Um outro olhar sobre definições «equivalentes»

Alguns professores definem o *quadrado* como sendo o quadrilátero que tem quatro *lados congruentes* e quatro *ângulos congruentes* enquanto outros o definem como sendo o quadrilátero que tem quatro *lados congruentes* e quatro *ângulos retos*.

Há alguma diferença entre essas duas definições?

A geometria euclidiana pode ser caracterizada de diversas maneiras. Uma delas é por meio da axiomática de Hilbert que foi apresentada pela primeira vez num curso dado por ele em 1898 e publicado em 1899 no seu livro *Fundamentos da geometria*. Hilbert baseou a sua exposição em três conceitos primitivos (ponto, reta e plano), em três relações fundamentais (incidente, estar entre e congruente) e em cinco grupos de axiomas (axiomas da incidência, axiomas da ordem, axiomas da congruência, axiomas da continuidade e o axioma do paralelismo). Os axiomas estabelecem as ligações entre os conceitos primitivos e as relações fundamentais. Castrucci no seu livro *Fundamentos da geometria, estudo axiomático do plano euclidiano* constrói a geometria euclidiana plana passo a passo, partindo dos axiomas de incidência de Hilbert até chegar nos axiomas da geometria euclidiana. A organização proposta por ele coloca em evidência diferentes tipos de geometria: a *geometria da incidência* que resulta dos axiomas do primeiro grupo de Hilbert e das conseqüências deles decorrentes; a *geometria ordenada* que decorre dos dois primeiros grupos de axiomas de Hilbert e de suas conseqüências; a *geometria absoluta* constituída pelos quatro primeiros grupos de axiomas de Hilbert e de suas conseqüências; e a *geometria euclidiana* que decorre dos cinco grupos de axiomas de Hilbert. O quinto grupo é constituído apenas pelo axioma das paralelas com o seguinte enunciado «por um ponto fora de uma reta passa no *máximo* uma reta paralela à reta dada». Há uma pequena sutileza nesse postulado. Enquanto Euclides estabelece a unicidade da paralela, Hilbert ao usar a palavra «máximo» permite também que não exista a reta paralela por um ponto. A negação do axioma de Hilbert apresenta a seguinte forma «por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas à reta dada». Esse axioma recebeu o nome de axioma de Bolyai-Lobatchevsky. A geometria que resulta dos 4 primeiros grupos de axiomas de Hilbert e do axioma de Boyai-Lobatchevsky recebe o nome de *geometria hiperbólica*. (Figura 1)

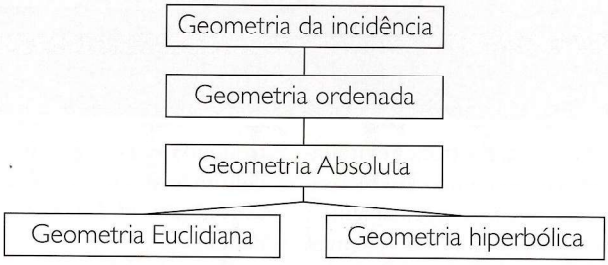

Figura 1.

Na geometria hiperbólica, pode-se provar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° e conseqüentemente que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é menor que 360°. Resulta que, um quadrilátero, na geometria hiperbólica, não pode ter 4 ângulos retos.

Voltando ao início do artigo, a primeira definição de quadrado apresentada é uma definição que não incorpora o postulado das paralelas. Portanto é uma definição válida tanto na geometria euclidiana como na geometria hiperbólica. A segunda definição utiliza o axioma das paralelas sendo um caso particular da primeira definição. Ela se situa apenas no nível da geometria euclidiana. Portanto cada uma das duas definições está inserida num nível diferente de conceitualização[1] da geometria. A primeira se situa na geometria absoluta e a segunda na geometria euclidiana. Da mesma maneira há diferentes definições para o paralelogramo. Podemos definir um paralelogramo como um quadrilátero cujas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios ou como um quadrilátero que tem dois pares de lados paralelos. A primeira definição se situa na geometria absoluta sendo portanto aplicável tanto à geometria euclidiana quanto à geometria hiperbólica e a segunda é uma definição restrita apenas à geometria euclidiana.

Olhar diferentes definições de um mesmo objeto matemático em geometria é um convite a uma reflexão sobre diferentes níveis de conceitualização em que estão inseridas. Além disso, enxergar a geometria euclidiana ou outras geometrias (geometria afim, geometria projetiva) como uma construção passo a passo a partir da geometria da incidência ou da geometria ordenada contribui na organização dos conhecimentos geométricos do professor.

Nota

1 A palavra conceitualização é referida aos campos conceituais de Vergnaud.

Vincenzo Bongiovanni PUC-SP

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de forma a tornar possível a sua inclusão na Revista.