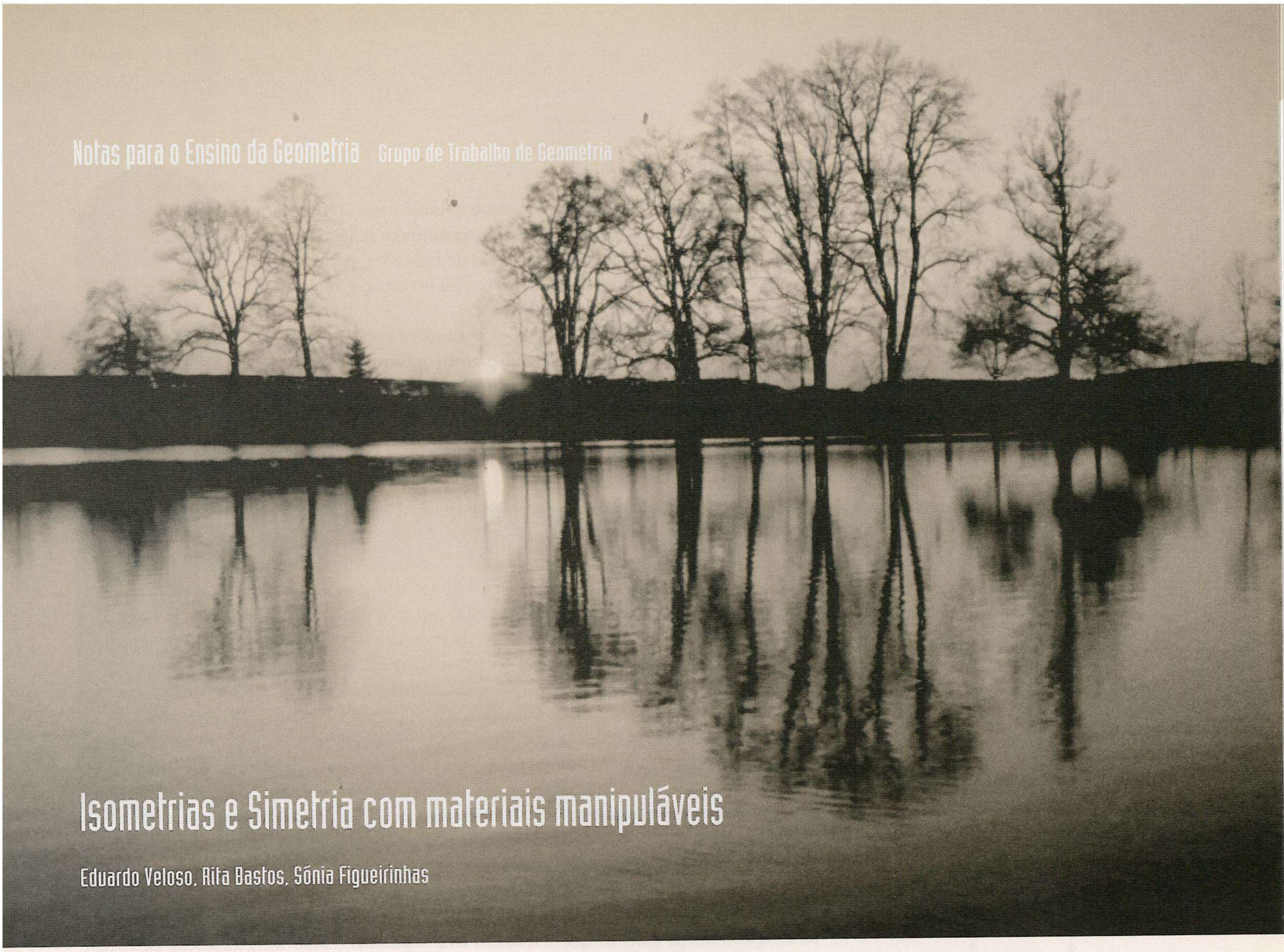


Isometrias e Simetria com materiais manipuláveis

Eduardo Veloso, Rita Bastos, Sónia Figueirinhas

Temos defendido nesta revista que os alunos dos ensinos básico e secundário devem ter experiências diversificadas que impliquem aprendizagens sobre a Geometria e sobre a natureza da própria Geometria e que as situações vividas sejam acompanhadas de actividade matemática de ordem superior. Para isso, podemos recorrer às ferramentas tecnológicas disponíveis, nomeadamente programas de geometria dinâmica e *applets*, que consideramos decisivos no sentido de proporcionar a todos — professores e alunos — imagens e manipulações a que, noutros tempos, só os grandes geómetras tinham acesso pelo grande poder da sua imaginação. Mas não só: é preciso proporcionar também algumas experiências com materiais manipuláveis.

Os recursos para o ensino da geometria, em geral, e das transformações geométricas e simetria em particular, devem ser adequados ao nível de escolaridade e à idade dos alunos. Por exemplo, nos primeiros anos pode não ser adequado que os alunos usem programas de geometria dinâmica, mas é de toda a conveniência que se habituem a visualizar e manipular imagens em *applets* como os que existem no sítio do Instituto Freudhental[1] ou no portal do NCTM[2]. Os materiais manipuláveis devem ser utilizados sempre, em complemento daqueles, mas cada vez com maior exigência. Há que ter alguns cuidados para que a experiência dos alunos não se limite a «brincadeiras» com os objectos, mas implique realmente actividade intelectual. Esses cuidados passam necessariamente pela comunicação entre professor e aluno — oral ou escrita — em que o professor se certifica que há raciocínios matemáticos envolvidos na experiência.

Todos os materiais têm potencialidades e limitações, de que o professor deve estar consciente. É sobre isso que nos vamos debruçar neste texto, relativamente a alguns materiais que temos experimentado.

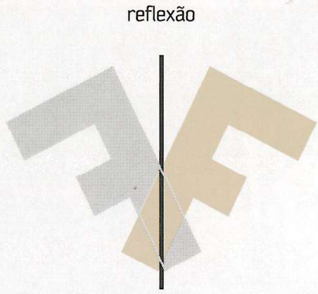


Figura 1A. Reflexão.

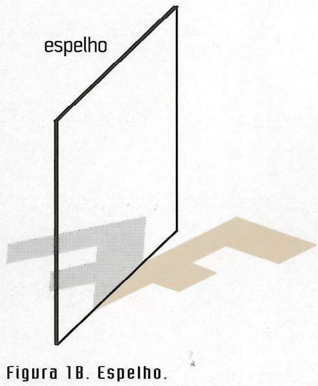


Figura 1B. Espelho.

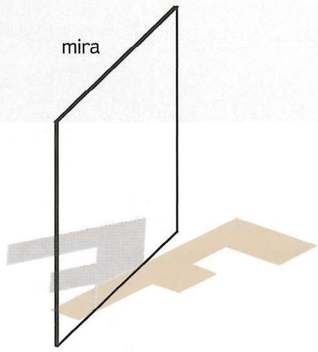


Figura 1C. Mira.

Espelhos e miras

Os espelhos planos modelam fisicamente a transformação reflexão, tal como as miras que são feitas de um material transparente que também reflecte a luz. Como todas as isometrias podem ser obtidas como compostas de reflexões, podemos, com os espelhos, trabalhar todos os tipos de isometria, no plano ou no espaço, muitas rosáceas, frisos e padrões e até as simetrias de alguns poliedros[3].

Os espelhos têm, no entanto, duas limitações importantes:

1 — A de transformar um semi-plano (ou semi-espaço) no semi-plano (ou semi-espaço) complementar, em vez de transformar todo o plano (espaço) nele próprio. As miras resolvem uma parte do problema, embora não seja possível visualizar sempre, de um único ponto de vista, a totalidade de uma figura e da sua transformada. Em muitas situações, temos que observar os dois lados da mira para «ver» as duas partes da figura transformada.

Note-se que, no espelho (figura 1B), parte do *F*, como está do lado de trás do espelho, não é reflectida, como acontece na verdadeira reflexão (figura 1A). Além disso, essa parte da figura fica ocultada pelo espelho. Na mira (figura 1C), esta segunda limitação não existe, porque sendo transparente, podemos ver através da mira a figura completa.

Nas figuras 2A e 2B, estamos a utilizar um espelho e uma mira (respectivamente) para detectar simetrias de reflexão num padrão. Como o espelho tapa parte do padrão, apenas vemos a reflexão e é impossível ver se coincide ou não com a parte escondida do padrão (embora possamos presumir que não, dado o aspecto da parte do padrão que é visível. Na figura 2B, com a mira, é perfeitamente visível a continuação do padrão para o lado de lá da mira, e a reflexão vista na mira, que na fotografia se vê com muita dificuldade, mostrará imediatamente que não estamos em presença de um eixo de simetria.

No caso da figura 3A, se colocarmos um espelho sobre o lado do quadrado a que é tangente a circunferência, no espelho vemos a imagem do quadrado mas fica escondida parte da figura, que não é sujeita à reflexão por causa do espelho ter apenas uma face espelhada, e assim não mostrar a reflexão correctamente. No caso da mira, embora a luz na fotografia não ajude muito, vemos o prolongamento da figura (a circunferência no caso da figura 3C, ou o quadrado no caso da figura 3D) e a reflexão, em qualquer caso o que se vê aproxima-se mais do que a reflexão é na realidade, como transformação de todo o plano.

2 — A segunda limitação é que embora seja sempre possível obter, com os espelhos, a transformada de uma figura pela composta de duas ou três reflexões, posicionando devidamente dois ou três espelhos, não é possível «eliminar do campo visual» a figura intermédia. Por exemplo, não é possível obter, com um livro de espelhos uma rosácea do tipo cn, isto é, só com simetrias de rotação; também não é possível obter, com três espelhos, a imagem de uma figura por uma reflexão deslizante, sem que se veja a imagem pela reflexão.

Figura 2A.

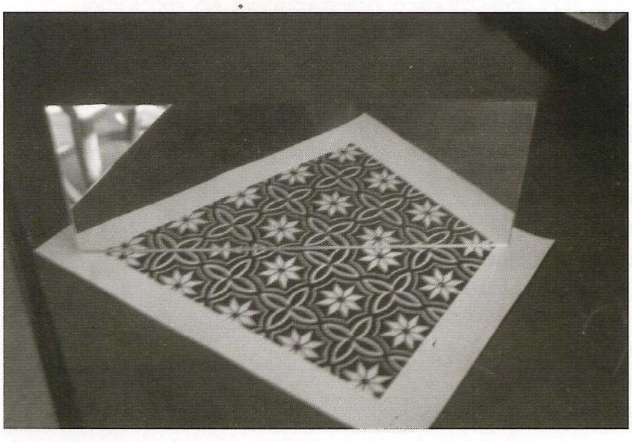
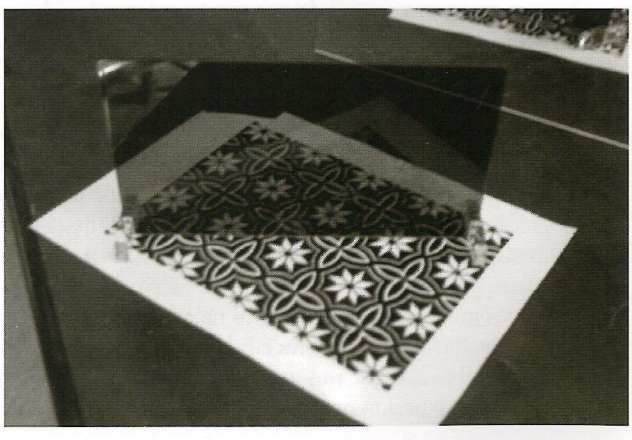


Figura 2B.



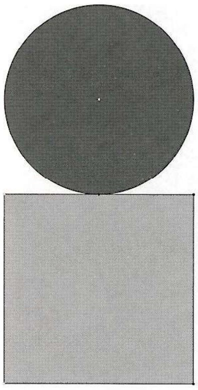


Figura 3A.

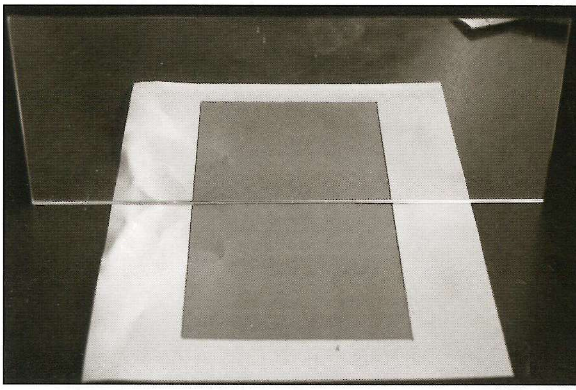


Figura 3B.

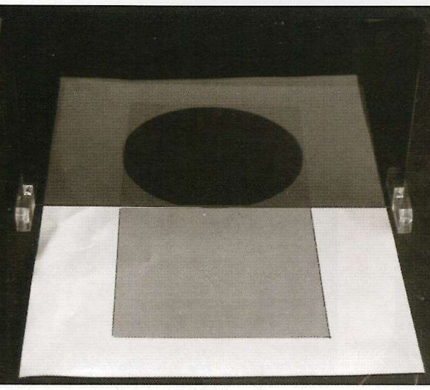


Figura 3C.

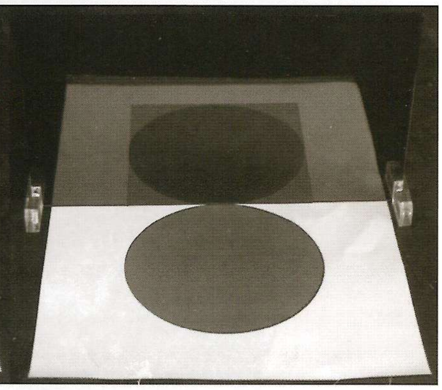


Figura 3D.

Na figura 4A temos dois espelhos fazendo um ângulo de 60°. Obtemos 5 imagens da figura que desenhámos entre os dois espelhos. Como se vê, obtemos, no conjunto, uma rosácea d3 (tem como simetrias três reflexões e três rotações) Para modelarmos um c3 teríamos que poder fazer desaparecer as figuras intermédias das rotações (como produtos de duas reflexões), ou seja as figuras 2, 4 e 6. Mas isso não é possível neste tipo de disposição dos espelhos, e portanto apenas podemos, com livros de espelhos e ângulos convenientes dos espelhos, obter rosáceas dn. As figuras 4B e 4C (em que as rectas são apenas indicação dos eixos de reflexão e não fazem parte da rosácea, vemos como com um programa de geometria dinâmica é possível modelar a rosácea d3 e a rosácea c3 (escondendo as figuras convenientes).

Figura 4A.

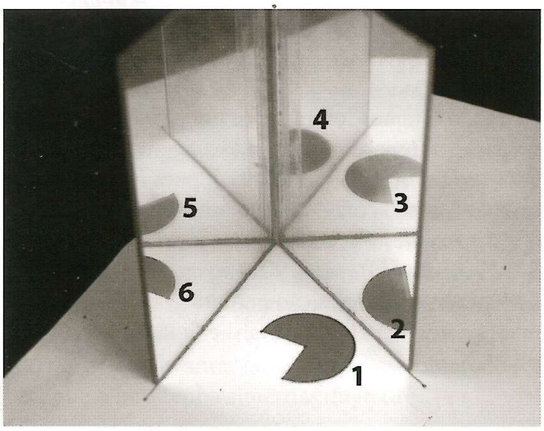


Figura 4B.

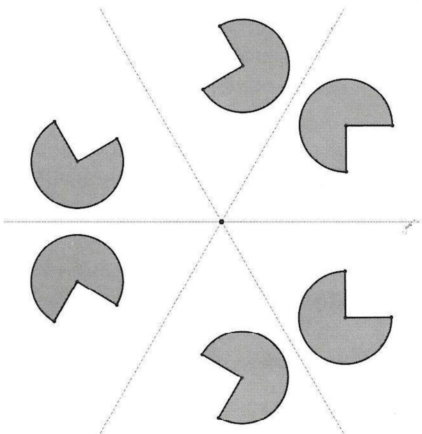


Figura 4C.

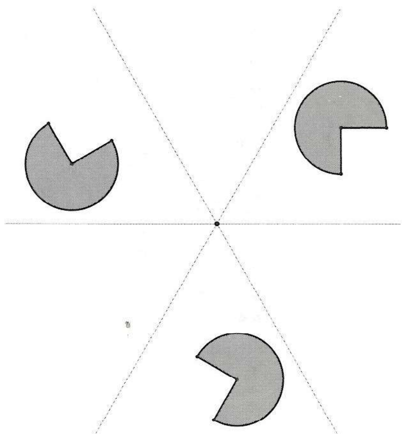



Figura 5A


Figura 5B


Figura 5C

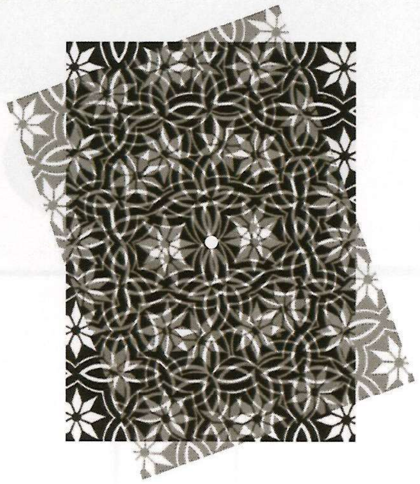


Figura 5D

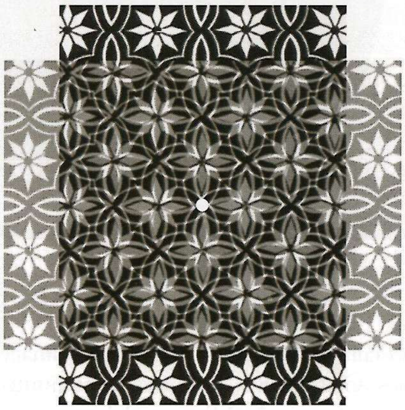


Figura 5E

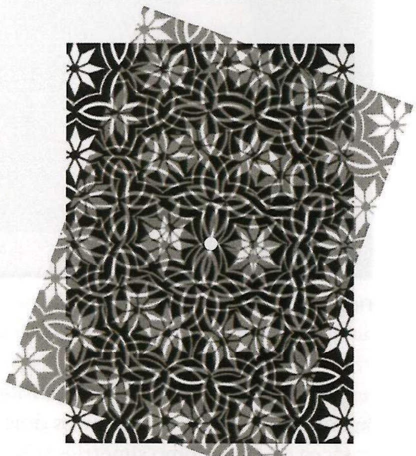


Figura 5F


Figura 5G

Papel transparente

Com papel transparente, podemos decalcar figuras e «rodar» em torno de um centro, «deslizar» ao longo de um segmento, ou «virar o papel» fazendo coincidir uma determinada recta. São formas de modelar as rotações, translações e reflexões. É um processo muito sugestivo para construir figuras transformadas de outras, pelas isometrias, acessível a todos os alunos, e que proporciona a compreensão de alguns aspectos importantes como, por exemplo, a preservação da orientação.

A figura 5A é um exemplo de padrão, e estamos interessados em procurar simetrias de rotação. Fotocopiámos a figura em papel transparente, obtendo a figura 5B. Nas duas figuras sobrepostas (figura 5C), fixámos um ponto (círculo branco), para investigar se é um centro de simetria de rotação. Fixando o ponto com o bico de um lápis, por exemplo, vamos rodando lentamente o papel transparente, à procura de outra sobreposição perfeita das duas figuras, passando pelos 20° (figura 5D), pelos 90° (figura 5E) e pelos 160° (figura 5F), e ainda não encontrámos nenhuma sobreposição perfeita... mas eis que nos 180° (figura 5G) encontramos a primeira coincidência total...ah! é uma meia-volta!

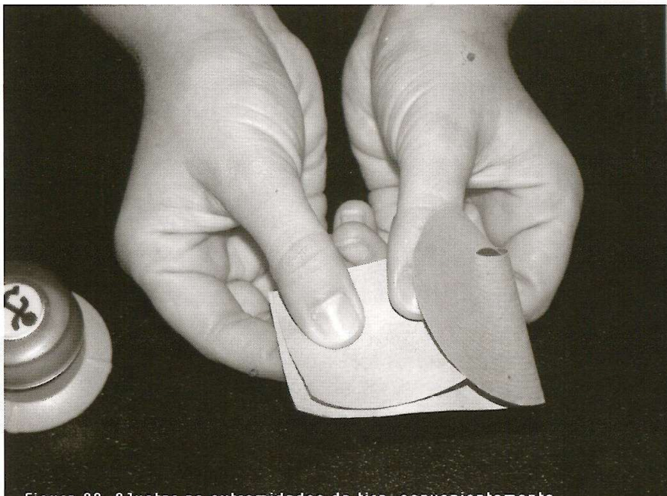


Figura 6A. Ajustar as extremidades da tira, convenientemente.

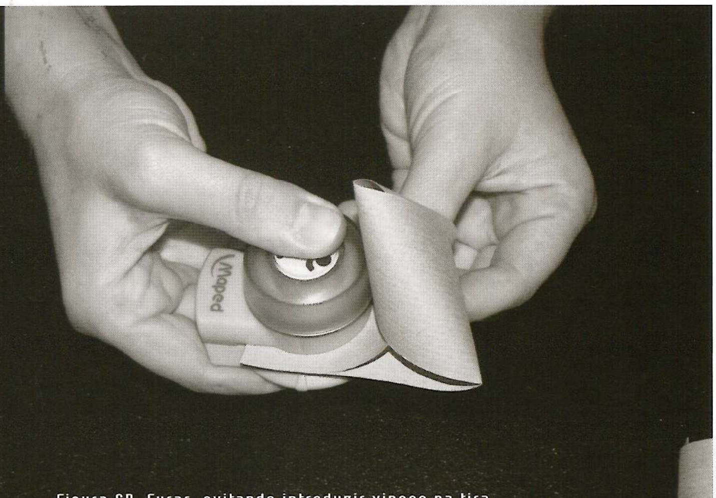


Figura 6B. Furar, evitando introduzir vincos na tira.

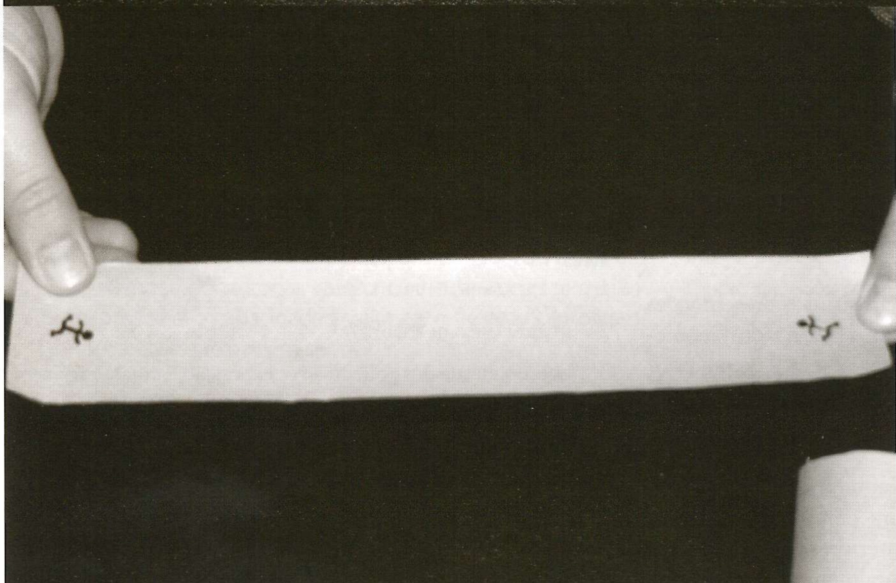


Figura 6C. «Desenrolar», para ver a meia-volta presente.

Dobragens e furos

As dobragens em papel simulam a reflexão, tal como os espelhos. Se utilizarmos furos para representar as figuras, obtemos imagens sugestivas destas e das suas transformadas por uma reflexão ou pela composta de várias reflexões, sem algumas das limitações dos espelhos: (1) podemos intervir dos dois lados do eixo (o vinco da dobra), modelando assim a transformação de todo o plano em todo o plano; (2) com alguns artifícios podemos furar de modo a evitar as imagens intermédias em composições de reflexões (ver figuras 6A, B e C).[4]

Reflectir sobre o número e posição das dobras feitas permite chegar a algumas conclusões sobre a composta de duas ou mais reflexões. Ao estabelecer paralelismos entre esta abordagem e outras, equivalentes, podem criar-se hábitos interessantes, quer de resolução de problemas quer de raciocínios matematicamente muito poderosos.

Nas primeiras tarefas, e enquanto este assunto não estiver bem dominado, desaconselha-se o uso de furos simétricos: a simetria do motivo pode ser confundida com a transformação presente e o facto de haver dobragens diferentes que conduzem ao mesmo resultado pode fazer levantar falsas hipóteses, sobretudo se não forem feitas muitas experiências, em que o furo tenha simetrias diferentes.

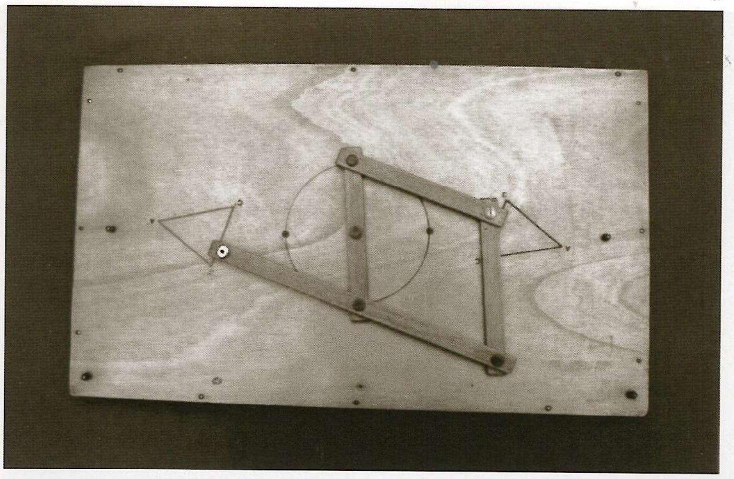


Figura 7A

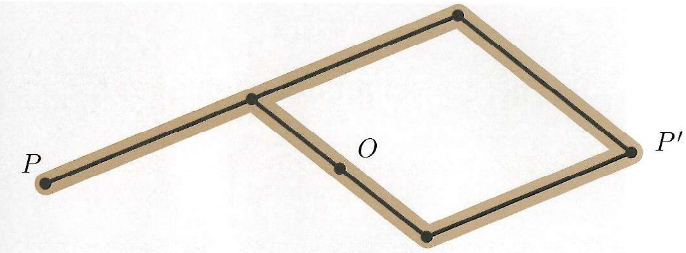


Figura 7B

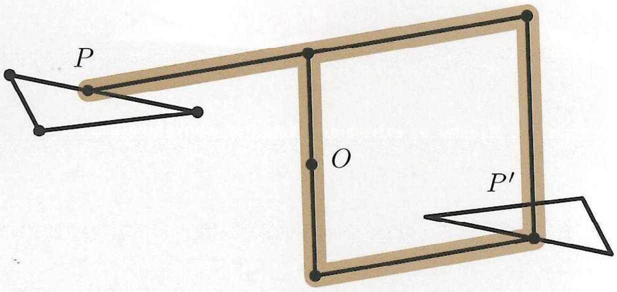


Figura 7C

Mecanismos

A utilização de mecanismos para construir representações de objectos geométricos faz parte da História da Geometria e fornece uma compreensão desses objectos de um ponto de vista diferente, ou seja, uma perspectiva que complementa outras interpretações através de outras formas de representação.

Também as transformações geométricas podem ser modeladas por mecanismos, embora com limitações ainda maiores que as dos materiais anteriores, na medida em que cada mecanismo transforma geralmente uma pequena porção de plano numa outra porção de plano, muitas vezes disjunta da primeira.

O exemplo mais conhecido de mecanismo para modelar uma transformação geométrica é, talvez, o pantógrafo, mas há mecanismos para simular todas as isometrias e outras transformações conhecidas. A tarefa de construir um mecanismo, física e virtualmente, é uma situação que dá origem à formulação e resolução de problemas, dos mais diversos, proporcionando assim óptimas experiências de aprendizagem.

A título de exemplo, apresentamos nas figuras 7A, 7B e 7C imagens de um mecanismo físico que modela a meia volta[5], ou seja uma rotação de 180°, e um modelo virtual construído em *Geometer's Sketchpad*. O ponto O é o centro da meia volta e está fixo. Quando o ponto P percorre uma linha — um triângulo, no exemplo — o ponto P', que tem um instrumento de escrita, regista o transformado dessa linha pela meia volta de centro em O.

Notas

1 `http://www.fi.uu.nl/en/`

2 `http://www.nctm.org/`

3 Sobre simetria dos poliedros ver exposição e brochura *Simetria — Jogos de Espelhos* no sítio da Associação Atractor:

`http://www.atractor.pt`

4 Ver *O ritmo das formas*, de Paolo Bellingeri, Maria Dedò, Simonetta di Sieno e Cristina Turrini, traduzido e editado em Portugal pela Associação Atractor; ver também o *kit* de actividades editado pela APM com o título *Visualização e Simetria*.

5 Esta fotografia e o mecanismo de meia volta pertencem à colecção organizada pelo *Laboratorio di Matematica del Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica* em colaboração com o CICAIA — *Centro Interdipartimentale di Calcolo Automatico e Informatica Applicata dell' Università degli studi di Modena e Reggio Emilia*, sob a coordenação de Maria G. Bartolini Bussi. Ver

`http://archivioweb.unimore.it/theatrum/macchine.`

Eduardo Veloso, Rita Bastos, Sónia Figueirinhas
Grupo de Trabalho de Geometria da APM