (p. 57).

O novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins & Oliveira, 2007) reforça a relevância da comunicação, referindo-se-lhe como um dos objectivos gerais a ter em conta nos três ciclos da escolaridade básica e como uma das «três grandes capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática» (p. 7) que deve «merecer uma atenção permanente no ensino» (p. 1).

O desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática pelos alunos é, assim, um objectivo curricular importante e a criação de oportunidades de comunicação adequadas é assumida como uma vertente essencial do trabalho que se realiza na sala de aula. Neste contexto, é fundamental que os alunos aprendam, não só a falar, mas também a escutar.

Aprender a falar, aprender a escutar

Ajudar os alunos a desenvolver a sua competência matemática é uma das tarefas centrais do professor, o que pressupõe *certas modalidades de comunicação e uma determinada cultura de sala de aula*.

Há várias perspectivas sobre comunicação matemática que, segundo Brendefur e Frykholm (2000), emergem da análise de documentos curriculares. Estes autores agrupam-nas em quatro categorias que representam níveis sucessivos de comunicação no sentido em que cada um inclui características do seu antecessor.

No primeiro nível, que designam por *comunicação unidireccional*, o professor tende a dominar o discurso da aula, fazendo exposições, colocando perguntas fechadas e dando poucas oportunidades aos alunos para comunicar as suas estratégias, ideias e pensamentos.

No segundo nível — *comunicação contributiva* —, o discurso centra-se em «interacções entre professor e alunos em que a conversação se limita ao apoio e partilha, frequentemente com pouco ou nenhum pensamento profundo (...) Estas conversações são, tipicamente, de natureza correctiva» (p. 127).

A *comunicação reflexiva* — terceiro nível — tem semelhanças com a contributiva no sentido em que também há partilha de ideias, estratégias e resoluções. No entanto, as conversações matemáticas constituem pontos de partida para o aprofundamento da compreensão matemática dos participantes. Ou seja, o que os alunos e professor dizem e fazem num determinado momento torna-se subsequentemente um objecto explícito de discussão e reflexão.

Por último, na *comunicação instrutiva*, mantém-se o encorajamento à partilha de ideias e à reflexão sobre essas ideias e suas relações. Contudo, o professor, em virtude da conversação que ocorre, não só começa a compreender os processos de pensamento, pontos fortes e limitações dos alunos, como começa a modelar o ensino subsequente tendo em conta estes aspectos para que aprofundem a sua compreensão sobre a Matemática que está em jogo: «o curso da experiência da sala de aula é alterado como resultado da conversação» (p. 148). É precisamente esta característica que torna este tipo de comunicação tão poderoso.

As orientações expressas no novo programa de Matemática do ensino básico vão no sentido de valorizar os últimos dois níveis de comunicação: comunicação reflexiva e instrutiva. Estes níveis são conceptualmente diferentes dos anteriores (unidireccional e contributiva), pois o foco muda da transmissão de informação para a construção e negociação de significados (Brendefur e Frykholm, 2000). Esta mudança acarreta alterações significativas no papel dos alunos e do professor.

Poder-se-á dizer que ela pressupõe alunos disponíveis e professores ousados, dispostos a aceitar o desafio de trocarem algumas tarefas previsíveis e rotineiras para se lançarem em actividades mais abertas e mais exigentes. Para terem condições de o fazer, será necessário «olhar o tempo da aula» como um momento privilegiado para o encontro. O encontro de uma pequena comunidade matemática. Momento de partilha, de descobertas, de dúvidas, de questões, de conjecturas, de argumentos, meios de prova, justificações. E, por esta via, um momento propício à aprendizagem:

> A partilha de ideias matemáticas permite a interacção de estratégias e pensamentos de cada um com os outros. Ou seja, permite que as ideias se tornem objectos de reflexão, discussão e eventual reformulação. As tentativas de comunicar um raciocínio pessoal proporcionam oportunidades para uma compreensão mais profunda da matemática». (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008, p.62)

Neste processo, o professor deverá ser, simultaneamente, líder e participante. As suas intervenções permitirão manter a coesão do grupo na vertente da relação e da tarefa. Poderá repetir ideias centrais para as realçar, dizer de uma outra forma uma ideia apresentada por um aluno para a tornar mais inteligível para os outros, fazer perguntas inquietantes, provocadoras e desafiadoras. «A pergunta deixa de ter como objectivo único, o teste de conhecimentos dos alunos para ser o elemento catalisador de uma comunidade de aprendizagem» (Boavida *et al.*, 2008, p. 64).

Este pensar sobre o pensamento, permite aos alunos e ao professor uma comunicação muito rica do ponto de vista matemático, pois deixa transparecer «um caminho de aprendizagem», onde sucessivamente, através de pequenos avanços e recuos, o pensamento se vai estruturando. O «erro» faz parte deste percurso. Não é devastador, algo a evitar a todo o custo. Pelo contrário, pode permitir construir alicerces mais profundos desde que se reflicta sobre ele. Os diferentes ritmos de aprendizagem não se tornam bloqueadores dessa aprendizagem, na medida em que percursos diversos dos alunos permitem que cada um encontre o seu próprio percurso. E assim, «a comunicação desempenha um papel importante que é o de permitir que um modelo de pensamento de um aluno se transforme num *modelo para pensar* dos restantes.» (Boavida *et al.* 2008, p. 62).

Torna-se, portanto, muito importante *aprender a falar* e *aprender a escutar*. Escutar com simpatia e disponibilidade para seguir o pensamento do outro, clarificando o próprio pensamento. Comunicar exige organização, escutar exige muita concentração, auto-controlo e respeito. Escutar é uma oportunidade para integrar uma outra perspectiva, para nos apercebermos de uma incoerência no raciocínio ou até da dificuldade na compreensão de uma ideia. Partilhar os sentimentos e as ideias co-responsabiliza os alunos pelas aprendizagens próprias e dos seus pares. A forma como cada um fala, participa, intervém e escuta pode ser facilitadora ou inibidora da aprendizagem dos demais.

Congressos Matemáticos: um caminho favorável à comunicação

Num congresso matemático (Fosnot, C. & Dolk, M., 2002), onde a comunicação reflexiva e instrutiva tem um lugar de destaque, permite vivenciar, na sala de aula, «muitos dos aspectos essenciais da actividade de produção matemática, tal como é desenvolvida na comunidade dos matemáticos» (Boavida, 2008, p. 57). A sua realização é o culminar de um processo que começa por propor aos alunos que, em grupos/pares, explorem uma tarefa e que elaborem um cartaz onde explicitem as estratégias utilizadas de modo a mostrar a outros os seus raciocínios. É-lhes, também, pedido que preparem a apresentação do cartaz e que antecipem questões que os colegas lhes poderão colocar. Por último, o professor, de acordo com os objectivos que estabeleceu para a aula, as características dos alunos e o tipo de estratégias usadas, selecciona os cartazes que serão apresentados e por que ordem o serão. O congresso matemático consiste na apresentação, análise e discussão colectivas destes cartazes e, no seu decurso, todos alunos são incentivados a colocar questões aos colegas.

Durante todo este processo, surgem várias oportunidades para reflectir sobre Matemática. Em primeiro lugar, durante o trabalho de pares/grupo há que pensar sobre a resolução da tarefa. A elaboração do cartaz constitui uma segunda oportunidade de reflexão, não só porque os alunos têm que se preparar para apresentar e defender o seu raciocínio, mas também porque, ao tentarem prever as questões dos colegas, reanalisam a sua própria resolução o que é favorável ao aprofundamento da compreensão. A terceira oportunidade surge na altura em que os cartazes são partilhados na turma, pois quem apresenta tem que interpretar questões colocadas, tentar responder-lhes e apresentar argumentos que permitam a outros entender o modo como pensaram. Os restantes elementos da turma são responsáveis por escutar criticamente o que é dito, por tentar encontrar sentido no que ouvem e por intervir caso não compreendam ou não concordem. Assim sendo, «a resolução de problemas é apenas um ponto de partida. É uma rampa de lançamento para o intenso discurso matemático durante o congresso» (Dolk, 2008, p. 52).

Congressos matemáticos a propósito do problema das baguetes

Criando condições

A tarefa designada por problema das baguetes, cujo enunciado se apresenta em seguida, consiste num relato feito, na primeira pessoa, por uma professora.

A decisão de propor esta tarefa às duas turmas do 6° ano de Paula e Margarida prende-se com as potencialidades que lhe encontraram para favorecer a compreensão do conceito de número racional e suas diversas representações, bem como das operações adição e multiplicação de números representados sob a forma de fracção.

Em qualquer das turmas, a sua exploração ocupou duas aulas de noventa minutos. Paula e Margarida estiveram presentes em todas estas aulas e Ana nas de uma das turmas. Na primeira, os alunos trabalharam em grupo para resolver a tarefa e estruturar os cartazes. A segunda, destinou-se à realização dos congressos matemáticos, ou seja à comunicação e discussão em grande grupo tendo por ponto de partida a apresentação destes cartazes.

Na altura, Paula e Margarida tinham já trabalhado a noção de fracção, a equivalência de fracções e a adição e sub-

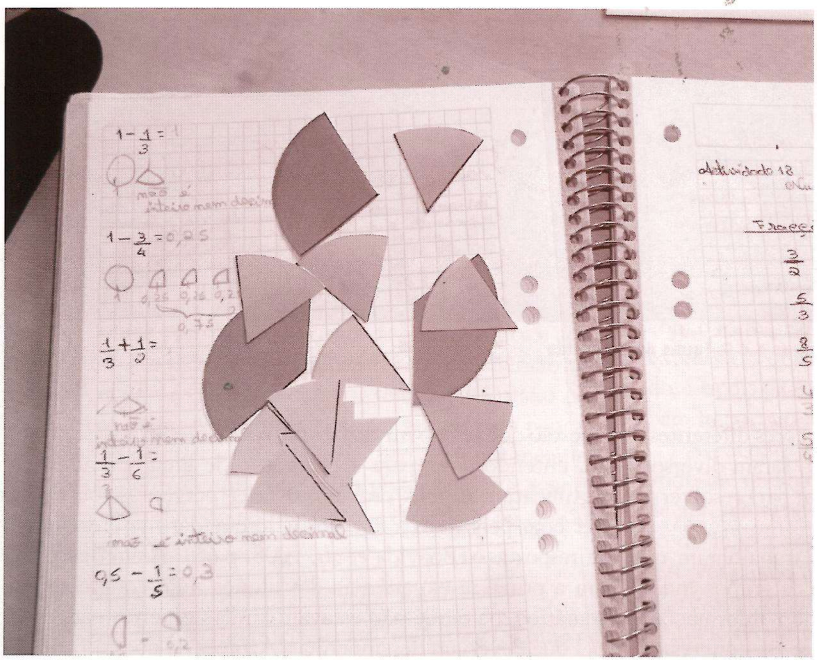

Figura 1

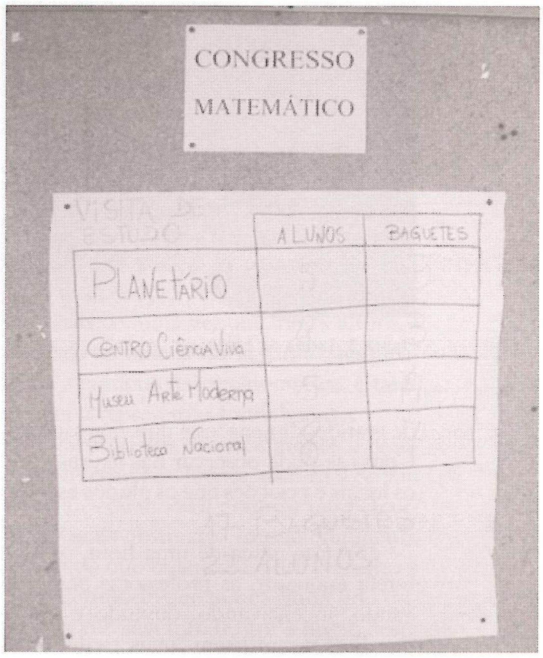

Figura 2

tracção de números representados sob a forma de fracção sem recurso a regras operatórias. Para o efeito, apoiaram-se nos «queijos», termo adoptado nas turmas para designar um material que ilustra representações geométricas de fracções: metades, terços, quartos, quintos, sextos, oitavos e décimos, sendo a unidade um círculo (figura 1). O objectivo deste recurso é ajudar os alunos a trabalhar o sentido de número racional, a olhar a fracção como uma relação entre a parte e o todo e não como um mero quociente entre dois números.

Já era prática comum nas turmas solicitar aos alunos que descrevessem os seus processos de pensamento, que explicassem e justificassem as suas ideias e que elaborassem «pequenas composições matemáticas». No entanto, Paula e Margarida nunca tinham experimentado envolvê-los numa actividade que passasse pela realização de um congresso matemático e, através da experiência, pretendiam criar um espaço em que fosse privilegiada uma discussão colectiva em torno de ideias matemáticas significativas.

Em qualquer das turmas, o enunciado da tarefa foi apresentado aos alunos oralmente, em tom de quem conta uma história. À medida que se lia, os dados eram registados numa tabela bem visível (figura 2). Como primeira abordagem ao problema, pediu-se aos alunos que reflectissem sobre a pergunta «houve justiça na distribuição das baguetes para o almoço dos alunos?» e que dissessem o que lhes ocorria espontaneamente. Debateram-se com a ideia e esgrimiram argumentos emitindo as suas opiniões de forma um tanto desorganizada. Estava criado um desequilíbrio favorável a uma análise mais profunda do problema.

Foram, então, formados grupos de quatro/cinco alunos a quem foi pedido que procurassem um lugar para trabalhar. A cada grupo foi dada, somente, uma folha de papel cenário

O problema das baguetes[1]

[...] No ano passado, uma das minhas turmas estava a desenvolver um projecto que era muito abrangente, cruzando saberes de várias disciplinas. Um dia, decidimos ir pesquisar dados para o projecto e pedimos a colaboração de alguns pais que estavam disponíveis para nos acompanhar. Cada um dos grupos de trabalho foi para um sítio diferente já que tinha um adulto perto. Assim, cinco alunos foram para o Planetário, quatro foram para o Centro de Ciência Viva, cinco foram para o Museu de Arte Moderna e, por último, oito alunos foram para a Biblioteca Nacional. O problema é que a empregada do bar da escola, ao preparar-lhes baguetes para o lanche, fez apenas dezassete baguetes e distribuiu-as do seguinte modo: deu três baguetes aos quatro alunos que foram para o Centro de Ciência Viva e quatro aos cinco que foram ao Museu de Arte Moderna; os oito que foram à Biblioteca ficaram com sete baguetes e as três restantes deu-as aos cinco alunos do Planetário.

Na aula seguinte, conversámos sobre como tinham corrido as visitas de estudo. Alguns dos meus alunos queixaram-se de que a distribuição das baguetes não tinha sido justa, pois alguns alunos tinham tido mais comida do que outros. O que pensam disto? Será que tinham razão? Eu não tenho a certeza...

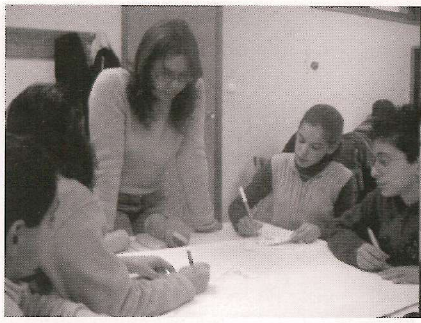

Figura 3. Turma da Paula

Figuras 4 e 5. Turma da Margarida

de grandes dimensões e dois marcadores de cores diferentes. Como se pode observar nas figuras 3, 4 e 5, foram diversos os locais e posições que os alunos escolheram para resolver o problema.

Durante cerca de uma hora, os alunos trabalharam na tarefa enquanto as professoras percorriam os grupos indagando, incentivando, ouvindo e recolhendo informações que lhes permitissem, mais tarde, organizar os congressos matemáticos.

Apresentam-se, em seguida, aspectos relativos à concretização de cada um destes congressos. O primeiro, intitulado *O dia dos «clicks»*, ocorreu na turma de Paula e inclui intervenções seleccionadas, feitas por diferentes grupos, a propósito da visita ao Planetário. O segundo — *Como as fracções denunciam injustiças* — desenrolou-se na turma de Margarida. Em qualquer dos casos, optou-se por trazer para primeiro plano a voz da professora da turma, pelo que o texto correspondente a cada um é escrito na primeira pessoa.

Congresso O dia dos «clicks»

Ao longo do congresso, procurei orientar a partilha e discussão de ideias preocupando-me em assegurar que se tocavam os aspectos matemáticos mais importantes trabalhados em cada grupo e, simultaneamente, que fossem reanalisados raciocínios feitos à luz de ideias que iam sendo consideradas válidas na turma. Decidi iniciar a apresentação dos cartazes pelo grupo de Teresa. O episódio a seguir apresentado ilustra aspectos do modo de pensar deste grupo.

Episódio «Só dividimos metades em quintos»

Teresa (apontando para o cartaz do seu grupo — figura 6): Nós temos cinco alunos e três baguetes, temos que dividir ao meio as baguetes. Cada aluno come metade e dividimos o que sobra em cinco partes e fica uma parte para cada aluno.

Paula: Como é que surge no cartaz a fracção 1/10 se afirmaram estar a dividir em cinco partes?

Teresa (apressa-se a explicar): Só dividimos metades em quintos. Então, temos uma baguete dividida em dez e sabemos que cada uma representa um décimo.

Considerei o contributo de Teresa muito positivo. No entanto, não me limitei a aceitá-lo e decidi intervir com uma questão que teve o intuito de provocar a reflexão. Com efeito, entendo que «para a promoção de uma aprendizagem significativa é mais proveitoso fazer perguntas, ou devolver boas perguntas a um aluno do que dar-lhe prontamente respostas» (Boavida *et al.*, 2008, p.66). Além disso, esta era a primeira experiência dos alunos num congresso matemático, pelo que não estavam ainda despertos para o papel que deveriam desempenhar. Através da questão que coloquei pretendi, também, modelar este papel, ou seja dizer aos alunos, de uma forma implícita, o que espera das suas intervenções.

O segundo grupo a mostrar o seu cartaz foi o de Gonçalo. Ao começar, este aluno não apresentou o trabalho preparado previamente pelo seu grupo, pois a anterior explicação de Teresa levou-o a questioná-lo e a reformulá-lo, como se pode observar no seguinte episódio.

Episódio «Escrevemos 1/5 mas deveríamos ter escrito 1/10»

Gonçalo: Enganámo-nos! Escrevemos 1/5 mas deveríamos ter escrito 1/10. Então, eram cinco alunos, três baguetes. O que fizemos foi dividir cada baguete ao meio e ainda sobrou uma metade para comer. Essa metade dividimo-la em cinco partes iguais.

(Gonçalo desenha a baguete no quadro (figura 7) explicando qual a parte comida por cada um dos alunos do Planetário).

Filipa: Não entendo!

Gonçalo: Só metade de uma baguete está dividida em cinco partes mas se estivessem a falar de uma baguete inteira estaria dividida em dez partes.

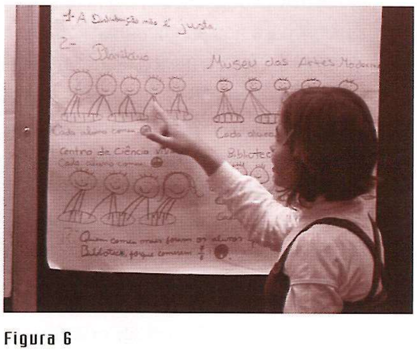

Figura 6

Cátia: Afinal cada aluno não come um décimo mas um quinto de metade de uma baguete!

(Gonçalo fica em silêncio tal como os seus colegas de grupo).

Paula: Que tal ouvir o que o próximo grupo tem para nos comunicar? Talvez possa ajudar a «desbloquear» a situação!

Este episódio mostra que as interacções que ocorrem na turma vão ajudando a criar uma nova compreensão. Gonçalo «soltou-se» do seu trabalho e procura uma forma de explicar a outros o que tinha ficado tão claro para si. Pareceu-me que este «click» ainda não se tinha dado para todos e achei muito curioso o facto de Gonçalo ter ficado em silêncio após a intervenção de Cátia. Decidi dar tempo para que o pensamento se pudesse organizar, pois dar tempo para pensar é outra forma de fazer uma pergunta aberta. Simultaneamente, propus a outro grupo, que sabia poder ajudar a avançar, que iniciasse a sua apresentação o que dá origem ao episódio apresentado a seguir.

Episódio «Já percebi professora!!! O quinto é da metade!».

Filipa (apoiando-se no cartaz representado na figura 8): Então nós no Planetário dividimos as baguetes ao meio e deu seis meios, sobrava um meio que deve ser dividida igualmente pelos alunos. Dividiu-se essa baguete em cinco metades...

Vários colegas: Metades!?

Filipa (atrapalhada): Em décimas.

Cristiana: Nós sabemos que 1/2 é 0,5 e 1/10 é 0,1 então cada aluno come 0,6.

Gonçalo (exclama do lugar): 1/5 da metade é 1/10 da baguete inteira!

Paula: Como se pode escrever matematicamente o que o Gonçalo acabou de dizer?

(Gonçalo escreve: 1/5 × 1/2 = 1/10 e procura os «queijos» para justificar o seu raciocínio: figura 9).

Tatiana (entusiasmada): Já percebi professora! O quinto é da metade!

E muito animada com a descoberta recorre aos decimais para clarificar a situação:

Tatiana: Se 0,5 é metade e dividirmos em cinco partes cada parte é 0,1!

Foi muito interessante constatar que com o decorrer da actividade, os alunos se vão apropriando da condução do próprio processo ensino e aprendizagem, esclarecendo, questionando, mostrando, provando, numa alternância sucessiva de papéis. O diálogo deixou de ser exclusivamente entre mim e os alunos para passar a ser também entre pares. Fui-me apercebendo dos processos de pensamento dos alunos e, apoiando-me neste conhecimento, fui preparando as minhas intervenções futuras. Por exemplo, a questão que coloquei na sequência da intervenção de Gonçalo, prende-se com o formalismo matemático, uma vez que, nessa altura, a expressão a quinta parte da metade já tinha ganho significado. Depois de garantida a compreensão matemática, é também importante aprender a representar formalmente.

Ao acompanhar o trabalho dos diversos grupos e baseando-me na análise das diversas resoluções, escolhi a ordem de apresentação dos cartazes de modo a permitir um percurso do mais concreto ao mais abstracto. Intencionalmente reservei para o final o grupo que organizou o seu trabalho a partir do conceito de percentagem que nunca tinha sido trabalhado na turma. O episódio seguinte ilustra o início desta apresentação.

Episódio «Gostava de perceber melhor essa ideia...»

Rinald: Cada aluno comeu 6/10 ou seja 60% da baguete.

Tatiana: Se a unidade fosse 100% então os alunos comiam 60% ... É isto que queres dizer?

Paula: Gostava de perceber melhor essa ideia... Por que não usar os queijos para explicar melhor essa ideia aos teus colegas? Um queijo inteiro corresponde a que parte?

Quando preparei as aulas associadas ao problema das baguetes, não suspeitei que fosse mobilizado o conceito de percentagem. Devido à «novidade» deste conceito para a generalidade dos alunos, na sequência deste episódio senti necessidade de ser mais interventiva para os ajudar a caminhar na sentido da sua apropriação. Aos poucos e à medida que determinadas questões cruciais foram sendo colocadas, questionadas, debatidas, as ideias, tão profundamente intuitivas de início, foram-se clarificando, o pensamento foi-se estruturando e os alunos começaram a atribuir sentido ao conceito de percentagem. Esta estratégia, não esperada, revelou-se muito útil pois permitiu relacionar as diferentes

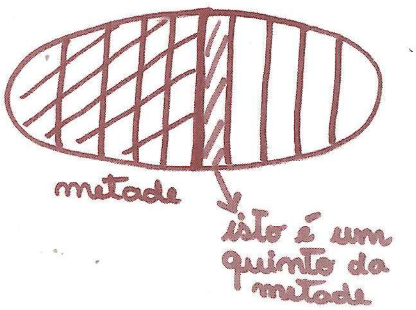

Figura 7

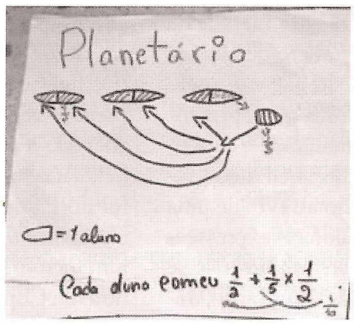

Figura 8

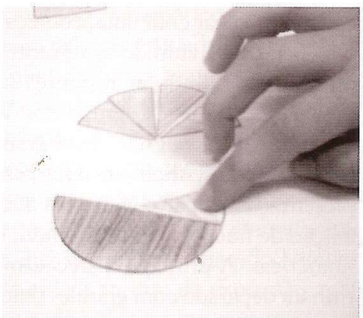

Figura 9

formas de representação de números racionais e utilizar estratégias de cálculo mais eficazes.

Como as fracções denunciam injustiças

Assim que foram confrontados com o problema das baguetes, os meus alunos começaram entusiasticamente a tecer considerações sendo convergente a ideia de que a partilha não tinha sido justa. Salientaram, de imediato, que dar três baguetes a um grupo de quatro alunos ou a um grupo de cinco alunos não é a mesma coisa. Perguntei-lhes, então, se estávamos perante uma divisão ou uma distribuição. Neste momento as opiniões dividiram-se. Debateram-se com a ideia e emitiram as suas opiniões de forma um tanto caótica. Reflectiam «em voz alta». Estava instalada a dúvida... Nada como uma dúvida para aguçar o espírito!

Depois de os deixar falar um pouco desordenadamente, pedi-lhes que organizassem as ideias e que interviessem um de cada vez para que todos pudéssemos seguir os raciocínios. Por exemplo, Mafalda dizia que as baguetes tinham sido «divididas» e «distribuídas», porque «era a mesma coisa»! Já Helder discordava mas não sabia bem porquê. José afirmava que a divisão «é em partes iguais». Depois destas intervenções, perguntei o que pensavam os restantes alunos e foram muitos os que responderam que José tinha razão. Depois de exemplificar com dois alunos uma distribuição (um rebuçado para um, três para o outro) e uma divisão (dois rebuçados para cada um), a turma decidiu que era «mais justo» dividir do que distribuir.

De volta ao problema acrescentei o desafio mais emocionante. Se não houve justiça na distribuição das baguetes, então que parte coube aos alunos de cada visita de estudo? A quem coube a parte maior? E a menor? E foi com este desafio que se iniciou o trabalho de grupo. Para diferenciar os vários grupos, usei papéis coloridos e salientei a importância de elaborarem cartazes com as suas estratégias de resolução.

A análise destes cartazes, bem como o acompanhamento do trabalho de grupo, revelou a existência de diferentes níveis de maturidade matemática. Tendo consciência da forma como todos tinham trabalhado, «sabia», com o que cada grupo podia contribuir para o todo e, portanto, decidi que as apresentações se fizessem a partir dos grupos que tinham usado estratégias mais icónicas para que todos pudessem ir acompanhando os raciocínios.

Três grupos procederam, de imediato, à representação das baguetes dividindo-as pelo número de alunos que tinha ido a cada visita de estudo. Como não eram suficientes para cada aluno ficar com uma, começaram por «dar» metade de uma baguete dividindo as restantes pelo número de alunos, ou ainda dividindo as restantes metades de baguetes pelo número de alunos. O grupo dos Verdes foi o que apresentou o trabalho com um maior grau de formalidade e simbolismo. Não desenhou baguetes passando, de imediato, à representação da parte que cabia a cada aluno através de uma adição de fracções e comparando, em seguida, as expressões numéricas. A princípio pareceu-me que estes alunos não se tinham deparado com grandes dificuldades. No entanto, durante a apresentação do cartaz, reparei que nem todos os elementos do grupo conseguiam explicar e defender o seu trabalho. Aparentemente, alguns não o percebiam bem, o que era indiciador de que alguém do grupo tinha o pensamento formal mais desenvolvido. Penso que, neste caso, foi muito importante ver como colegas de outros grupos que utilizaram um pensamento mais concreto, ligado a ícones, resolveram o problema: desenharam as baguetes e atribuíram a cada elemento a sua parte (ver, por exemplo, figura 10).


Figura 10

A comparação das quantidades de baguete que cada aluno «comeu» durante a visita de estudo não foi feita da mesma forma por todos os grupos. Alguns representaram a fracção sob a forma de número decimal, outros recorreram «aos queijos». Um grupo apresentou a estratégia de comparação ilustrada na figura 11: representou o que cada um comeu em igual quantidade — metade de uma baguete! — e depois trabalhou com o que ultrapassou a metade, pois, como disseram, «todos comeram metade e mais um bocadinho»!

Não houve dificuldades nas diferentes representações dos números racionais. Conhecendo o trabalho dos alunos, penso ser pacífica a questão de conversão da fracção decimal em numeral decimal mas resolvi perceber como lidaram com 1/4 e 3/8. Apressaram-se a dizer que utilizaram o «cálculo em árvore», uma das memórias da turma: um quarto é a metade da metade de uma unidade, para obter oitavos é só fazer novamente metade; ou então, usando as cadeias numéricas, 4×25 é 100 logo $4 \times 0{,}25$ é cem vezes menor que 100, portanto é 1; se 25 é a quarta parte de 100 então, 0,25 é a quarta parte de 1; 1/8 é metade de 0,25, logo é 0,125; para obter 3/8 é só ir buscar três partes. Estavam justificadas as «divisões milagrosas»!

O congresso matemático não terminou aqui. Muitas outras questões foram nascendo a partir de intervenções variadas e relativamente a vários locais da visita, até termos chegado à resposta final. Concluiu-se que o grupo mais beneficiado foi o da Biblioteca Nacional e o mais prejudicado foi do Planetário. Os alunos salientaram, ainda, uma conclusão muito importante: as fracções não enganam! Mostraram logo se houve justiça na distribuição das baguetes! Não houve! Comprovado! E... provado que é um termo bem mais matemático.

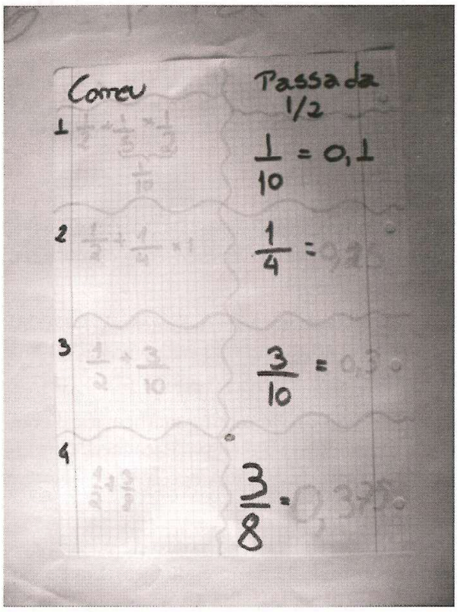

Figura 11

Reflectindo sobre a experiência

Não foi por acaso que os episódios seleccionados para este artigo se relacionam com a visita ao Planetário. De facto, em qualquer das turmas a primeira questão estruturante da discussão foi a parte que cabia a cada aluno que foi a este local: 1/2 + 1/5 da metade, 1/2 + 1/5 × 1/2 ou 1/2 + 1/10 ? Para uns alunos era evidente a equivalência entre estas expressões. Para outros não. Foram necessárias diversas intervenções, várias reformulações destas intervenções, subtis mas substantivas, para que aos poucos esta ideia fosse ganhando significado. Neste processo, «os queijos», foram um recurso importante, como é bem visível no comportamento de Gonçalo que, ao querer-se fazer entender, a eles recorre.

A partir da compreensão, pelos alunos, do porquê da equivalência entre 1/5 × 1/2 e 1/10 foram analisados outros exemplos de multiplicação de números representados sob a forma de fracção e, por generalização, chegou-se à regra operatória que, fruto da experiência vivida, ganhou sentido para os alunos.

Neste processo, as questões colocadas foram cruciais para a comunicação que ocorreu. Por exemplo, a interpelação de Paula «*Como é que surge no cartaz a fracção 1/10 se afirmaram estar a dividir em 5 partes?*» focou a atenção dos alunos num aspecto crucial e desempenhou um papel provocador e desafiador do pensamento matemático.

Gerir a comunicação parece um «trabalho sem rede». É aos poucos, à medida que se vão vivendo experiências do tipo das realizadas, que se vai ficando com maior sensibilidade para orientar as interacções e para colocar as perguntas que permitem manter o grupo comprometido com as ideias matemáticas em discussão e que provocam conflitos cognitivos necessários à aprendizagem. Muitas das perguntas que inquietam, que desafiam, são escolhas do momento, pois estão intimamente relacionadas com intervenções dos alunos que não se podem prever de antemão. No entanto, há muitas outras em que se pode e deve pensar antecipadamente, no momento da planificação. Por esta via, o professor dota-se de recursos que lhe poderão ser úteis na dinamização e gestão da comunicação e, simultaneamente, aumenta a sua capacidade de improvisar, em acção, as «perguntas certas» na hora certa, ou seja, perguntas que poderão originar importantes momentos de reflexão.

Um outro aspecto a destacar, prende-se com a natureza da tarefa apresentada. Com efeito, «uma escolha cuidadosa das tarefas (...) tem um papel importante na criação de oportunidades ricas de comunicação. (Boavida, *et al.* 2008, p. 62). No momento em que foi proposto o problema das baguetes, os alunos não podiam resolvê-lo pela mera aplicação de conhecimentos previamente adquiridos. Para encontrarem a solução, tinham que ultrapassar uma descontinuidade entre o ponto em que estavam e aquele a que pretendiam chegar. Além disso, o problema parecia ser motivador e permitia a utilização de várias estratégias de resolução que requeriam graus de sofisticação matemática diferentes. A conjunção de todos estes aspectos levava a suspeitar que a sua exploração poderia fazer surgir discussões matemáticas significativas, o que veio a acontecer. Assim, tarefas com estas características parecem ser favoráveis à realização de congressos matemáticos.

Através do problema das baguetes pretendeu-se trabalhar a comunicação oral e escrita, começando por incentivar os alunos a descreverem os seus processos de pensamento numa linguagem própria com a intenção de, a pouco e pouco, os ajudar a aperfeiçoá-la de modo a aproximarem-se duma linguagem cada vez «mais matemática». Procurou-se incentivar uma comunicação progressivamente mais rigorosa, uma vez que há uma estreita relação entre os processos de estruturação do pensamento e a linguagem. Tentou-se, também, que os alunos verbalizem os seus raciocínios, discutissem processos de resolução, confrontassem ideias e pensassem sobre o pensamento de outros. Procurou-se, ainda, promover o sentido crítico, não só sobre o conteúdo da comunicação mas também sobre a forma de comunicar. Todos os grupos reflectiram sobre a mesma questão. Tentou-se delinear o ensino tendo em conta as estratégias, raciocínios e dúvidas dos alunos e, assim, procurou-se fomentar uma comunicação reflexiva e instrutiva (Brendefur e Frykholm, 2000). No entanto, foi ao longo do tempo e através do diálogo continuado, que se desenvolveu a compreensão matemática.

Neste contexto, o congresso matemático foi «mestre». Permitiu aumentar o apreço pela necessidade de precisão da linguagem. Possibilitou que, de forma equilibrada, os alunos desenvolvessem capacidades e aptidões, construíssem uma compreensão significativa de conceitos e praticassem o cálculo sem estarem «presos» a um formalismo excessivo. Facilitou a aprendizagem de «certos conteúdos» essenciais em salas de aula em que se privilegia uma comunicação instrutiva e reflexiva em que se incluem, segundo Lampert (2001), a importância da escuta atenta, da expressão audível, da participação organizada e do respeito mútuo.

Os alunos agiram como «pequenos investigadores matemáticos» num percurso que tem muitas semelhanças com o trabalho dos matemáticos: houve momentos de grandes dúvidas, de «erro», de partilha entre colegas, de novo investimento, de argumentação e de prova. Interiorizaram uma atitude de co-responsabilização mútua pelas aprendizagens de todos e ao exteriorizarem essa atitude escutando activamente, respeitando as diferenças de opinião e procurando argumentos válidos para fundamentarem as suas ideias, agiram como professores. Foi com prazer que observámos alunos a começarem a usar as perguntas para orientar os colegas num determinado processo de pensamento ou a manifestar preocupação por alguém parecer não estar a acompanhar o que estava a ser explicado, incentivando-o a colocar a sua dúvida ou a apresentar a sua ideia.

Em suma, foram várias as razões que nos levaram a apreciar toda a actividade matemática desenvolvida a propósito do problema das baguetes e a encontrar nela potencialidades não antecipadas. Há, no entanto, uma que consideramos central: embora o professor tenha um papel essencial, o processo de aprendizagem deve estar centrado no aluno que tem, também, em si, a responsabilidade de o desenvolver, envolvendo-se a si e aos outros. Ficámos com mais consideração pelos alunos, com maior conhecimento das suas potencialidades e até surpreendidas com o desempenho de alguns. Usando as palavras de Margarida, «não mais nos atreveremos a dizer que os alunos não são capazes». Desafiamos outros professores a deixarem-se surpreender, a ousarem utilizar as «capacidades escondidas» dos seus «brilhantes» alunos!

Nota

1 Extracto de um material de formação do Programa de Formação Contínua em Matemática da ESE de Setúbal, adaptado de Fosnot, C. & Dolk, M. (2002).

Referências

APM (Ed.). (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM (documento original publicado em 2000).

APM (Ed.). (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática.* Lisboa: APM/IIE (documento original publicado em 1991).

APM (Ed.). (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar.* Lisboa: APM/IIE (documento original publicado em 1989).

Boavida, A. M. (2008). Arqueologia educativa e congressos matemáticos. Em J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 55–59). Lisboa: Escolar Editora.

Boavida, A. M., Paiva, A., Cebola, G. Vale, I. Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no 1° ciclo do ensino básico.* Lisboa: ME/DGIDC.

Brendefur, J., Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education* 3, 125–153.

Dolk, M. (2008). Problemas realistas: um ponto de partida para uma sequência de oportunidades de aprendizagem. Em Brocardo, J., Serrazina, L., & Rocha, I. (Eds.). *O Sentido do Número: reflexões que entrecruzam teoria e prática.* (pp. 35–53). Lisboa: Escolar Editora.

Fosnot, C. & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: Constructing fractions, decimals and percents.* Portsmouth: Heinemann.

Lampert, M. (2001). Teaching problems and the problems of teaching. New Haven, CT: Yale University Press.

Ministério da Educação. (2001). *Currículo nacional do Ensino Básico: Competências essenciais.* Lisboa: ME/DEB.

Ponte, J.P., Serrazina, L., Guimarães, H., Brenda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. e Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: ME/DGIDC.

Ana Maria Boavida, ESE de Setúbal
Margarida Silva, EB 2/3 Pinhal de Frades
Paula Fonseca, EB 2/3 Pinhal de Frades

Materiais para a aula de Matemática

Borrachas em caixas

Esta tarefa poderá ser resolvida por alunos do 4°, 5° ou 6° anos de escolaridade. Envolve a mobilização da capacidade de visualização espacial e os conceitos de volume e de divisão. Em termos de capacidades transversais mobiliza-se o raciocínio e a comunicação matemática. Na exploração da tarefa pelos alunos, o recurso a cubos coloridos pode ser vantajoso e ajudar na construção de uma argumentação.

É importante que antes de lhes ser apresentada esta tarefa, os alunos tenham tido a oportunidade de realizar actividades diversificadas com volumes. A manipulação de cubos de encaixe para fazerem vários empilhamentos, ou construírem prismas com determinadas dimensões, são actividades que permitem lidar com as três dimensões e desenvolver a visualização espacial. Por exemplo, descobrir maneiras diferentes para empilhar 36 cubos, tendo de obter uma construção prismática, é uma actividade de exploração que permite visualizar as transformações obtidas quando o volume é mantido, mas as dimensões do comprimento, da largura e da altura variam. A planificação das construções obtidas em papel quadriculado também poderá ajudar a desenvolver estes conceitos.

Alice Carvalho