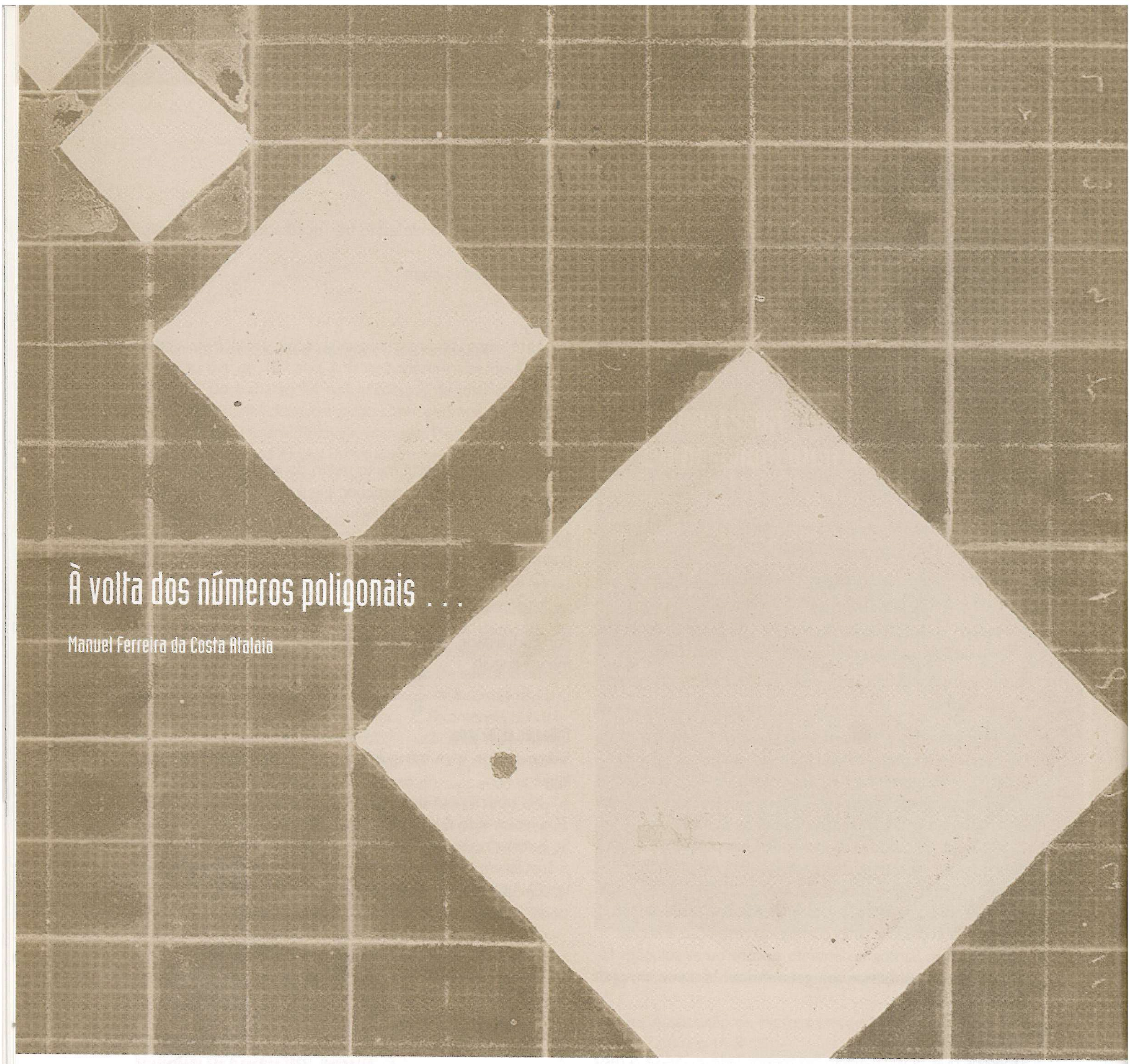

# À volta dos números poligonais . . .

Manuel Ferreira da Costa Atalaia

Os números poligonais são uma matéria atraente e acessível para alunos do Ensino Secundário. Como tal, podem ser úteis como motivação ao estudo do tema sucessões (em especial progressões aritméticas) permitindo, também, uma boa aproximação a conceitos e técnicas importantes na matemática, como por exemplo, o método recursivo, o método da indução finita e o método das diferenças finitas.

Os números poligonais surpreendem não só pela simplicidade inicial, regularidades e vastas propriedades como também pela carga histórica. Fazem-nos recuar dois milénios e meio, à célebre Escola Pitagórica, (daí também se chamarem números pitagóricos) onde os Gregos, privilegiando a Geometria e a Lógica, associaram formas geométricas a números obtendo representações visuais de sequências numéricas, propriedades e relações entre elas. Basicamente os números poligonais baseiam-se na consideração de uma sequência de pontos sobre os lados de um polígono regular, do seguinte modo:

- o primeiro termo da sequência é sempre igual a 1 (um ponto);
- o segundo termo é igual a $k$ pontos, sendo $k$ o número de vértices do polígono em causa;
- o termo de ordem $n$ é igual ao termo anterior com o acréscimo de um ponto nos dois lados comuns aos vários polígonos e colocação doutros pontos nos restantes lados de modo que todos os lados do polígono fiquem sempre com o mesmo número de pontos.

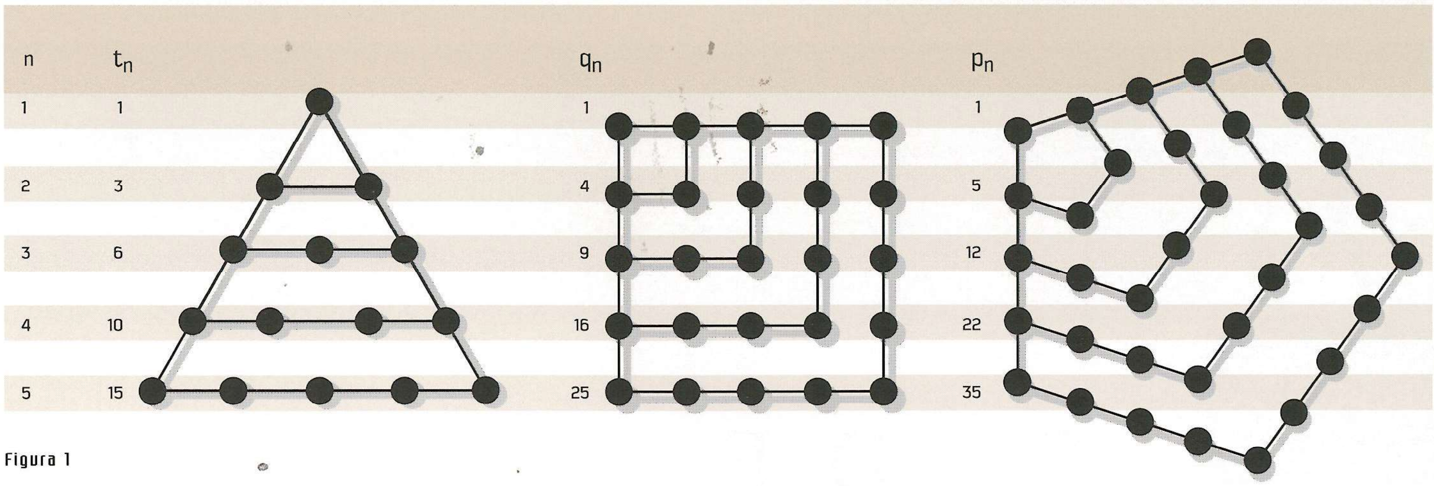

Figura 1

Na figura 1 exemplificam-se os casos correspondentes aos números triangulares, quadrados e pentagonais.

## Dedução das fórmulas de recorrência e do termo geral

Para os *números triangulares* constatamos que a fórmula de recorrência é $t_1 = 1 \wedge t_n = t_{n-1} + n$, (para $n > 1$).

Nesta sucessão cada termo de ordem $n$ é a soma de todos os naturais até $n$ (inclusive). Portanto $t_n = S_n$, em que $S_n$ é a soma dos $n$ primeiros termos da progressão aritmética de razão 1 e primeiro termo igual a 1.
Assim:

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = \frac{1+n}{2} \times n = \frac{n^2+n}{2},$$

é o termo geral dos números triangulares.

Para os *números quadrados* é óbvio que o termo geral é $q_n = n^2$.

Como

$$\begin{aligned} q_n - q_{n-1} &= n^2 - (n-1)^2 = \\ &= n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1, \end{aligned}$$

podemos escrever a correspondente fórmula de recorrência para os números quadrados:

$$q_1 = 1 \wedge q_n = q_{n-1} + 2n - 1, \quad (n > 1).$$

A partir deste momento podemos lançar a conjectura de que o termo geral de uma sucessão de números poligonais é dado por um polinómio de segundo grau em $n$. Um trabalho mais aprofundado confirmaria que esta conjectura é verdadeira. (De facto as segundas diferenças entre termos consecutivos da sucessão de quaisquer números poligonais têm sempre um valor constante: nos números triangulares igual a 1, nos números quadrados igual a 2, nos números pentagonais igual a 3 e assim sucessivamente).

Vejamos, por exemplo, como seria o termo geral para os números pentagonais. De acordo com a nossa conjectura, qualquer termo geral de números poligonais será da forma $f(n) = an^2 + bn + c$.

Facilmente determinamos os coeficientes $a$, $b$ e $c$, pois sabemos que $p(1) = 1$, $p(2) = 5$ e $p(3) = 12$.

Assim, obtemos o sistema :

$$\begin{cases} 1 = a + b + c \\ 5 = 4a + 2b + c \\ 12 = 9a + 3b + c \end{cases}$$

que, resolvido, fornece a solução $a = 3/2$, $b = -1/2$ e $c = 0$. Deste modo, o termo geral da sucessão dos *números pentagonais* é

$$p_n = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

Podemos, agora, tentar generalizar o anterior resultado para uma qualquer sucessão de números poligonais (de polígonos de $k$ lados, sendo $k \geq 3$). Por observação das figuras anteriores somos induzidos a escrever:

$$u_n - u_{n-1} = k(n-1) - [2(n-1) - 1],$$

em que $k(n-1)$ representa o total de pontos no polígono de $k$ lados, de ordem $n$; e a expressão $2(n-1) - 1$ representa o número de pontos nos dois lados iniciais no polígono de $k$ lados da ordem anterior $(n-1)$, em que se subtrai 1 porque esses dois lados têm um ponto comum.

Vem então:

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= k(n-1) - [2(n-) - 1] = \\ &= k_n - k - (2n - 2 - 1) = kn - k - 2n + 3 = \\ &= (k-2)n - k + 3 \end{aligned}$$

Voltando à conjectura formulada, $f(n) = an^2 + bn + c$ é o termo geral duma sucessão de números poligonais, e, o termo antecedente a $n$ será

$$\begin{aligned} f(n-1) &= a(n-1)^2 + b(n-1) + c = \\ &= an^2 + (b - 2a)n + a - b + c. \end{aligned}$$

Vem então,

$$\begin{aligned} f(n) - f(n-1) &= an^2 + bn + c - [an^2 + (b-2a)n + \\ &+ a - b + c] = 2an - a + b. \end{aligned}$$

Identificando agora esta expressão com a de $u_n - u_{n-1}$ vem $2an - a + b = (k-2)n - k + 3$, donde $2a = (k-2)$ c $-a + b = -k + 3$, resultando $a = (k-2)/2$ e,

$$b = -k + 3 + a = -k + 3 + \frac{k-2}{2} = -\frac{k+4}{2}.$$

Finalmente, substituindo atrás, obtemos a fórmula geral de qualquer número poligonal de $k$ lados:

$$f(k,n) = \frac{(k-2)n^2 + (4-k)n}{2} \quad (k \geq 3, n \in \mathbb{N}).$$

Manuel Ferreira da Costa Atalaia
Escola Secundária de Jácome Ratton